



# L'entre-deux-guerres mathématique à travers les thèses soutenues en France

Juliette Leloup

## ► To cite this version:

Juliette Leloup. L'entre-deux-guerres mathématique à travers les thèses soutenues en France. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. NNT : . tel-00426604

**HAL Id: tel-00426604**

**<https://theses.hal.science/tel-00426604>**

Submitted on 26 Oct 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale Paris Centre

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

**Juliette LELOUP**

---

**L'entre-deux-guerres mathématique à travers  
les thèses soutenues en France**

---

dirigée par Catherine GOLDSTEIN et Hélène GISPERT

Soutenue le 17 juin 2009 devant le jury composé de :

M. Tom ARCHIBALD .....	Rapporteur
M <sup>me</sup> Liliane BEAULIEU .....	Examinateur
M <sup>me</sup> Hélène GISPERT .....	Directrice
M <sup>me</sup> Catherine GOLDSTEIN .....	Directrice
M. François LOESER .....	Examinateur
M. Laurent MAZLIAK .....	Examinateur
M. Philippe NABONNAND .....	Rapporteur

Institut de Mathématiques de Jussieu  
175, rue du chevaleret  
75 013 Paris

École doctorale Paris centre Case 188  
4 place Jussieu  
75 252 Paris cedex 05

*A mes deux grands-pères,  
Edmond et Jules.*



# Remerciements

Au printemps 2003, à la faculté des sciences d'Orsay, Renée Elkik eut l'idée d'organiser deux conférences d'histoire des mathématiques à destination des étudiants préparant l'agrégation de mathématiques. Étant l'une d'entre eux, j'ai ainsi eu la chance d'écouter Hélène Gispert et de découvrir cette discipline. Sans cette occasion, rien ne dit que la présente thèse serait achevée, ni même commencée. En effet, désirant approfondir cette voie dont je venais d'avoir un aperçu, j'ai pris contact avec l'un de mes enseignants à l'École normale supérieure, François Loeser. Ce dernier m'a alors conseillé de m'adresser à Catherine Goldstein. Et c'est ainsi que j'ai été mise en contact avec les deux personnes qui allaient être mes directrices de thèses. Merci à Renée Elkik et à François Loeser de m'avoir permis ces contacts.

Je remercie également et très sincèrement Hélène Gispert et Catherine Goldstein. Par leur aide, leur disponibilité et leurs conseils, elles m'ont permis d'accomplir cette thèse et de dépasser ce dont je me pensais capable. Par leur exigence et par leur rigueur, elles m'ont initiée et formée au métier de la recherche et m'en ont donné le goût, même si tout n'a pas toujours été facile. Je voudrais leur adresser ma plus profonde reconnaissance et leur dire toute mon admiration pour leurs valeurs tant humaines que professionnelles.

Mes années de thèse se sont donc déroulées au sein de deux laboratoires différents, le GHDSO à Orsay et le projet Histoire des sciences mathématiques à Paris VI. Je tiens à remercier l'ensemble des membres de ces deux équipes pour leur accueil, leur gentillesse, leurs conseils et leur soutien. Ils m'ont permis la découverte de la vie scientifique au sein d'un laboratoire. Je remercie plus particulièrement Jim Ritter, Laurent Mazliak et Virginie Champeau pour leurs conseils et leur relecture de passages de ma thèse.

Tout au long de ces années, des opportunités m'ont permis de découvrir d'autres facettes de la recherche, notamment le travail en bibliothèque et aux Archives nationales. Je tiens à remercier l'ensemble des bibliothécaires que j'ai pu côtoyer, notamment ceux des bibliothèques Mathématique-Informatique de l'École normale supérieure et Mathématiques-Recherche de Chevaleret. Ils m'ont permis d'avoir un accès privilégié aux thèses de sciences mathématiques et de pouvoir travailler sur mon corpus dans les meilleures conditions possibles. Merci également à l'ensemble du personnel des Ar-

chives nationales, sans lesquels la consultation des rapports de thèse n'aurait pas été possible.

Je voudrais également remercier Jacqueline Ferrand et Pierre Lelong qui ont eu la patience et l'amabilité de répondre à mes questions sur leur vécu de l'entre-deux-guerres.

Le congrès du Novembertagung organisé à Paris en 2005, un colloque au CIRM de Luminy en janvier 2007, un congrès à Saragosse en juillet 2007, un « workshop » à Oberwolfach en mai 2008, à Vienne en janvier 2009, différents séminaires, notamment à l'Institut Henri Poincaré : que d'occasions pour découvrir des recherches différentes, pour s'introduire au coeur de la recherche qui se fait, pour exposer ses propres résultats ! Je voudrais remercier l'ensemble des chercheurs que j'ai pu y rencontrer et qui m'ont permis d'y participer. Par les conférences qu'ils y ont données, par leurs échanges, par leurs réactions à mes exposés, par les discussions que nous avons pu avoir, ils ont souvent éclairé sous un jour nouveau certains aspects de mes recherches et m'ont surtout fait découvrir d'autres sujets, d'autres intérêts et perspectives de recherche. Merci à tous et plus particulièrement à Norbert Schappacher, Philippe Nabonnand, Jim Ritter, Laurent Mazliak, Christian Gilain, David Aubin, Liliane Beaulieu, Della Fenster, Joachim Schwermer, Moritz Eppe, Tom Archibald, Jeremy Gray, June Barrow-Green et Reinhard Siegmund-Schultze.

Un autre moment important et structurant dans la préparation d'une thèse est celui de l'écriture d'un article. Je voudrais remercier Liliane Beaulieu de m'avoir permis d'en écrire un à « quatre mains » avec Hélène Gispert pour un numéro spécial de la *Revue d'histoire des mathématiques*.

Les années de ma thèse ne sauraient être dissociées des enseignements que j'ai assurés à l'université Pierre et Marie Curie, d'abord en tant que monitrice, puis en tant qu'ATER. Je voudrais remercier les différents enseignants avec qui j'ai travaillé et également l'ensemble de mes étudiants. Assurer des travaux dirigés et encadrer des projets en histoire des mathématiques ont été, pour moi, de véritables respirations à côté de la recherche ainsi que des moments de bonheur et d'épanouissement.

À la fin de ces cinq années, au moment de la soutenance, je remercie Philippe Nabonnand et Tom Archibald d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Merci également pour vos remarques et suggestions. J'adresse également toute ma reconnaissance à Liliane Beaulieu, Laurent Mazliak et François Loeser pour avoir accepté d'être membres de mon jury.

Faire sa thèse n'est pas toujours simple. J'ai eu la chance d'être entourée professionnellement par mes directrices de thèse et amicalement par des personnes formidables au sein même de l'Institut de mathématique de Jussieu. Je remercie plus particulièrement Sébastien Gauthier et Alexandre Guilbaud qui m'ont fait partager leur expérience com-

mune de thèse, qui m'ont encouragée lors des moments plus difficiles. Merci beaucoup également à Marie qui a supporté toute la période d'écriture de ma thèse dans notre bureau de l'Institut et à Michel Vaugon, son directeur de thèse. Je remercie également l'ensemble de mes amis pour leur présence et leur soutien pendant ma thèse. Certains ont su trouver les mots pour m'encourager dans les moments de doute et je leur en suis très reconnaissante.

J'adresse un merci particulier à Elian ainsi qu'à ses parents, à ses grands-parents et au reste de sa famille pour les moments passés ensemble les dimanches, qui me remplissaient de joie et d'énergie pour le reste de la semaine.

Enfin, je tiens à remercier l'ensemble de ma famille et plus particulièrement mes parents, Martine et Robert, et ma soeur chérie, Héloïse. Sans vous, je n'aurais sans doute pas réussi à aller au bout. Votre présence et votre amour m'ont portée jusqu'à la fin. Merci Maman, super relectrice de choc, qui, avant le dépôt de ma thèse, n'a pas hésité à passer des nuits blanches sur mon manuscrit. Merci Papa pour le soin de ta dernière relecture.

Je voudrais remercier plus particulièrement Guilhem. Aucun mot ne pourrait suffire pour exprimer tout ce que tu m'as apporté et m'apportera encore pour longtemps j'espère...





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>21</b>
0.1 Images de l'entre-deux-guerres mathématique . . . . .	21
0.2 Une mémoire collective . . . . .	23
0.3 Un nouveau corpus : les doctorats de sciences mathématiques . . . . .	27
0.4 Le principe de la variation d'échelles . . . . .	30
0.5 Plan de la thèse . . . . .	37
<b>1 Les thèses et la recherche mathématique en France de 1900 à 1914</b>	<b>39</b>
1.1 Bilan historiographique des années 1900 à 1914 . . . . .	40
1.1.1 Composition du milieu mathématique français . . . . .	40
1.1.2 Les équilibres entre domaines mathématiques . . . . .	41
La géométrie et les mathématiques appliquées : des domaines au	
second plan . . . . .	42
L'analyse : une discipline phare . . . . .	44
1.1.3 Des débats épistémologiques importants . . . . .	46
1.1.4 Une utilisation partielle des thèses dans l'historiographie . . . . .	47
1.2 Le corpus complet des thèses entre 1900 et 1914 . . . . .	50
1.3 Niveau un de l'analyse . . . . .	53
1.4 Les jurys et les rapports de thèses . . . . .	59
1.4.1 Les « patrons » mathématiques dans les jurys . . . . .	61
Les présidents de jury . . . . .	61
Les rapporteurs de thèse . . . . .	62
Les rapporteurs des thèses d'analyse . . . . .	64
Les rapporteurs des thèses d'astronomie . . . . .	64
Le rôle central de Picard . . . . .	65
1.4.2 Les rapports de thèse . . . . .	66
Une évaluation des travaux . . . . .	66
Une description des travaux . . . . .	68
Un exemple : les thèses de mécanique et de physique mathématique	70
1.5 Les thèses : un corpus pertinent . . . . .	73

<b>2 Les thèses mathématiques soutenues en France entre 1914 et 1945.</b>	
<b>Premier niveau d'analyse</b>	<b>75</b>
2.1 Une thèse d'État en sciences mathématiques : description. . . . .	76
2.1.1 Critères officiels . . . . .	76
2.1.2 Critères officieux . . . . .	79
2.2 Les bases de données . . . . .	83
2.2.1 Informations retenues . . . . .	83
2.2.2 Description matérielle des bases de données . . . . .	84
2.3 Méthodes de classement . . . . .	86
2.3.1 Brève présentation des répertoires utilisés. . . . .	86
2.3.2 Méthodes de classement . . . . .	88
Création des niveaux de mots-clés . . . . .	89
Classement des doctorats d'État . . . . .	94
2.4 Résultats du premier niveau d'analyse . . . . .	96
2.4.1 Analyse quantitative du nombre de doctorats . . . . .	97
2.4.2 Analyse quantitative des sujets . . . . .	99
2.4.3 Le cas de la faculté des sciences de Paris . . . . .	101
<b>3 Les facultés de province</b>	<b>105</b>
3.1 Les années 1920 : Strasbourg, un écho de Paris . . . . .	108
3.2 Les années 1930 : Poitiers . . . . .	115
3.2.1 Poitiers : le Göttingen français ? . . . . .	116
3.2.2 Georges Bouligand à Poitiers . . . . .	119
3.2.3 L'influence intellectuelle de Georges Bouligand : de Poitiers à Paris	122
3.3 D'autres pôles en province . . . . .	131
3.3.1 Lyon . . . . .	132
3.3.2 Montpellier . . . . .	135
<b>4 Les thèses en arithmétique/algèbre et en géométrie : le deuxième niveau de l'analyse</b>	<b>141</b>
4.1 Un point de méthode . . . . .	142
4.2 L'arithmétique et l'algèbre . . . . .	152
4.2.1 L'étude des formes . . . . .	153
4.2.2 La théorie des idéaux comme nouvelle théorie de référence . . .	158
4.2.3 Quelques doctorats difficiles à classer . . . . .	163
4.2.4 Les acteurs : doctorants et membres du jury . . . . .	167
4.3 La géométrie . . . . .	169
4.3.1 Les thèses de géométrie différentielle . . . . .	171
Des thèses de Darboux à Guichard . . . . .	172

Élie Cartan comme référence principale . . . . .	179
3 thèses sous l'influence de Bertrand Gambier . . . . .	195
Les autres thèses . . . . .	199
Doctorants . . . . .	202
Une périodisation . . . . .	203
4.3.2 Les thèses de géométrie algébrique : un ensemble dépareillé . . .	204
4.3.3 Les thèses de topologie . . . . .	213
L'étude des ensembles abstraits : la référence à Fréchet . . . . .	214
L'étude topologique des variétés . . . . .	218
4.3.4 Élie Cartan : le mathématicien influent en géométrie . . . . .	220
4.4 Conclusion générale . . . . .	223
<b>5 Les thèses en théorie des fonctions</b>	<b>225</b>
5.1 Des thèses sur des fonctions particulières : l'influence de Paul Appell . .	227
5.2 La théorie des fonctions de la variable réelle . . . . .	231
5.2.1 Étude des propriétés différentielles de fonctions : la référence à Paul Montel . . . . .	234
5.2.2 Classification de familles de fonctions . . . . .	238
5.2.3 Les séries trigonométriques . . . . .	243
5.3 La théorie des fonctions de la variable complexe . . . . .	251
5.3.1 Un bilan historiographique . . . . .	253
Les théorèmes de Picard et ses prolongements par Landau, Schottky, Nevanlinna et Montel . . . . .	257
Représentation conforme et surfaces de Riemann . . . . .	266
5.3.2 Un 3 <sup>ème</sup> niveau d'analyse appliqué à un ensemble de thèses . . .	270
À partir des théorèmes de Picard . . . . .	271
À partir du théorème de représentation conforme : la référence à Montel puis à Ahlfors . . . . .	289
Conclusion . . . . .	319
5.3.3 Les domaines de convergence de séries . . . . .	322
5.3.4 Une notion particulière de dérivée : à partir de Dimitri Pompeiu	328
5.3.5 Quelques inclassables . . . . .	331
5.4 Doctorants et membres de jury . . . . .	338
5.4.1 Les doctorants en théorie des fonctions . . . . .	338
5.4.2 Le rôle des membres de jury de thèse . . . . .	340
5.5 Les dynamiques de recherches en théorie des fonctions . . . . .	347

<b>6 Les thèses en calcul des probabilités (troisième niveau d'analyse)</b>	<b>349</b>
6.1 Le calcul des probabilités du début du XX <sup>ème</sup> siècle jusqu'à la fin des années 1930 : un bilan historiographique . . . . .	351
6.1.1 Du début du XX <sup>ème</sup> siècle jusqu'en 1920 . . . . .	352
6.1.2 Des années 1920 à 1928 . . . . .	356
6.1.3 De 1928 à la fin des années 1930 . . . . .	360
6.2 Une unique thèse dans l'immédiate après-guerre : une vision « borélienne » des probabilités, la thèse de Robert Deltheil . . . . .	367
6.3 Les autres thèses (1937-1945) . . . . .	376
6.3.1 La thèse de Daniel Dugué . . . . .	377
6.3.2 Deux thèses sur la théorie des probabilités en chaîne : celles de Wolfgang Doeblin et Robert Fortet . . . . .	381
La thèse de Wolfgang Doeblin . . . . .	383
La thèse de Fortet . . . . .	387
6.3.3 Michel Loève : une thèse influencée par les travaux de Paul Lévy	392
6.3.4 Le calcul des probabilités pour modéliser des phénomènes biologiques et physiques . . . . .	398
Le calcul des probabilités et la statistique appliqués à la modélisation de la théorie de l'hérédité. La thèse de Gustave Malécot . . . . .	398
Les probabilités pour modéliser des phénomènes physiques. La thèse d'André Blanc-Lapierre . . . . .	402
6.3.5 Une thèse sur le fondement des probabilités et la théorie des collectifs : Jean Ville . . . . .	408
6.4 Conclusion . . . . .	417
6.4.1 Relations entre mathématiciens et doctorants en probabilités à la fin des années 1930 . . . . .	417
6.4.2 Les doctorants en probabilités dans l'immédiate après-seconde-guerre mondiale . . . . .	420
<b>Conclusion</b>	<b>423</b>
<b>Appendices</b>	<b>431</b>
<b>A Présentation du corpus : un exemple de thèse et de rapport de thèse, celle d'Henri Cartan en 1928.</b>	<b>431</b>
A.1 Manuscrit de thèse . . . . .	431
A.2 Exemple de fichier de rapport de thèse : rapport de la thèse d'Henri Cartan	439

<b>B</b>	<b>Justifications pour la classification de certains doctorats non recensés</b>	
	<b>dans le <i>Jahrbuch</i></b>	<b>445</b>
B.1	Bratu . . . . .	445
B.2	Besserve . . . . .	445
B.3	Julia . . . . .	446
B.4	Egnell . . . . .	446
B.5	Haumé-Hérouard . . . . .	446
B.6	Lebel . . . . .	446
B.7	Jacques . . . . .	447
B.8	Schildrop . . . . .	447
B.9	Riabouchinski . . . . .	447
B.10	Beghin . . . . .	448
B.11	Lagrange . . . . .	448
B.12	Porchet . . . . .	448
B.13	Yamamoto . . . . .	448
B.14	Krebs . . . . .	449
B.15	Vasilescu . . . . .	449
B.16	Paloque . . . . .	449
B.17	Eyraud . . . . .	450
B.18	Long . . . . .	450
B.19	Jekhowski . . . . .	450
B.20	Nechvile . . . . .	451
B.21	Féraud . . . . .	451
B.22	Nicolescu . . . . .	451
B.23	Demtchenko . . . . .	452
B.24	Charrueau . . . . .	452
B.25	Ghika . . . . .	453
B.26	Brard . . . . .	453
B.27	Cioranescu . . . . .	453
B.28	Chandon . . . . .	453
B.29	Cholodenko . . . . .	454
B.30	Gay . . . . .	454
B.31	Callandreau . . . . .	455
B.32	Caratzénis . . . . .	455
B.33	Stoyko . . . . .	455
B.34	Meyer . . . . .	455
B.35	Murray . . . . .	456
B.36	Belorizky . . . . .	456
B.37	Racine Charles . . . . .	457

B.38 Woronetz . . . . .	457
B.39 Massé . . . . .	457
B.40 Tarrab . . . . .	458
B.41 Malécot . . . . .	458
B.42 Lefebvre . . . . .	458
B.43 Roure . . . . .	459
B.44 Cagniard . . . . .	459
B.45 Loeve . . . . .	460
B.46 Kourganoff . . . . .	460
B.47 Ferrand . . . . .	460
B.48 Bouffard . . . . .	461
B.49 Lévy, Jacques . . . . .	461
B.50 Sémirot . . . . .	461
B.51 d'Orgeval . . . . .	461
B.52 Costa de Beauregard . . . . .	462
B.53 Benneton . . . . .	462
B.54 Momet . . . . .	462
B.55 Eger . . . . .	463
B.56 Chatelet . . . . .	463
B.57 Oudart . . . . .	464
B.58 Maitre . . . . .	464
B.59 Bernier . . . . .	464
B.60 Genty . . . . .	465
B.61 Galvani . . . . .	465
B.62 Marrot . . . . .	465
B.63 Robin . . . . .	465
B.64 Décuyper . . . . .	466
B.65 Gauthier . . . . .	466
B.66 Roubaud-Valette . . . . .	466
B.67 Bonnet . . . . .	467
B.68 Mayot . . . . .	467
B.69 Blanc-Lapierre . . . . .	467
B.70 Lesieur . . . . .	467
B.71 Berthomieu . . . . .	468
B.72 Morel . . . . .	469
B.73 Galissot . . . . .	469
B.74 Courrier . . . . .	469
B.75 Charpentier . . . . .	469
B.76 Rambaud . . . . .	470

B.77 Grouyitch . . . . .	470
B.78 Tchou-Yun . . . . .	470
B.79 Brunold . . . . .	470
B.80 Liau . . . . .	471
B.81 Shih-Ky . . . . .	471
B.82 Bergeot . . . . .	471
B.83 (Taghi)' Bodagh . . . . .	471
B.84 Grouiller . . . . .	472
B.85 Youtévong . . . . .	472
B.86 Mao-Lin . . . . .	472
B.87 Lamson . . . . .	472
B.88 Mandel . . . . .	473
B.89 Cailliate . . . . .	473
B.90 Cazenave . . . . .	473
B.91 Braconnier . . . . .	474
<b>C Tableaux de l'analyse quantitative</b>	<b>475</b>
C.1 Évolution globale du nombre de thèses entre 1900 et 1945 . . . . .	475
C.1.1 Dans toute la France . . . . .	475
C.1.2 À Paris . . . . .	475
C.2 Évolution des sujets des thèses d'État entre 1900 et 1945 . . . . .	476
C.2.1 Pour toute la France . . . . .	476
C.2.2 Pour Paris . . . . .	477
C.3 Évolution du nombre de pages des doctorats . . . . .	477
<b>D Bibliographies de mathématiciens français, professeurs pendant l'entre-deux-guerres</b>	<b>479</b>
D.1 Bibliographies de Guichard et Gambier . . . . .	479
D.1.1 Publications de Claude Guichard . . . . .	479
D.1.2 Publications de Bertrand Gambier . . . . .	486
D.2 Bibliographies de Montel, Valiron, Denjoy . . . . .	499
D.2.1 Publications de Paul Montel . . . . .	499
D.2.2 Publications de Georges Valiron . . . . .	508
D.2.3 Publications d'Arnaud Denjoy . . . . .	518
<b>E Articles de calcul des probabilités dans le journal <i>Les Annales de l'Institut Henri Poincaré</i> de 1930 à 1945</b>	<b>527</b>
<b>F Mathématiciens chargés du Cours Peccot au Collège de France pendant l'entre-deux-guerres</b>	<b>529</b>



<b>Bibliographie</b>	<b>532</b>
----------------------	------------

# Table des figures

2.1	Évolution du nombre de doctorats soutenus en France entre 1900 et 1945	98
3.1	Dynamique de recherche à l'origine de Georges Bouligand . . . . .	130
6.1	Relations entre mathématiciens et doctorants français en probabilités à la fin des années 1930 . . . . .	420
A.1	Première page du manuscrit . . . . .	432
A.2	2 <sup>ème</sup> page du manuscrit . . . . .	433
A.3	3 <sup>ème</sup> page du manuscrit - Dédicace . . . . .	434
A.4	4 <sup>ème</sup> page du manuscrit - Début du mémoire . . . . .	435
A.5	Dernière page du texte du mémoire . . . . .	436
A.6	Dernière page du manuscrit - Titre des propositions de la Faculté . . .	437
A.7	Exemple de procès-verbal d'examen du doctorat d'État . . . . .	438
C.1	Évolution du nombre de doctorats d'Etat soutenus dans les universités françaises. . . . .	475
C.2	Évolution du nombre de doctorats d'Etat soutenus à la faculté des sciences de Paris . . . . .	476
C.3	Évolution des sujets des thèses d'État soutenues dans toutes les facultés françaises entre 1900 et 1945 . . . . .	476
C.4	Évolution des sujets des thèses d'État soutenues à la faculté des sciences de Paris entre 1900 et 1945 . . . . .	477
C.5	Évolution du nombre de pages des doctorats . . . . .	477



# Liste des tableaux

1.1	Sujets des thèses mathématiques entre 1900 et 1914 . . . . .	54
1.2	Nombre de thèses soutenues à Paris et en province entre 1900 et 1914 .	55
1.3	Thèses d'analyse à Paris entre 1900 et 1914 . . . . .	56
1.4	Thèses de mathématiques appliquées à Paris entre 1900 et 1914 . . . .	57
1.5	Présidents des jurys des thèses de la Sorbonne entre 1900 et 1914 . . .	61
1.6	Rapporteurs des jurys des thèses de la Sorbonne entre 1900 et 1914 . .	62
2.1	Évolution des sujets des thèses de sciences mathématiques entre 1914 et 1945 . . . . .	100
2.2	Évolution des sujets des thèses de sciences mathématiques soutenues à Paris entre 1914 et 1945 . . . . .	102
3.1	Nombre de thèses soutenues dans les facultés des sciences de province et à Paris entre 1914 et 1945 . . . . .	107
4.1	Évolution des thématiques des thèses de géométrie à Paris entre 1914 et 1945 . . . . .	169
F.1	Liste des chargés du cours Peccot au Collège de France entre 1914 et 1945. . . . .	531



# Introduction

## Sommaire

0.1	Images de l'entre-deux-guerres mathématique . . . . .	21
0.2	Une mémoire collective . . . . .	23
0.3	Un nouveau corpus : les doctorats de sciences mathématiques . . . . .	27
0.4	Le principe de la variation d'échelles . . . . .	30
0.5	Plan de la thèse . . . . .	37

L'objectif du travail présenté ici est d'étudier l'ensemble des thèses de mathématiques soutenues en France dans l'entre-deux-guerres. Jusqu'à récemment, l'histoire des mathématiques de l'entre-deux-guerres restait très peu étudiée. Ce n'est que depuis la fin des années 1980 et le début des années 1990 que, de façon à peu près simultanée, plusieurs histoires de cette période se sont constituées ; écrites par des groupes différents, mettant l'accent sur des sujets distincts, elles offrent des images partielles et parfois contradictoires de l'évolution des mathématiques.

## 0.1 Images de l'entre-deux-guerres mathématique

La première image procède de la constitution d'une « mémoire collective », processus sur lequel la section suivante reviendra ; elle se distingue en ce qu'elle provient de témoignages écrits ou oraux, directs ou indirects, des acteurs mêmes de l'entre-deux-guerres, des mathématiciens qui ont commencé leurs études ou leur travail scientifique au cours de cette période. Il est remarquable que ces grands témoins soient presque exclusivement des membres du groupe Bourbaki, dont plusieurs biographies ou autobiographies ont été publiées dans les années 1990 : celles d'André Weil, WEIL 1991, de Jean Dieudonné, DUGAC 1995, de Laurent Schwartz, SCHWARTZ 1997, par exemple ; à celles-ci, on peut ajouter les souvenirs oraux exprimés dans plusieurs interviews ou éparpillés dans d'autres textes<sup>1</sup>. Dans l'image que ces mathématiciens donnent du milieu mathématique de l'entre-deux-guerres, la recherche en France apparaît décimée

---

1. Par exemple l'interview d'Henri Cartan, JACKSON 1999, ou de Claude Chevalley, GUEJ 1985. On peut aussi évoquer par exemple les remarques de Roger Godement dans GODEMENT 2002, p. 148-158. Ce dernier ne peut cependant pas être considéré comme l'un des acteurs à part entière de

par la première guerre mondiale, peu au fait des innovations prometteuses développées hors de ses frontières ; les générations commençant leurs activités mathématiques dans l'entre-deux-guerres, se sont éduquées seules, sans guides. Cette image reflète aussi les priorités disciplinaires de ces acteurs du monde mathématique, elle concerne surtout les mathématiques pures et les domaines correspondants (essentiellement l'algèbre, la géométrie différentielle et algébrique, les variétés analytiques)<sup>2</sup>.

Dans la dernière décennie du XX<sup>ème</sup> siècle ont commencé également à paraître des travaux écrits par des historiens. Contrairement aux récits précédents, la majeure partie d'entre eux concernent les mathématiques appliquées<sup>3</sup>. Bernard Bru a publié ainsi plusieurs articles sur le domaine des probabilités, évoquant notamment son évolution et son émergence pendant la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle<sup>4</sup>. Pendant l'entre-deux-guerres le statut des probabilités par rapport aux mathématiques pures est ambigu comme je le montrerai dans le dernier chapitre de la présente thèse. Dans l'entre-deux-guerres ce domaine a été un temps classé par le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (répertoire bibliographique que je présenterai ultérieurement) comme une section de l'analyse, mais l'historiographie de l'entre-deux-guerres à laquelle je me réfère ici montre en revanche qu'il n'est pas considéré en France comme une branche des mathématiques pures. C'est pourquoi, je le considère ici comme un domaine des mathématiques appliquées. On peut aussi citer le travail de Reinhard Siegmund-Schultze sur Maurice Fréchet, « Maurice Fréchet à Strasbourg, Les mathématiques entre nationalisme et internationalisme, entre application et abstraction », SIEGMUND-SCHULTZE 2005, l'édition de la correspondance entre Paul Lévy et Maurice Fréchet, BARBUT ET AL. 2004 et l'article de Michel Armatte, ARMATTE 2001. Pierre-Éric Mounier-Kuhn a tracé pour sa part l'histoire de l'informatique<sup>5</sup> en France, ainsi que celle de la mécanique des fluides dans l'article MOUNIER-KUHN 1996 du rapport final du programme « Villes et institutions scientifiques » dirigé par André Grelon et Michel Grossetti<sup>6</sup>. L'étude de la formation des ingénieurs (comme BIRCK et GRE-

---

l'entre-deux-guerres. Ayant soutenu sa thèse en 1946, ce n'est qu'en tant qu'étudiant et doctorant qu'il a côtoyé ce milieu mathématique à la fin de la période et pendant la seconde guerre mondiale.

2. J'utilise ici le terme « mathématiques pures » dans le sens défini notamment par Amy Dahan pour le XX<sup>ème</sup> siècle dans DAHAN-DALMEDICO 1999, p. 34-35. Ce sens découle de l'image des mathématiques qui s'est imposée à la suite de Hilbert et de ses 23 problèmes.

3. Une exception notable est le travail de Liliane Beaulieu sur le groupe Bourbaki lui-même et sur son histoire (cf. par exemple BEAULIEU 1990, 1993, 1998, 1999), dans lequel elle propose une analyse critique de la formation et du fonctionnement intellectuel et institutionnel du groupe.

4. Cf. par exemple BRU 1992, 1999b; BRU ET AL. 1999 et plus récemment BRU 2002, 2003. . .

5. Cf. notamment sa thèse MOUNIER-KUHN 1999.

6. On peut également citer sur le sujet de l'aéronautique l'ouvrage d'Emmanuel Chadeau, 1987, *L'industrie aéronautique en France, 1900-1950*, Paris : Fayard. L'histoire de la mécanique des fluides et également de l'aéronautique a depuis ces premières publications connu un certain essor, voir en particulier FONTANON et FRANCK 2005.

LON 1998<sup>7</sup>), de la formation dans les grandes écoles (celle de l'École polytechnique dans BELHOSTE ET AL. 1994, 1995 ou celle des « Telecoms » dans ATTEN ET AL. 1999<sup>8</sup>) a également été l'occasion d'examiner le développement de certains domaines appliqués et des débats auxquels il donne lieu dans l'entre-deux-guerres. D'autres institutions qui voient quant à elles le jour pendant cette période ont aussi fait l'objet de travaux particuliers. Reinhard Siegmund-Schultze a abordé dans SIEGMUND-SCHULTZE 2001 la création de l'Institut Henri Poincaré, création qui change le panorama institutionnel des mathématiques en France. Les *Cahiers pour l'histoire du CNRS*, parus de 1988 à 1991, à l'occasion du cinquantième de la création du CNRS, le 19 octobre 1939 ont été relayés depuis 1999 par *La Revue pour l'histoire du CNRS*, organe du Comité pour l'histoire du CNRS. Des articles y décrivent en particulier les différentes étapes qui ont amené à la création de cette institution à la fin de l'entre-deux-guerres<sup>9</sup>. Jean-François Picard a publié également en 1990 un ouvrage de synthèse sur le sujet, PICARD 1990.

## 0.2 Une mémoire collective

Parmi les images de l'entre-deux-guerres mises en évidence, la première se distingue en ce qu'elle est construite *a posteriori* à partir de souvenirs et d'opinions d'acteurs du milieu mathématique de la période. Cette histoire particulière constitue alors ce qu'Halbwachs désigne comme une « mémoire collective », plus particulièrement ici une mémoire développée autour du groupe Bourbaki<sup>10</sup>. Elle est alors dépendante d'une interprétation du passé et d'une reconstruction des souvenirs propre au groupe.

En effet, comme l'explique Maurice Halbwachs à la fois dans les *Cadres sociaux de la mémoire* mais également dans la *Mémoire collective* : « le souvenir est dans une très large mesure une reconstruction du passé à l'aide de données empruntées au présent, et préparée d'ailleurs par d'autres reconstructions faites à des époques antérieures et d'où l'image d'autrefois est sortie déjà bien altérée »<sup>11</sup>. Les récits de membres de ce groupe de mathématiciens relatent *a posteriori* des souvenirs reconstruits à l'aide des

---

7. Parmi les auteurs de ce livre figure notamment Pierre-Éric Mounier-Kuhn pour le chapitre « L'enseignement supérieur, la recherche mathématique et la construction de calculateurs en France (1920-1970) », cf. MOUNIER-KUHN 1998. La formation des ingénieurs électriciens a fait aussi l'objet d'un ouvrage plus récent, BIRCK et GRELON 2006.

8. Cf. également DAY 1991 pour les écoles d'arts et métiers.

9. Parmi les articles concernant la création du CNRS, on peut citer PICARD et PRADOURA 1988; PROST 1988; ZALLEN 1989, ainsi que PICARD 1999.

10. Dans ce paragraphe, je me fonde davantage sur la sociologie de la mémoire qu'Halbwachs propose dans *La mémoire collective*, oeuvre inachevée de l'auteur et republiée récemment par Gérard Nammer dans HALBWACHS 1997, qui va plus loin et propose surtout une conception renouvelée de la mémoire collective, mémoire liée aux notions d'espace et de temps, par rapport à celle des *Cadres sociaux de la mémoire* de 1925, HALBWACHS 1994. Pour une analyse comparée des deux conceptions d'Halbwachs et de leur renouvellement, voir les articles de Marie Jaisson comme JAISSON 1999 et JAISSON 2007, ainsi que la postface écrite par Gérard Nammer dans HALBWACHS 1997, p. 237-295.

11. Cf. HALBWACHS 1997, p. 118-119.



différents événements de la vie personnelle et de la carrière scientifique de chacun des auteurs<sup>12</sup>. Les récits sont en effet individuels et intègrent une partie de la subjectivité de leur auteur.

Maurice Halbwachs, analysant les relations entre mémoire individuelle et mémoire collective<sup>13</sup>, explicite deux conditions nécessaires et suffisantes à leur interaction. La première est celle de l'imperfection (l'imprécision ou le vague) des souvenirs de l'individu, ces ombres étant en partie « éclairées » et complétées par les souvenirs du groupe ; la seconde est celle de l'intersection non vide entre les souvenirs du groupe et de l'individu<sup>14</sup>. En outre, Halbwachs précise comment la mémoire collective d'un groupe est en partie constituée par la mise en commun des mémoires individuelles de ses membres. L'interaction réciproque entre mémoire individuelle et mémoire collective, telle qu'elle est expliquée par Halbwachs, s'inscrit dans un temps donné et un espace donné. À l'aune de cette sociologie de la mémoire se trouve confirmé et explicité le processus de construction de la mémoire collective des premières générations de Bourbaki. Il forme un groupe uni de mathématiciens, aux parcours proches dans le milieu académique français, normaliens, doctorants puis chargés de cours et le plus souvent professeurs<sup>15</sup>.

Il est alors intéressant de souligner la période où paraissent presque simultanément les biographies et autobiographies des membres de ce groupe : les dernières décennies du XX<sup>ème</sup> siècle et les premières années du XXI<sup>ème</sup> siècle, c'est-à-dire une période où la disparition des membres du groupe prive progressivement la mémoire de celui-ci de support vif<sup>16</sup> :

---

12. Signalons par ailleurs que Caroline Ehrhardt dans sa thèse propose une analyse de ce phénomène de reconstruction des souvenirs en s'intéressant plus particulièrement au personnage d'Evariste Galois. Analysant la réception des travaux de Galois à l'Académie des sciences à la lumière des pratiques de fonctionnement de cette institution, elle montre tout ce que le sort qui leur a été réservé a de banal pour des recherches entreprises par un jeune mathématicien sur un thème qui, à l'époque, n'est pas en vogue. Caroline Ehrhardt montre également qu'en 1831, un an avant la mort de Galois, celui-ci est en passe d'être intégré, en tant que mathématicien, au milieu scientifique parisien. Pourtant Evariste Galois ne voit pas les choses de cette façon et reconstruit les événements, persuadé que l'Institut le tient volontairement à l'écart et que le système scolaire ne reconnaît pas sa vraie valeur, EHRHARDT 2007, p. 176-177.

13. Cf. notamment le chapitre « Mémoire collective et mémoire historique » de HALBWACHS 1997 et p.123.

14. Halbwachs, parlant à la première personne du singulier écrit alors, HALBWACHS 1997, p. 123 :

« Cela suppose, il est vrai une double condition : d'une part que mes souvenirs eux-mêmes, tels qu'ils étaient avant que je n'entre dans ces groupes, ne fussent pas également éclairés sur toutes les faces comme si, jusqu'ici, nous ne les avions pas entièrement aperçus et compris ; d'autre part, que les souvenirs de ces groupes ne soient pas sans rapport avec les événements qui constituent mon passé ».

15. Comme par exemple Henri Cartan et Jean Dieudonné.

16. On peut aussi mentionner l'intervention de Marc Olivier Baruch, à l'occasion du colloque « Expériences et mémoire : partager en français la diversité du monde », de Bucarest en septembre 2006, et son analyse de la représentation « dans la mémoire collective et savante » de la période entre 1930 et 1950, cf. BARUCH 2006.

« C'est qu'en général l'histoire ne commence qu'au point où finit la tradition, au moment où s'éteint ou se décompose la mémoire sociale. Tant qu'un souvenir subsiste, il est inutile de la fixer par écrit, ni même de la fixer purement et simplement. Aussi le besoin d'écrire l'histoire d'une période, d'une société, et même d'une personne ne s'éveille-t-il que lorsqu'elles sont déjà trop éloignées dans le passé pour qu'on ait chance de trouver longtemps encore autour de soi beaucoup de témoins qui en conservent quelque souvenir. Quand la mémoire d'une suite d'événements n'a plus pour support un groupe, celui-là même qui y fut mêlé ou qui en subit les conséquences, qui y assista ou en reçut un récit vivant des premiers acteurs et spectateurs, quand elle se disperse dans quelques esprits individuels, perdus dans des sociétés nouvelles que ces faits n'intéressent plus parce qu'ils leur sont décidément extérieurs, alors le seul moyen de sauver de tels souvenirs, c'est de les fixer par écrit en une narration suivie puisque, tandis que les paroles et les pensées meurent, les écrits restent<sup>17</sup>. »

La parution simultanée d'ouvrages des « premiers acteurs et spectateurs » de la période peut ainsi être vue comme répondant à un besoin de « fixer par écrit » leur mémoire d'une suite d'événements vécus par le groupe. Or, le groupe Bourbaki a une histoire et une situation particulière dans le milieu mathématique académique, notamment dans son rapport à la « mise en mémoire » de ses propres travaux de ses événements fondateurs. Le terme « mise en mémoire » a été utilisé par Pnina Abir-Am dans son ouvrage *La mise en mémoire de la science. Pour une ethnographie historique des rites commémoratifs*<sup>18</sup>. Elle y insiste sur le rôle des rites commémoratifs dans la construction de la mémoire des disciplines et présente les lieux et les pratiques institutionnels de commémoration. Pnina Abir-Am évoque également l'utilisation sociale et politique des commémorations<sup>19</sup>. Sur ce point, Liliane Beaulieu analyse dans le chapitre consacré aux *Jeux d'esprit et jeux de mémoire chez N. Bourbaki*<sup>20</sup> les pratiques du groupe Bourbaki, qui se distinguent de celles des jubilés et autres hommages traditionnels du milieu mathématique français de l'entre-deux-guerres et également de ceux de la période après la seconde guerre mondiale<sup>21</sup>. Certains membres de Bourbaki participent certes à ce type de jubilé ou hommage mais à titre individuel<sup>22</sup>. D'après Liliane Beaulieu, à titre collectif, les membres du groupe n'affichent que mépris pour ces « honneurs,

---

17. Cf. HALBWACHS 1997, p. 130.

18. Cf. ABIR-AM 1998.

19. Cf. l'introduction de l'ouvrage ABIR-AM 1998 écrite par Pnina Abir-Am.

20. Cf. BEAULIEU 1998. Une partie des arguments est reprise et retravaillée également dans un autre article de Liliane Beaulieu : BEAULIEU 1999.

21. Les jubilés de Paul Montel, Elie Cartan, Henri Villat, Gaston Julia... datent ainsi de l'après seconde guerre mondiale.

22. Par exemple, Jean Dieudonné prononce un long discours à l'occasion du *Jubilé scientifique de Paul Montel*, Paris : Gauthier-Villars, 1947.

célébrations et [...] autres cérémonies qui servent habituellement à marquer la consécration officielle dans les milieux scientifiques et à édifier les générations d'héritiers »<sup>23</sup>. Ils introduisent de nouvelles pratiques qui leur sont propres, fondées sur le secret, les jeux d'esprits ainsi que sur une chronique publiée dans le bulletin interne *la Tribu*. Ils se distinguent ainsi des commémorations publiques traditionnelles et se positionnent en décalage d'un milieu mathématique représentant leur passé commun au moyen d'un langage qui leur est propre et qui souligne leur appartenance à un groupe particulier. Les souvenirs, la représentation de ces souvenirs et donc leur reconstruction sont ainsi intégrés au fonctionnement même de ce groupe. Une distance apparaît alors entre le vécu authentique des activités du groupe Bourbaki et le récit qui en est fait à l'aide de jeux de mots et de jeux d'esprit. Liliane Beaulieu met particulièrement en valeur ce dernier aspect. Elle montre notamment comment le présent proche est reconstruit pour laisser une image idéalisée du groupe.

Dans BEAULIEU 1998, Liliane Beaulieu se concentre essentiellement sur les récits que fait le groupe Bourbaki de son fonctionnement après la seconde guerre mondiale, au moment où il occupe une position dominante sur le milieu mathématique. Son analyse critique de ces récits incite à réévaluer les récits de jeunesse de ses membres et leurs récits de l'entre-deux-guerres et donc à prendre une certaine distance avec leurs écrits et témoignages ainsi qu'avec les ouvrages qui se fondent sur leurs récits<sup>24</sup>.

L'historiographie actuelle sur l'entre-deux-guerres souffre donc de deux manques. Tout d'abord, comme je l'ai indiqué plus haut, les images disponibles en sont fragmentées. Les mathématiques pures et les mathématiques appliquées sont décrites par des historiographies distinctes, la première laissant dans l'ombre la seconde. Une nouvelle étude de l'entre-deux-guerres nécessite donc une approche globale, sans morcellements, qui n'impose pas de filtres *a priori* sur les domaines qui composent les sciences mathématiques. Cette approche globale est rendue d'autant plus nécessaire que des études récentes ont montré que l'image produite par l'historiographie du groupe Bourbaki sur le milieu mathématique était incomplète<sup>25</sup>. Des pans importants, au moins quantitativement, des sciences mathématiques, la géométrie, les probabilités, la mécanique des fluides, etc., ont été mis de côté. En outre les méthodes même de construction de l'historiographie des Bourbaki posent question par leur dépendance aux souvenirs de certains acteurs de l'entre-deux-guerres. Une nouvelle approche des mathématiques

---

23. Cf. BEAULIEU 1998, p. 78.

24. Comme par exemple le livre de Michèle Chouhan : *Nicolas Bourbaki. Faits et légendes*, CHOUHAN 1995.

25. Cf. notamment mon mémoire de DEA, LELOUP 2004, « Les dynamiques de recherche mathématique de l'entre-deux-guerres à partir de l'étude des thèses mathématiques soutenues en France » (EHESS, 2004). Signalons que Liliane Beaulieu dans son travail de thèse pionnier, BEAULIEU 1990, indiquait déjà de telles conclusions. D'autres projets de recherche actuels étudient également avec une nouvelle approche le milieu mathématique et réévalue cette image. Je les mentionnerai à la fin de mon introduction.

françaises de l'entre-deux-guerres nécessite alors de ne plus utiliser exclusivement ni des témoignages directs ou rapportés ni des souvenirs écrits.

### 0.3 Un nouveau corpus : les doctorats de sciences mathématiques

Pour répondre à ces enjeux et mettre en oeuvre une nouvelle approche du milieu mathématique de l'entre-deux-guerres, je me suis fondée sur l'étude du corpus des 242 doctorats d'État en sciences mathématiques soutenus en France entre 1914 et 1945. L'objet doctorat a déjà été étudié en histoire des mathématiques. Nicole Hulin dans HULIN 1995, 1990 s'y est intéressée dans le cadre plus général des sciences (sciences mathématiques, sciences physiques et sciences naturelles). Elle a également étudié, avec Bénédicte Bilodeau, les premiers doctorats féminins soutenus à la faculté des sciences de Paris dans BILODEAU et HULIN 1997. Hélène Gispert dans GISPERT 1991 a considéré des thèses de sciences mathématiques comme corpus d'analyse, mais avec le filtrage institutionnel de la Société mathématique de France. Dans GISPERT 1995a, les thèses considérées sont celles d'un petit nombre de mathématiciens (Baire, Borel, Lebesgue ...) : ceux qui y étudiaient et introduisaient des notions de théorie des ensembles. Dans la présente thèse, je considère l'ensemble des doctorats soutenus dans une période donnée, sans filtrage *a priori*.

Ce corpus a plusieurs avantages : outre l'homogénéité de ce corpus, la richesse de l'objet thèse, qui offre plusieurs composantes, permet de considérer non seulement les domaines mathématiques mais également les mathématiciens actifs de ces domaines et leur rôle dans les institutions à partir de données indépendantes de témoignages *a posteriori* des acteurs de la période.

La première composante d'un doctorat d'État est bien sûr le mémoire lui-même, que doit écrire le doctorant à la suite de plusieurs années de recherche<sup>26</sup>. En général, il est précédé d'une ou plusieurs *Notes* aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Il est parfois publié dans un journal de recherche mathématique<sup>27</sup>. Il s'agit donc d'une production mathématique de recherche et en général de la première production d'importance d'un étudiant qui vient de terminer sa formation, validée par l'obtention de trois certificats de licence<sup>28</sup>. En outre, le mémoire contient la plupart du temps une

---

26. Les doctorats de sciences ont déjà fait l'objet de quelques études (HULIN 1995, 1990, GISPERT 1995b) qui regardent son statut et sa transformation au cours du XIX<sup>ème</sup> siècle. L'objet thèse restant stable de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle à la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle, ma description se fonde en partie sur ces textes.

27. Comme par exemple : les *Annales de l'École normale supérieure*, le *Journal des mathématiques pures et appliquées*, *Acta mathematica*, les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, etc.

28. La forme du doctorat, sa présentation ainsi que les conditions pour soutenir un doctorat restent stables tout au long de l'entre-deux-guerres.

introduction, un avant-propos ou une préface selon les cas, où le doctorant présente le sujet qu'il étudie, les problèmes qu'il cherche à résoudre, les principaux résultats qu'il obtient, ainsi que les méthodes utilisées et les références dont il se réclame. Il cite parfois explicitement les mathématiciens dont il reprend les travaux et accompagne dans certains cas son mémoire d'une bibliographie, séparée du corps du texte.

En ce qui concerne le sujet du mémoire, il n'est pas restreint *a priori* à certains domaines particuliers des sciences mathématiques. La seule condition qu'il doit remplir est celle de traiter un sujet en sciences mathématiques : en mathématiques pures (comme l'arithmétique et l'algèbre, la géométrie, l'analyse) ou mathématiques appliquées (mécanique, physique mathématique, astronomie, géodésie)<sup>29</sup>. Dans l'entre-deux-guerres, le choix du sujet est dans la majorité des cas de l'initiative personnelle de l'étudiant qui doit en décider seul.

Ce choix ainsi que les pratiques mathématiques du doctorant, les méthodes de raisonnement qu'il utilise et auxquelles il se réfère, sont conditionnés par sa formation mathématique récente et par les cours qu'il a suivis. Il est raisonnable de supposer que le doctorant ne peut entièrement s'en dégager dans l'écriture de son mémoire, même si, depuis ces cours, il a été en contact avec d'autres pratiques mathématiques par la lecture d'ouvrages écrits par d'autres mathématiciens. Par les conditions de son élaboration, la thèse d'État apparaît ainsi comme une production mathématique à même de révéler certaines pratiques mathématiques du domaine étudié par le doctorant considéré<sup>30</sup>.

Un doctorat d'État ne se réduit pas à l'écriture d'un mémoire. Pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques, l'étudiant doit passer par un processus de validation. Pour franchir la première étape de ce processus, le mémoire doit être lu par un membre enseignant de la faculté des sciences. Ce dernier doit écrire un rapport sur le mémoire où il précise si la thèse « est jugée digne d'être acceptée par la faculté des sciences ». Une fois que le rapporteur de la thèse a émis un avis favorable, le doctorant doit ensuite présenter les résultats de son travail de recherche devant un jury constitué d'au moins trois mathématiciens membres de l'enseignement supérieur français<sup>31</sup>. Devant ce jury, il doit en outre répondre à des « questions posées par la

---

29. Aucune condition n'impose l'exclusivité d'un de ces sous-domaines. Certaines thèses, notamment en analyse, sont par exemple composées d'une partie théorique sur des questions d'analyse (par exemple le calcul de certaines séries) et d'une autre partie où les résultats théoriques obtenus sont appliqués à d'autres domaines, comme celui de la physique mathématique.

30. Je préfère ici évoquer les pratiques mathématiques d'un milieu ou d'un domaine, plutôt que la notion plus complexe d'« habitus », telle que la définit notamment Pierre Bourdieu dans *Questions de sociologie*, BOURDIEU 2006, p. 134-135. En effet, Pierre Bourdieu définit l'habitus comme un « produit des conditionnements qui tend à reproduire la logique objective des conditionnements mais en lui faisant subir une transformation ». Analyser l'habitus des doctorants en sciences mathématiques reviendrait ainsi à d'abord analyser les schèmes générateurs de pratiques mathématiques et les schèmes de perception des pratiques mathématiques puis leurs transformations par le doctorant.

31. Je reviendrai plus précisément dans le deuxième chapitre de la présente thèse sur les conditions que doivent remplir les membres d'un jury de thèse. Pour résumer, un jury est essentiellement constitué des professeurs ou chargés de cours de la faculté où est présenté le doctorat.

faculté des sciences ». Ce n'est qu'à la suite de cette soutenance (qui donne lieu à un rapport) que le jury décide d'accorder le grade de docteur ès sciences.

L'objet thèse est donc constitué du mémoire écrit par le doctorant, où se distinguent une introduction et parfois une bibliographie, des rapports relatifs au processus de validation et également un jury qui participe à ce processus. Les rapports et la connaissance du jury (et notamment du rapporteur) constituent des sources dont l'exploitation est riche d'informations. Les rapports permettent d'avoir un compte-rendu d'une lecture contextualisée des travaux des doctorants. Cette lecture est en outre fondée sur une matrice interprétative des résultats et recherches des doctorants datant de la période d'élaboration du travail et propre aux rapporteurs. En effet, ce sont des mathématiciens professionnels en activité au moment de la soutenance qui analysent le mémoire selon le filtre de leur propre recherche, de leur propre connaissance des travaux mathématiques de l'époque. Étudier les rapports de thèse et les comparer avec les introductions des mémoires correspondants est alors un moyen d'appréhender les conditions et le contexte d'écriture de ces travaux. La connaissance de ce contexte rend possible dans certains cas l'identification de filtres de mon récit historique des dynamiques de la recherche mathématique académique de l'entre-deux-guerres<sup>32</sup>.

Par la richesse de l'objet thèse considéré dans sa complexité, le corpus des doctorats d'État répond aux exigences formulées précédemment nécessaires à une nouvelle étude de l'entre-deux-guerres. Il permet une approche globale du milieu des sciences mathématiques et de ses domaines, sans filtrage a priori de domaines ou de sources. Il fait le lien avec les institutions par les jurys. Il s'agit d'un corpus homogène, constitué d'un ensemble d'objets de même nature. Chaque objet considéré par rapport aux autres est cependant unique : les sujets choisis par les doctorants sont variés, chacun d'entre eux a son propre style, sa propre culture mathématique, les rapporteurs et les membres de jurys diffèrent suivant les domaines et les périodes de l'entre-deux-guerres. De plus, chaque rapporteur a sa propre façon de rédiger des rapports sur les mémoires. Le doctorat permet donc d'appréhender différents aspects du milieu mathématique. Il permet enfin de saisir l'évolution du domaine liée aux changements de générations des membres du milieu. Soutenir une thèse représente en effet une étape du passage du

---

32. Ces notions de filtres de lecture et de contextualisation des lectures sont abordées par Catherine Goldstein dans GOLDSTEIN 1995. Analysant les relectures historiennes d'un cas particulier du « grand » théorème de Fermat, Catherine Goldstein montre que l'écriture de l'histoire des mathématiques n'est pas un processus neutre. Toute lecture (historienne ou mathématicienne) est contextualisée, ne serait-ce que, de manière implicite, par les acquis préalables du lecteur ou de la lectrice. La construction d'un récit historique par un historien repose sur un double filtrage : il sélectionne et lit un ensemble de textes mathématiques (premier filtre, lié aux priorités et approches de cet historien) ; ceux-ci se réfèrent sélectivement les uns aux autres, en reprenant des bribes, y injectant d'autres connaissances (second filtre lié aux priorités et approches des auteurs de ces textes). Pour ma lecture des thèses de sciences mathématiques, mon premier filtre est lié à mon choix de corpus, mon second repose sur le contexte d'élaboration de ces travaux par les doctorants, sur les ouvrages auxquels ils se réfèrent, qu'ils ont lus, qu'il connaissent...

statut d'étudiant à celui de mathématicien confirmé et reconnu par ses pairs, qui peut prétendre à une carrière dans l'enseignement supérieur français<sup>33</sup>.

## 0.4 Le principe de la variation d'échelles

Les sciences mathématiques françaises de l'entre-deux-guerres sont composées de plusieurs domaines. Les décrire à travers l'étude des thèses d'État nécessite tout d'abord d'expliquer à quoi ces domaines correspondent et comment ils sont constitués afin d'être en mesure de classer chaque thèse à l'intérieur d'un des domaines caractérisés (voire de l'une de ses subdivisions).

Dans la présente thèse, la construction de ces domaines est fondée sur l'organisation des sections du répertoire bibliographique, le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. En regardant l'évolution de la structuration du répertoire durant l'entre-deux-guerres, j'ai opéré des regroupements et créé des mots-clés de plusieurs niveaux afin de constituer des domaines et des sous-domaines restant stables au cours de la période. Le premier niveau correspond au niveau de titre des chapitres composant le *Jahrbuch*. J'ai donc construit six domaines correspondants à six mots-clés de premier niveau : l'« arithmétique et l'algèbre », la « géométrie », l'« analyse », les « mathématiques appliquées », la « théorie des ensembles » et le « calcul des probabilités ». Chacun d'entre eux est ensuite subdivisé ou non en sous-domaines auxquels correspondent un deuxième (voire un troisième) niveau de mots-clés correspondant aux sections (resp. aux sous-sections) composant les chapitres (resp. les sections) du répertoire.

Il n'est cependant pas évident de saisir la réalité de structuration que recouvrent ces mots-clés. En effet, il n'existe pas réellement de concept pour décrire ce qu'ils sont. Le classement et la construction de ces domaines ne sont pas triviaux. On ne peut pas lui superposer une réalité sociale. Il ne peut donc s'agir de champs ou de sous-champs des sciences mathématiques françaises dans le sens que donne Bourdieu à ce terme<sup>34</sup> ni de discipline dans le sens de Kuhn<sup>35</sup>. Il apparaît possible en revanche d'appréhender la réalité des sujets que recouvrent ces différents domaines en utilisant le principe de la variation d'échelles.

---

33. Comme l'explique Caroline Ehrhardt dans sa thèse, EHRHARDT 2007, p. 163, « le passage du statut d'étudiant prometteur à celui de mathématicien confirmé est un processus complexe pour lequel un unique travail de recherche ne suffit pas et ne repose d'ailleurs pas exclusivement sur des critères mathématiques ». Cette constatation que Caroline Ehrhardt dresse pour un étudiant du XIX<sup>ème</sup> siècle reste encore vrai au XX<sup>ème</sup> siècle, c'est pourquoi la soutenance d'une thèse en sciences mathématiques ne représente qu'une étape et non l'étape unique de passage d'un statut à un autre.

34. Cf. notamment le chapitre « Quelques propriétés des champs » dans BOURDIEU 2006.

35. Kuhn désigne sous le terme « discipline » (cf. KUHN 1983, p. 241-242) une communauté scientifique dont les contours sont délimités par l'existence d'un ou plusieurs paradigmes, par une circulation de manuscrits et par des réseaux de correspondance.

Ce principe de variation d'échelles a été théorisé en histoire et notamment dans le cadre de la micro-histoire. Pour reprendre la métaphore de Jacques Revel dans REVEL 1996b, p. 10, il s'agit de « changer la focale de l'objectif en grossissant l'objet de l'observation » au cours de l'analyse. Ce principe avait pour but de « lire en termes différents » des phénomènes massifs, habituellement pensés en termes globaux, en les appréhendant à une plus petite échelle<sup>36</sup>. L'objectif est ainsi de prendre en compte la « structure feuilletée » de l'objet global ainsi étudié<sup>37</sup>, de faire apparaître des phénomènes nouveaux suivant la focale choisie.

La démarche de Jacques Revel, Alban Bensa et Bernard Lepetit (qui est celle que j'adopte) pose pour principe qu'aucune échelle de l'analyse n'a de privilèges sur une autre et que leur mise en regard permet un fort « bénéfice analytique »<sup>38</sup>.

Cette démarche a déjà été utilisée dans le cadre de travaux en histoire des mathématiques. Sébastien Gauthier dans sa thèse *La géométrie des nombres comme discipline (1890-1945)* a montré comment le principe de variation d'échelles permet de rendre compte des continuités et discontinuités dans l'image et le contenu de la géométrie des nombres. Il se fonde sur l'étude de différents corpus à différents niveaux d'analyse. Son premier niveau est celui qui permet d'étudier les continuités et discontinuités globales du domaine. Il relève quantitativement les travaux publiés en géométrie des nombres et recensés dans le *Jahrbuch*. Il croise ce relevé avec d'autres sources telles que les livres sur la géométrie des nombres et l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* afin de mettre en évidence certaines continuités ou discontinuités suivant la source utilisée, ainsi que des contributions particulières de certains mathématiciens en géométrie des nombres. Son deuxième niveau est celui de l'étude des réseaux de citations dans l'analyse des discours, commentaires et textes de mathématiciens. Il permet à Sébastien Gauthier de révéler certaines interactions entre scientifiques, de repérer certains textes considérés par les acteurs comme plus importants que les autres, de faire ressortir plusieurs traditions de recherche pour un même thème en géométrie des nombres. Son dernier niveau est celui de la « pratique individuelle de l'activité mathématique », des mathématiques qui sont produites. Il étudie alors les textes, les méthodes employées les résultats démontrés ainsi que leurs énoncés<sup>39</sup>. Il montre comment se caractérise

---

36. Cf. REVEL 1996b, p. 12. Jacques Revel évoque comme moyen d'appréhender des phénomènes massifs comme la croissance d'un État ou la formation d'une société industrielle l'étude de stratégies individuelles, de trajectoires biographiques, individuelles ou familiales, d'hommes qui leur ont été confrontés.

37. Cf. REVEL 1996b, p. 13.

38. Cf. REVEL 1996b, p. 13. Je fais ici référence aux démarches d'Alban Bensa et de Bernard Lepetit qu'ils exposent dans l'ouvrage de Jacques Revel : Bensa 1996 et LEPETIT 1996. L'autre courant principal qui se dégage du principe de variation d'échelles est celui qui accorde un privilège aux échelles microscopiques par rapport aux échelles macroscopiques, REVEL 1996b, p. 13-14.

39. Cf. GAUTHIER 2007, p. 27-28.



la géométrie des nombres, dans quel contexte elle est mobilisée. Ce dernier niveau lui permet de préciser les définitions ou les commentaires des mathématiciens.

Dans le cadre de ma thèse, j'applique le principe de variation d'échelle à un unique corpus : celui des doctorats d'État en sciences mathématiques soutenus entre 1915 et 1945. Je « fais varier la focale de l'objectif » en ne faisant pas seulement grandir progressivement la taille du corpus, mais également en « modifiant la forme et la trame »<sup>40</sup> ; je « règle [la] focale aux dimensions pertinentes de l'objet »<sup>41</sup> pour révéler « les séries de « contextes emboîtés » »<sup>42</sup>. En effet, je fais varier progressivement l'échelle par rapport aux contenus, aux thèmes abordés, aux pratiques mathématiques utilisées dans les thèses de sciences mathématiques, en allant du plus global au plus local. L'angle de visée reste identique et seul l'accommodement de l'optique varie<sup>43</sup>. Je mobilise alors différentes parties de mon corpus selon les trois échelles que je distingue.

Le premier niveau de mon analyse est celui de l'analyse quantitative du corpus. Cette analyse dépend du classement des mémoires de thèses suivant les six mots-clés des sciences mathématiques décrits précédemment. Différentes informations issues de mon corpus sont utilisées pour y procéder : le classement du doctorat<sup>44</sup> et la faculté des sciences où est soutenu le doctorat (à la Sorbonne ou dans une faculté de province)<sup>45</sup>. La méthode de l'analyse quantitative sur laquelle je me fonde a été théorisée par Jaroslav Folta et Lubos Nový en 1965 dans FOLTA et NOVÝ 1965, où ils l'explicitent et discutent de ses apports à l'histoire des mathématiques. Ils discutent notamment des critères que le corpus analysé quantitativement doit respecter : il doit s'agir de séries homogènes de taille suffisante. C'est le cas du corpus des 242 thèses d'État.

La méthode d'analyse quantitative de Folta et Nový a, depuis 1965, été appliquée par plusieurs historiens des mathématiques. Roland Wagner-Döbler et Jan Berg dans WAGNER-DÖBLER et BERG 1996 tentent de mesurer le dynamisme de l'activité mathématique et de certains domaines particuliers en analysant quantitativement les publications mathématiques repérées dans l'index mathématique du *Catalogue of Scientific Papers of the Royal Society of London*. Plus récemment, Sébastien Gauthier a utilisé cette méthode dans sa thèse, GAUTHIER 2007, pour le premier niveau de son analyse<sup>46</sup>.

---

40. Cf. la description que donne Jacques Revel de cette méthode dans REVEL 1996a, p. 19.

41. Cf. Bensa 1996, p. 58 et Lepetit 1996, p. 83.

42. Cf. Bensa 1996, p. 58.

43. Cf. Lepetit 1996, p. 81.

44. Je renvoie au deuxième chapitre de ma thèse où je précise comment je procède à ce classement en utilisant notamment le recensement des mémoires dans les répertoires bibliographiques et les rapports de thèse.

45. Je montrerai au cours de mon mémoire qu'une telle distinction est pertinente pour la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle en France.

46. Parmi d'autres travaux utilisant des méthodes quantitatives figurent notamment les articles de Catherine Goldstein et Hélène Gispert. Dans Goldstein 1999, Catherine Goldstein étudie le domaine de la théorie des nombres entre 1870 et 1914 au moyen des publications recensées dans le *Jahrbuch*

Les résultats de l'analyse quantitative du corpus des thèses sont exposés dans mon mémoire de DEA, LELOUP 2004. J'en rappelle les principaux résultats dans le deuxième chapitre de cette thèse. Ce premier niveau d'analyse permet en effet de déterminer les évolutions globales des différents domaines que j'ai construits ainsi que leurs équilibres respectifs. Il réévalue déjà l'historiographie existante sur le sujet, essentiellement celle écrite par le groupe Bourbaki, en montrant comment certains domaines absents de cette historiographie, comme la géométrie, occupent en réalité une place significative parmi les sujets abordés et travaillés dans le milieu mathématique académique. Il montre également la place insoupçonnée des travaux de mathématiques appliquées et de mécanique dans le cadre de ces publications.

Le deuxième niveau d'analyse est celui de l'étude des introductions et des rapports de thèse. Je mobilise ces deux sources pour appréhender le contenu des thèses ainsi que le contexte mathématique dans lequel il se situe, c'est-à-dire les références mathématiques invoquées<sup>47</sup>. Je considère ainsi non seulement les citations bibliographiques, quand elles existent, mais également les références plus générales à des méthodes, à des théories, à des résultats d'autres mathématiciens dont s'inspirent les doctorants et dont ils évoquent l'utilisation dans leur avant-propos (ou que mentionnent les rapporteurs). Dans certains cas, une partie seulement de ces deux sources sera consultée : pour la période de 1900 à 1914, mon analyse ne repose que sur l'étude des rapports de thèses ; pour l'analyse des thèses soutenues dans les facultés de province pendant l'entre-deux-guerres, je ne consulte que les avant-propos des mémoires, n'ayant pu disposer des rapports. Dans ces deux cas, l'analyse sera qualifiée de niveau « un et demi » pour exprimer qu'elle se situe à un niveau intermédiaire d'analyse entre le premier et le deuxième.

Pour le troisième niveau d'analyse, la focale choisie pour étudier les thèses est encore plus grande. Les rapports de thèses font encore partie des sources observées, mais je ne me restreins plus uniquement dans l'analyse des thèses à celle des avant-propos : j'examine le manuscrit tout entier.

Ces deuxième et troisième niveaux d'analyse nécessitent un classement des thèses plus précis que celui correspondant au premier niveau de l'analyse et au premier niveau

---

en analysant quantitativement ces publications suivant le pays de leur auteur, le journal où elles paraissent, etc. Hélène Gispert a utilisé ces méthodes quantitatives à plusieurs fins : pour l'étude de société savantes notamment dans GISPERT 1991 et TOBIES et GISPERT 1996, dans l'étude du milieu mathématique au moyen des publications dans les journaux, cf. GISPERT 1993. Dans GISPERT 1999a, Hélène Gispert explicite également les apports de méthodes quantitatives en histoire des mathématiques reprenant notamment les principes de Folta et Nový. On peut également évoquer le travail de Frédéric Brechenmacher sur l'« universalité des matrices », sur l'utilisation de la théorie des matrices dans différents cadres mathématiques au moyen d'une analyse quantitative d'un corpus de textes dont le titre ou la recension qu'en fait le *Zentralblatt* contiennent le terme « matrice », cf. BRECHENMACHER 2008.

47. J'utilise ici le terme « références » dans le sens utilisé par Catherine Goldstein et Jim Ritter dans GOLDSTEIN et RITTER 2003, p. 95-96.

de mot-clé. C'est pourquoi j'utilise dans certains cas le classement des mémoires dans les sous-domaines correspondant au deuxième niveau de mots-clés, tel qu'il a été défini précédemment. Le contenu mathématique des mémoires est ici au centre de l'étude. Ces deux niveaux d'analyse permettent de distinguer les thèmes et sujets abordés par les doctorants ainsi que leur spécificité mathématique dans les domaines constitués par les mots-clés de deuxième niveau. Ils sont appliqués à différents domaines des sciences mathématiques, qui servent ici de tests.

Dans l'image produite par le groupe Bourbaki, l'arithmétique et l'algèbre occupent une place importante : décrits comme inexistants dans l'enseignement supérieur et la recherche française de l'entre-deux-guerres avant l'arrivée sur la scène mathématique des futurs membres du groupe, ces domaines sont fortement investis par eux. Quant au domaine de la géométrie, il s'agit d'un point aveugle de l'historiographie, dont mon premier niveau d'analyse a pourtant mis en évidence l'importance quantitative. Par ailleurs, la théorie des fonctions apparaît dans la mémoire collective du milieu mathématique comme un domaine d'excellence, mais traditionnel. Un de ses sous-domaines, celui de la théorie des fonctions de la variable complexe, est plus particulièrement présenté comme ayant connu un âge d'or au début du XX<sup>ème</sup> siècle, avec les publications d'Hadamard, Borel, et comme étant encore le domaine le plus à la pointe de la recherche française dans l'entre-deux-guerres, l'un des seuls où les travaux français sont reconnus internationalement. Quant au calcul des probabilités, domaine qui est à la marge entre les mathématiques pures et appliquées, il est presque absent de la mémoire collective de Bourbaki, mais une historiographie importante existe déjà sur lui et, au contraire de la théorie des fonctions, il est perçu comme un domaine émergent dans l'entre-deux-guerres.

Il est donc intéressant d'étudier avec le deuxième niveau d'analyse les trois domaines de l'arithmétique et l'algèbre, de la géométrie et de la théorie des fonctions. Cette étude est approfondie par l'analyse au troisième niveau des domaines de la théorie de la fonction de la variable complexe et du calcul des probabilités. L'intérêt est notamment de réévaluer les images déjà connues, en étudiant comment chaque domaine est travaillé par les doctorants, en observant quels sont les réseaux d'influences et de textes qui se dessinent au moyen des théories employées et des références citées par les doctorants, etc. Pour les domaines analysés au troisième niveau, il est apparu nécessaire d'adosser l'étude des doctorats à l'historiographie écrite sur le domaine considéré afin de contextualiser l'analyse. Il s'agit de voir comment les résultats démontrés, les méthodes utilisées, les théories citées, les pratiques individuelles des doctorants s'inscrivent dans la recherche du domaine considérée sous un prisme plus international, comment les thèses d'État participent au développement, à l'émergence, à la produc-

tion « normale »<sup>48</sup> de recherche du domaine. L'étude des domaines avec le troisième niveau d'analyse est ainsi précédée par un bilan historiographique critique du domaine, qui en souligne les biais, les impasses et les forces.

Mon analyse du corpus des thèses avec la deuxième et la troisième focale repose ainsi sur une grille de questions, dont les plus importantes touchent aux réseaux d'influences et aux réseaux de textes que je cherche à révéler : quelles sont les notions mathématiques manipulées, les théories étudiées, utilisées, les résultats démontrés, les méthodes employées, à quels mathématiciens est-il fait référence, quels sont ceux qui sont cités, quels sont les travaux et les théories de ces auteurs qui sont utilisées ? Parallèlement, certains mathématiciens exercent-ils une influence autre que seulement intellectuelle par la citation de certains de leurs travaux ? La réponse à cette dernière question introduit un contexte social et de sociabilisation qui a trait aux relations ou aux correspondances entretenues par le doctorant et dans lequel s'inscrit l'élaboration du mémoire de thèse. Il fait donc partie du travail de doctorat et le connaître, quand cela est possible, permet de préciser certaines relations internes au milieu mathématique.

En faisant varier les échelles d'analyse de mon corpus, en les mettant en regard, en montrant comment chacune met en valeur certains phénomènes, je cherche à dégager les dynamiques de la recherche académique française<sup>49</sup>. Le terme « dynamique » désigne ici l'adjectif substantivé défini par la seconde entrée du *Petit Robert*<sup>50</sup> : « qui considère les choses dans leur mouvement, leur devenir ». Je ne cherche pas à révéler seulement les dynamiques internes aux thèses mais également les dynamiques qui, ayant leur origine dans le corpus, vont au-delà. Chaque niveau de l'analyse me permet de révéler les évolutions des domaines, des influences, des thèmes abordés par les doctorants, comment elles s'inscrivent dans un cadre plus global. L'analyse au premier niveau montre l'évolution des équilibres entre domaines. Le deuxième niveau d'analyse met en évidence certains mathématiciens et certains de leurs travaux et méthodes qui influencent plusieurs doctorats. Il révèle plusieurs traditions de recherche auxquelles se réfèrent les doctorants et qui entraînent l'étude de sujets particuliers. Le troisième niveau d'analyse met en valeur la façon dont ces références sont utilisées par les doctorants, comment les travaux des mathématiciens sont compris et appropriés par les doctorants, quels sont les types de problèmes étudiés, comment ils sont reliés aux traditions de recherche française, étrangère et ce que cela révèle sur les relations entre mathématiciens français. Par exemple, il permet de voir comment les doctorants s'approprient les changements

---

48. dans le sens que donne Kuhn à ce terme dans KUHN 1983.

49. Par la nature du doctorat de sciences mathématiques, produit dans un cadre institutionnel, une faculté de sciences, les recherches abordées dans ces mémoires ne peuvent en effet décrire *a priori* la recherche française prise dans sa globalité c'est-à-dire incluant par exemple des recherches techniques liées à des recherches industrielles par exemple.

50. Cf. REY-DEBOVE et REY 1987.

de points de vue en théorie des fonctions de la variable complexe avec les références aux notions de Nevanlinna et les travaux d'Ahlfors utilisant les surfaces de Riemann, ou comment les sujets choisis par les doctorants en probabilités ainsi que les références qu'ils utilisent traduisent l'existence de réseaux entre certains spécialistes de ce domaine.

La mémoire de la « Grande Guerre » et ses traces perpétuées, tant morales que matérielles, marquent bien sûr les années au centre de mon étude. Le récent retour au premier plan de la scène historiographique de ce conflit, non seulement par des ouvrages historiques mais également sous la plume de romanciers ou sous la caméra des cinéastes<sup>51</sup>, depuis la dernière décennie du XX<sup>ème</sup> siècle incite à s'interroger sur les répercussions de ce conflit perceptibles dans la recherche mathématique académique et à inscrire une partie de cette étude dans ce champ historiographique plus vaste<sup>52</sup>.

Le registre émotionnel de ceux qui ont vécu le conflit et ses conséquences est sans doute le mieux connu. En témoigne par exemple le monument aux morts de l'École normale supérieure, qui évoque la mortalité importante des Normaliens des promotions antérieures à 1914, envoyés au front en première ligne<sup>53</sup>. De même, divers témoignages et écrits de mathématiciens vivants à cette époque retranscrivent leurs impressions et leur vécu de cette période. Camille Marbo décrit ainsi les sentiments de son mari dans MARBO 1967. Elle y mentionne par exemple qu'après la première guerre mondiale Emile Borel ne pouvait plus supporter l'atmosphère de l'École normale en deuil et qu'il décida de démissionner de son poste de sous-directeur. On peut également citer les propos d'André Weil évoquant le « vide » creusé par la guerre<sup>54</sup>. Comme l'écrivent Christophe Prochasson et Anne Rasmussen en introduction d'*Au nom de la patrie, les intellectuels et la première guerre mondiale (1910-1919)*, PROCHASSON et RASMUSSEN 1996, « de la guerre de 1914, il est habituellement retenu sa formidable oeuvre de destruction ».

Mais d'autres recherches se sont focalisées plus récemment sur l'impact de la guerre sur le milieu mathématique et sur les trajectoires individuelles et collectives de mathématiciens : le projet « Savoirs, culture et milieux scientifiques en France dans

---

51. On peut ainsi citer pour les films, *Un long dimanche de fiançailles* de Jean-Pierre Jeunet en 2004, adapté du roman éponyme de Sébastien Japrisot, 1993, in Folio, Gallimard, ou encore *Joyeux Noël* de Christian Carion en novembre 2005.

52. Notamment les travaux d'Anne Rasmussen et de Christophe Prochasson (par exemple : PROCHASSON et RASMUSSEN 2004) ou encore l'ouvrage dirigé par J.-J. Becker, BECKER 2005 ou AUDOIN-ROUZEAU et BECKER 2004. On peut citer également la thèse d'Arnaud Saint-Martin *L'office et le télescope. Une sociologie historique de l'astronomie française, 1900-1940*, SAINT-MARTIN 2008, p. 297 sur l'astronomie française.

53. D'après Martin Andler qui a recensé les chiffres dans ANDLER 1994, près de la moitié des élèves normaliens des promotions 1911 à 1914 sont morts à la guerre.

54. Cf. WEIL 1991, p. 191. Il y écrit : « Déjà à l'École, j'avais été très frappé du dommage causé aux mathématiques en France par la guerre de 14-18 ; elle avait creusé un vide que ma génération et la suivante ne trouvèrent pas facile à combler ».

l'entre-deux-guerres » mené au GHDSO à l'université de Paris-Sud, et qui s'intéresse aux revues de vulgarisation scientifiques publiées en France et qui y étudie notamment la place des domaines appliqués ; un numéro à paraître de la revue d'Histoire des sciences coordonné par Liliane Beaulieu, *Regards sur les mathématiques en France entre deux guerres* ; le projet « Sciences mathématiques et mathématiciens autour de la première guerre mondiale (1910-1930) » du groupe Histoire des sciences mathématiques de l'Institut de mathématiques de Jussieu et les publications prévues (en particulier GOLDSTEIN et MAZLIAK à paraître en 2010). Ces projets, auxquels j'ai eu l'occasion de participer pendant la préparation de ma thèse, ont ainsi contribué à formuler un ensemble d'hypothèses et de pistes de réflexion sur la période plus large à laquelle je m'intéresse ici.

## 0.5 Plan de la thèse

Avant de dégager des dynamiques de la recherche académique française de l'entre-deux-guerres à partir du corpus des thèses d'État en sciences mathématiques, il est apparu opportun de « tester » ma méthode et d'étudier la pertinence d'une telle analyse sur une période où une historiographie plus abondante sert de point de comparaison pour vérifier les résultats obtenus par ma méthode d'analyse. Mon premier chapitre est ainsi consacré à la période entre 1900 et 1914. Une première partie dresse un bilan historiographique sur cette période. L'étude du corpus des thèses d'État soutenues entre 1900 et 1914 avec les niveaux d'analyse un (analyse quantitative) et un et demi (étude des rapports de thèse) permet ensuite de dégager des tendances globales de recherche. Ces tendances se sont trouvées confirmées par le bilan historiographique. La pertinence du corpus et de ma méthode d'analyse est ainsi établie pour l'étude des dynamiques de recherche.

La suite du mémoire est consacrée à la période de l'entre-deux-guerres. Dans le deuxième chapitre se trouvent exposés et décrits le corpus ainsi que la base de données qui lui est relative. J'y explique la méthode employée pour constituer les différents domaines des sciences mathématiques et pour classer les doctorats à l'intérieur de ces domaines, avant de rappeler les résultats obtenus dans mon mémoire de DEA par le premier niveau de mon analyse. Ce premier niveau permet de constater une distinction entre le nombre de thèses soutenues à Paris (dans la faculté des sciences de la Sorbonne) et dans l'ensemble des autres facultés des sciences des universités de province, respectivement 203 et 39. L'étude menée au premier chapitre a permis de montrer que la recherche mathématique parisienne est représentative de celle qui se fait plus globalement à l'échelle de la France. L'analyse quantitative du second chapitre confirme qu'il en est encore ainsi entre 1914 et 1945.

Avant de restreindre mon étude aux thèses soutenues à Paris, j'étudie dans le troisième chapitre les thèses soutenues dans les différentes facultés de province (avec le niveau d'analyse un et demi). Il s'agit de voir si des sujets sont spécifiquement traités dans certaines universités, si d'autres pôles de recherche que celui de Paris se constituent : à quelle période, où et pourquoi.

La suite du mémoire se concentre ensuite sur l'analyse au deuxième et troisième niveau des thèses soutenues à Paris. Le quatrième chapitre est alors consacré à une analyse au deuxième niveau des thèses d'arithmétique et d'algèbre ainsi que des thèses de géométrie.

Dans un cinquième chapitre, après avoir dressé un bilan historiographique de la théorie des fonctions, les doctorats de ce domaine sont également étudiés au deuxième niveau d'analyse à l'exception des thèses du sous-domaine de théorie des fonctions de la variable complexe que j'étudie avec le troisième niveau d'analyse.

Enfin, après avoir également fait le point sur l'historiographie des probabilités françaises de l'entre-deux-guerres, je regarde avec le troisième niveau d'analyse comment les thèses soutenues dans ce domaine abordent ce champ émergent des mathématiques.

En conclusion, je fais le point sur les rapports entre les thèses et l'ensemble de la recherche mathématique, sur le rôle des thèses et sur ce que l'analyse de ce corpus permet d'apporter à la réévaluation de l'image usuelle du milieu mathématique français de l'époque.

# Chapitre 1

## Un test : Les thèses et la recherche mathématique en France de 1900 à 1914

### Sommaire

1.1	Bilan historiographique des années 1900 à 1914 . . . . .	40
1.2	Le corpus complet des thèses entre 1900 et 1914 . . . . .	50
1.3	Niveau un de l'analyse . . . . .	53
1.4	Les jurys et les rapports de thèses . . . . .	59
1.5	Les thèses : un corpus pertinent . . . . .	73

Tester la pertinence du corpus des doctorats d'État comme corpus d'étude pour dégager les dynamiques de la recherche mathématique académique d'une période donnée constitue l'objectif de cette partie. Il s'agit de regarder ce qu'apporte l'analyse d'un tel corpus par rapport à d'autres analyses établies à partir de différentes sources et approches sur la même période. Dans quelle mesure l'étude des thèses et leurs rapports les confirme-t-elle, les infirme-t-elle, les complète-t-elle ? Quels sont les apports, les limites et les manques apparents qu'une analyse de ce corpus entraîne ?

Le choix s'est porté sur la période de 1900 à 1914. Nous disposons pour cette période de plusieurs études : celles d'Hélène Gispert, qui, dans différents articles<sup>1</sup>, établit l'image de la *France mathématique* qui fait référence actuellement ; celle de

---

1. Les travaux d'Hélène Gispert sur lesquels se fonde mon analyse sont les suivants : en premier lieu *La France mathématique*, GISPERT 1991, p. 113-161, et également *La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 : Baire, Borel, Lebesgue . . . et tous les autres*, GISPERT 1995a, *Le milieu mathématique français et ses journaux en France et en Europe*, GISPERT 1993, *The German and French Editions of the Klein-Molk Encyclopedia : Contrasted Images*, GISPERT 2001, *A Comparative Study of the French and German Mathematical Societies before 1914*, TOBIES et GISPERT 1996, *De Bertrand à Hadamard : quel enseignement d'analyse pour les polytechniciens ?*, GISPERT 1994, «*Quelles lectures pour les conférences de mathématiques : savante, pédagogique, politique ?*», GISPERT 2007, *Réseaux mathématiques en France dans les débuts de la Troisième République*, GISPERT 1999b.



Michel Armatte dans ARMATTE à paraître, où il évoque la question du calcul des probabilités et des statistiques et son statut en France dans cette période ; celles de Catherine Goldstein qui s'intéresse au domaine particulier de la théorie des nombres dans GOLDSTEIN 1994<sup>2</sup> ; ainsi que celle d'Anne-Marie Décaillot qui évoque les sciences mathématiques au sein de l'Association française pour l'avancement des sciences dans DÉCAILLOT 2002.

Dans un premier temps, il s'agira donc de résumer les caractéristiques dominantes du milieu mathématique entre 1900 et 1914 telles qu'elles apparaissent dans les travaux ci-dessus. L'analyse de ces articles a également un autre intérêt. Hélène Gispert, notamment dans *La France mathématique* GISPERT (1991), a en effet pris en compte dans son corpus les thèses et les rapports de thèses des membres de la Société mathématique de France. Il faudra donc dans ce premier temps relever et analyser précisément comment l'auteur utilise ces sources dans la production d'une image du milieu mathématique et je signalerai et insisterai sur l'exploitation du corpus des thèses lorsqu'elle est explicite dans ces différents articles.

Dans un deuxième temps, je procéderai à l'analyse du corpus de l'ensemble des thèses en sciences mathématiques soutenues en France entre 1900 et 1914 (en ne me limitant pas à celles écrites par les membres de la Société Mathématique de France) avec les degrés d'analyse un et un-et-demi, tels que je les ai décrits dans l'introduction. L'analyse au niveau un-et-demi se fera à partir des rapports des thèses d'État soutenues à la faculté des sciences de Paris. La mise en perspective des résultats de cette étude avec le bilan historiographique établi au préalable permettra de mesurer la pertinence d'une étude fondée exclusivement à partir de ce corpus et de voir quels en sont ses apports et ses limites.

## 1.1 Bilan historiographique des années 1900 à 1914

Dans le cadre de cette partie, il s'agit de présenter, principalement à partir des travaux d'Hélène Gispert, le milieu mathématique qui participe au front actif de la recherche ainsi que sa production.

### 1.1.1 Composition du milieu mathématique français

Le milieu de la recherche mathématique présenté est globalement composé entre 1900 et 1914 par les membres de la Société mathématique de France (SMF). Cette dernière s'est progressivement professionnalisée depuis la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle et elle continue à se renouveler entre 1900 et 1914. Les universitaires, les professeurs d'université y dominent et le nombre de docteurs sociétaires est croissant.

---

2. ainsi que dans GOLDSTEIN 1999.

À côté de la SMF, d'autres sociétés telles que la société des actuaires<sup>3</sup> ont pour membres des spécialistes de certains champs disciplinaires, tels que le calcul des probabilités. Quant à l'Association française pour l'avancement des sciences (AFAS), elle regroupe davantage d'ingénieurs et de mathématiciens amateurs.

Le milieu mathématique est alors dominé par la génération des Picard, Appell, Poincaré, Goursat, qui occupent, pour longtemps encore, les postes institutionnellement forts des chaires d'université à Paris. Hadamard et Borel, plus jeunes, qui obtiennent au début des années 1900 des chaires d'université, patronnent et encouragent la nouvelle génération de jeunes docteurs. Ils investissent des domaines émergents au début du XX<sup>ème</sup> siècle : Hadamard dans le développement des recherches de *calcul fonctionnel* ; Borel devient quant à lui le promoteur de la nouvelle théorie des fonctions. Leur position institutionnelle et leur poids déjà établi au sein du milieu mathématique français facilite d'autant l'établissement des théories et des nouveaux sujets de recherche en analyse dans ces deux champs disciplinaires. Enfin, la nouvelle génération d'analystes, emmenée par Borel, impose ses sujets de recherche sur la scène mathématique. Citons ainsi René Baire ou encore Henri Lebesgue dont les sujets de recherche principaux<sup>4</sup> en théorie des fonctions de la variable réelle et en théorie de l'intégration sont repris très rapidement sur le front de la recherche des années 1900.

Parallèlement, la Société mathématique de France, comme d'autres sociétés mathématiques nationales, est investie par une forte proportion de mathématiciens étrangers à partir de 1900. Il faut signaler l'importance en France du nombre de mathématiciens russes et d'Europe centrale et notamment des étudiants. Ils participent durant cette période à l'activité mathématique en France en publiant leurs travaux dans le cadre de journaux de recherche français et peuvent donc être considérés comme des membres actifs du milieu de la recherche.

### 1.1.2 Les équilibres entre domaines mathématiques

Dans ses articles sur la production des sociétaires et sur la presse mathématique française, Hélène Gispert établit ses résultats à partir du dépouillement des tables des matières du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*<sup>5</sup>. La répartition par branche des articles considérés repose ensuite sur la classification de ce répertoire bibliographique. Les domaines mathématiques que je considère ci-dessous sont donc les domaines référencés comme tels par le *Jahrbuch*<sup>6</sup>.

---

3. Cf. ARMATTE à paraître.

4. qu'ils présentent dès leur thèse, respectivement en 1899 (*Sur les fonctions de variables réelles*) et en 1902 (*Intégrale, longueur, aire*).

5. Cf. GISPERT 1991, p. 33, p.83.

6. En ce qui concerne plus particulièrement le champ de la théorie des nombres, Catherine Goldstein dans GOLDSTEIN 1994 utilise et recoupe trois classements différents pour référencer l'ensemble

## La géométrie et les mathématiques appliquées : des domaines au second plan

Dans *La France mathématique* GISPERT (1991), l'analyse des tableaux<sup>7</sup> décrivant la production mathématique des sociétaires dans les années 1900 montre une géométrie en perte de vitesse par rapport à l'analyse dans l'ensemble de la production mathématique et plus particulièrement dans les activités de recherche. Gaston Darboux, titulaire de l'unique chaire de géométrie en France depuis 1881 a imposé ses choix<sup>8</sup> à tout le milieu mathématique depuis la fin des années 1870, sans investir dans de nouveaux champs cultivés à l'étranger. Ces choix, dans les années 1900, ne produisent que peu de recherches<sup>9</sup>.

Cette faiblesse est d'ailleurs confirmée par l'étude approfondie de la presse mathématique de l'époque dans laquelle publient les auteurs de la SMF<sup>10</sup>. La géométrie n'apparaît ainsi dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* qu'au 3<sup>ème</sup> rang des sujets traités, après l'analyse et les mathématiques appliquées. Elle ne continue, pour l'essentiel, à faire l'objet de travaux dans les années 1900 que dans les secteurs de la diffusion et de l'enseignement.

Il convient cependant d'apporter une certaine nuance à cet état des lieux<sup>11</sup>. L'imbrication des domaines de recherche dans les contenus sont tels que des notions géométriques sont utilisées et étudiées dans des travaux référencés en analyse. La part de la géométrie dans les domaines de recherche peut être ainsi sous-estimée.<sup>12</sup>

---

des articles des *Notes aux Comptes rendus* publiées en théorie des nombre. Dans GOLDSTEIN 1999, elle discute du problème de la définition de ce champ. Sont réunis et étudiés les articles recensés à partir du dépouillement des tomes du *Jahrbuch* (la rubrique *Zahlentheorie*), du livre de Dickson (DICKSON 1919-1923) et de l'index des *Comptes Rendus*.

7. Cf. en annexe la partie 5., p. 172-175, *La production mathématique (1860-1914) : les contenus*.

8. centrés sur les courbes et les surfaces de l'espace usuel, en géométrie infinitésimale, cf. GISPERT 1991, p. 103.

9. Cf. GISPERT 1991.

10. Cf. GISPERT 1993, p. 149. Il s'agit des revues suivantes : les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, les *Nouvelles annales de mathématiques*, le *Bulletin de la Société Mathématique de France*, les *journaux, revues et bulletins de mathématiques spéciales ou élémentaires*, le *Journal des mathématiques pures et appliquées*, les *Annales scientifiques de l'École normale*, les *Comptes rendus annuels de l'Association française pour l'avancement des sciences*, l'*Enseignement mathématique*.

11. Cf. GISPERT 1991 et GISPERT 1993.

12. Hélène Gispert évoque par exemple l'intérêt géométrique des recherches analytiques sur les surfaces et les courbes géométriques. De plus, cette interaction entre divers domaines mathématiques peut être sous-évaluée du fait de la classification faite par le *Jahrbuch*. Si on regarde les articles de Picard qu'évoque Christian Houzel dans l'article *Aux origines de la géométrie algébrique : les travaux de Picard sur les surfaces (1884-1905)* et qui selon lui fondent la géométrie algébrique, HOUZEL 1991, ils sont tous référencés dans la rubrique « Théorie des fonctions » (par exemple « Sur certaines surfaces algébriques pour lesquelles les intégrales de différentielles totales se ramènent à des combinaisons algébriques-logarithmiques » 1903, *CRAS*. 136 ; « Sur certaines équations fonctionnelles et sur une classe de surfaces algébriques » (1905) *CRAS*. 139, « Sur quelques théorèmes relatifs aux surfaces algébriques de connexion linéaire supérieure à l'unité » (1905), *CRAS*. 140, etc.), quelques rares dans la rubrique « Calcul différentiel et Intégral » (par exemple « Sur une propriété curieuse d'une classe de surfaces algébriques » (1902), *CRAS*. 135), mais aucun en géométrie.

L'algèbre et la théorie des nombres ne suscitent que peu de travaux de recherche de la part des membres de la SMF<sup>13</sup>. Ces domaines sont cependant présents dans les revues d'enseignement ou de vulgarisation ainsi que dans les programmes de l'enseignement secondaire. À cette même période, de nouvelles recherches en algèbre se développent en Allemagne comme en témoigne le nombre important de publications des sociétaires de la *Deutsche Mathematiker Vereinigung*<sup>14</sup>. Mais le milieu mathématique français, mis à part quelques individualités, reste à l'écart de ces nouvelles recherches entre 1900 et 1914<sup>15</sup>. Catherine Goldstein complète ces conclusions pour le champ particulier de la théorie des nombres. Au début du XX<sup>ème</sup> siècle, les mathématiciens les plus prolifiques quantitativement ont disparu et n'ont pas été remplacés. Cependant, certains mathématiciens tels Poincaré, Picard et Chatelêt travaillent pendant cette période surtout la théorie des formes, champ proche de l'analyse, l'analyse étant le domaine le plus important pour la recherche mathématique française d'alors.

Parmi les autres domaines des sciences mathématiques françaises qui apparaissent au second plan de la production des membres de la SMF entre 1900 et 1914 figurent les mathématiques appliquées avec la mécanique et la physique mathématique. Le domaine de l'astronomie n'y est pas représenté. En revanche, pendant cette même période, il fait l'objet de nombreuses publications au sein de l'Association française pour l'avancement des sciences<sup>16</sup>.

La production des sociétaires en mathématiques appliquées atteint à peine la moitié de la production en analyse et l'écart est grandissant pour ce qui est de la recherche<sup>17</sup>. Contrairement au cas de la géométrie, la part de la production en mathématiques appliquées ne diminue pas entre 1900 et 1914 mais elle reste peu importante. Les mathématiciens français sont au coeur de l'enseignement de ces disciplines en occupant institutionnellement les chaires dans les facultés des sciences françaises ainsi que dans les écoles d'ingénieurs<sup>18</sup> (chaires de physique mathématique et calcul des probabilités, chaires de mécanique céleste, mécanique rationnelle). Mais les sociétaires de la SMF ne publient que peu de travaux de recherche dans ce domaine au début du XX<sup>ème</sup> siècle.

---

13. Un seul nom pour l'algèbre est évoqué par Hélène Gispert parmi les mathématiciens français de l'époque : celui de Jules Drach dans GISPERT 1995a, p. 63.

14. Cf. TOBIES et GISPERT 1996.

15. Cf. GISPERT 1995a, p. 52.

16. Il s'agit pour l'essentiel de communications relatives à des observations de professionnels et d'amateurs, cf. GISPERT 1999b, les tableaux de la répartition des publications par branche p.142 et p.145.

17. Cf. le tableau 5.3 *répartition par branches de la production des sociétaires français*, p. 173 et le tableau 5.8 *répartition des sociétaires français par domaines d'activités de recherche* de GISPERT 1991.

18. Cf. GISPERT 1991, p. 128.

La faiblesse de l'intérêt que suscite ce domaine, faiblesse spécifique au milieu mathématique français par comparaison avec d'autres pays tels que l'Allemagne, se trouve également illustrée par l'entreprise de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, version française dirigée par Jules Molk de l'*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendung* publiée par Félix Klein<sup>19</sup>. Jules Molk peine grandement à motiver ou à trouver des auteurs français pour l'écriture des tomes relatifs aux mathématiques appliquées<sup>20</sup>. Ces tomes seront parmi les moins aboutis de la version française de l'*Encyclopédie*, qui fut stoppée par la guerre.

Un autre élément vient également conforter cette analyse : la faible participation des mathématiciens français aux sections des congrès internationaux des mathématiciens du début du XX<sup>ème</sup> siècle réservées aux applications (celles relatives à la mécanique, à la physique mathématique ou encore aux nouvelles applications mathématiques telles que les sciences actuarielles, économiques ou statistiques). En fait, selon Hélène Gispert, ces mathématiques se font dans d'autres milieux que celui de la Société Mathématique de France, hors du champ académique, en marge du milieu mathématique officiel. Les publications ne paraissent pas dans la presse, recensée par le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*<sup>21</sup>, mais dans d'autres revues spécifiques à chaque milieu particulier, comme celui de l'actuariat ou de la balistique. Le développement de ce domaine ne peut donc être perçu par son étude.

## L'analyse : une discipline phare

À côté des disciplines qui viennent d'être évoquées, l'analyse apparaît en ce début de XX<sup>ème</sup> siècle comme le domaine le plus actif du milieu mathématique français, celui qui est au centre des productions des membres de la Société Mathématique de France et de leurs activités de recherche, celui également dont les sujets se renouvellent le plus. Cette primauté de l'analyse dans le champ de la recherche engagée depuis les années 1880 avec des mathématiciens tels que Picard, Appell et Poincaré est relancé, dans les années 1900, par une nouvelle génération de mathématiciens qui introduisent de nouvelles thématiques et installent les fondements de la théorie moderne des fonctions et du calcul fonctionnel.

Les nouvelles recherches qui émergent entre 1900 et 1914 appartiennent en effet majoritairement à ces deux champs de l'analyse<sup>22</sup>. Les travaux en théorie des fonctions se regroupent autour de trois thématiques : le domaine classique de la variable com-

---

19. Cf. GISPERT 2001.

20. Pour en citer quelques uns, Appell pour le volume de mécanique tarde à rendre ses écrits. Langevin, sollicité à de nombreuses reprises pour le tome de physique, ne répond pas. Cf. GISPERT 2001, p. 98.

21. Cf. également GISPERT 1993, p. 155.

22. Cf. GISPERT 1991, p. 116-124.

plexe (renouvelé par l'introduction de notions de théories des ensembles de Cantor<sup>23</sup>), les fonctions de la variable réelle (avec également l'utilisation de notions de théories des ensembles), ainsi que des questions relatives à la représentation des fonctions, aux séries de fonctions, où la notion de mesure de Borel et la nouvelle intégrale de Lebesgue jouent un rôle central. Parallèlement, d'autres travaux se rattachent au *calcul fonctionnel* et s'articulent autour de la théorie des équations fonctionnelles et de l'étude des fonctionnelles linéaires et des espaces de fonctions.

Le succès de ces théories sur la scène mathématique française s'affirme très rapidement, comme le montre l'abondance de la littérature mathématique publiée dans la presse sur ces sujets<sup>24</sup>. De plus, une série d'ouvrages, la *Collection de monographies sur la théorie des fonctions*, publiés pendant toute la première décennie sous la direction de Borel, est consacrée spécifiquement à la théorie des fonctions. Un autre signe de l'importance de ce succès est la place occupée par ces nouvelles recherches en analyse dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* dont les tomes relatifs à la théorie des fonctions et au calcul fonctionnel commencent à paraître dès 1909.

En ce qui concerne les thèmes plus traditionnels de l'analyse française (comme par exemple les fonctions algébriques ou les équations différentielles partielles ou ordinaires), ils continuent d'être étudiés et travaillés davantage par la génération antérieure de mathématiciens (celle des Picard, Appell, Poincaré, Goursat, Painlevé), qui utilisent en outre ponctuellement dans leurs travaux les outils mathématiques récemment introduits par la nouvelle génération.

Les mathématiciens français investissent peu les journaux étrangers par des articles en analyse ou plus généralement par des articles de recherche<sup>25</sup>. Le milieu académique français apparaît donc peu ouvert vers les autres pays et peu enclin à y faire connaître ses recherches.

Il est cependant exagéré de dire que la « France mathématique » est isolée. Les nouveaux sujets d'analyse en théorie des fonctions et en calcul fonctionnel ne se développent pas indépendamment de la recherche étrangère<sup>26</sup>. Ils connaissent l'influence de l'Italie où Volterra, notamment, travaille en cette même période sur des recherches en théorie des fonctions de la variable réelle et en théorie des ensembles. Ce dernier entretient des relations privilégiées avec Hadamard, Picard, Borel ainsi que Lebesgue et Baire<sup>27</sup>. Les travaux d'Hilbert jouent également un rôle dans le développement des recherches françaises sur les fondements de la théorie générale des équations intégrales

23. Selon Hélène Gispert, GISPERT 1991, p. 118, elles traitent notamment du prolongement des fonctions analytiques, de la convergence des séries entières au-delà de leur cercle de convergence.

24. Cf. GISPERT 1993 et GISPERT 1991, p. 122-124.

25. Cf. Hélène Gispert dans GISPERT 1993, p. 140-141. Hélène Gispert évoque une exception parmi les mathématiciens français : Poincaré qui publie dans les périodiques étrangers.

26. Cf. GISPERT 1991, p. 121.

27. Hélène Gispert évoque ainsi dans GISPERT 1991, p. 122 l'importante correspondance entre ces différents mathématiciens.

linéaires. De plus, entre 1900 et 1914, le *Bulletin des sciences mathématiques*<sup>28</sup> est un moyen privilégié et très utilisé pour se tenir au courant des principaux travaux réalisés à l'étranger<sup>29</sup>. Les mathématiciens français sont donc au courant des travaux et thématiques développés à l'étranger, même s'ils ne les reprennent pas ou peu dans le cadre de leur recherche.

### 1.1.3 Des débats épistémologiques importants

Dans les différents articles étudiés et notamment dans *La France mathématique* GISPert (1991), une place importante est accordée aux débats épistémologiques entre 1900 et 1914. Par comparaison avec les périodes antérieures, la tenue de ces débats constitue un phénomène nouveau et caractéristique de la période.

Au début du XX<sup>ème</sup> siècle, ces débats, suscités en partie par le recours fréquent dans les nouvelles recherches à la théorie des ensembles<sup>30</sup>, portent principalement sur le degré d'abstraction des nouvelles recherches, sur l'utilité des nouveaux objets et sur les liens qui doivent exister entre théories et applications. Ils ne donnent cependant pas lieu à des clivages trop profonds. Les jeunes mathématiciens ne s'inscrivent pas en opposition totale avec l'activité mathématique classique et traditionnelle de leurs aînés, qui, pour leur part, formulent des mises en garde exprimées sans grande hostilité<sup>31</sup>. Parmi les premiers, aucun d'entre eux ne rejette le « souci universel des applications »<sup>32</sup>. Il ne s'agit pas de créer un nouveau continent mathématique construit sans relation avec les applications mais de réinsérer pour les retravailler les nouvelles thématiques de recherches dans les théories déjà existantes. La question des applications est également au centre de leur travail.

À l'occasion de ces débats, se pose également la question du recours à l'intuition dans l'élaboration de nouveaux résultats, du recours à une intuition géométrique traditionnelle. Les positions sont nuancées suivant les domaines de recherche<sup>33</sup>. En théorie des fonctions, le rôle de l'intuition et des représentations géométriques est revendiqué.

---

28. Cf. GISPert 1993, p. 142.

29. Les interactions mathématiques entre la France et l'étranger dans les autres domaines des mathématiques ne sont cependant pas étudiées davantage dans l'historiographie consultée sur la période.

30. Cf. GISPert 1995a, p. 66-76. Entre 1900 et 1904, les travaux mathématiques tenant compte de cette théorie représentent la moitié des notes d'analyse des sociétaires de la SMF qui paraissent aux *Comptes rendus*. Plus globalement dans la première décennie du XX<sup>ème</sup> siècle plus de vingt mathématiciens (sur la cinquantaine au total d'auteurs réguliers dans la presse mathématique de recherche) publient des travaux utilisant des notions de théorie des ensembles.

31. Ainsi, Picard, auteur de quelques réserves, ne soutient pas moins l'impulsion de ces nouvelles recherches et présente tout comme Darboux, Poincaré, Appell, Painlevé ou Jordan des notes de cette nouvelle génération aux *Comptes rendus*.

32. Cf. GISPert 1991, 1995a. Borel, Baire et Lebesgue s'en réclament dans les préfaces à leurs monographies sur la théorie des fonctions, Borel et Baire précisant également concrètement l'utilité de leurs recherches en physique et en mécanique.

33. Cf. GISPert 1991, p. 124-126.

En revanche, le développement du calcul fonctionnel s'affranchit du recours à l'intuition, jugé inefficace voire impossible par Hadamard lui-même. Les débats se focalisent alors sur les définitions et l'axiomatique à construire. Les choix sur lesquels s'accorde la grande majorité des mathématiciens français sont de limiter le rôle de la logique. Ces choix relèvent de la préoccupation traditionnelle, reprise et enrichie par la nouvelle génération de ne pas renoncer aux « vues directes, géométriques et intuitives »<sup>34</sup>. Ils ne s'inspirent que très peu des débats philosophiques contemporains sur les paradoxes et les principes de la théorie des ensembles qui ont lieu à l'étranger.

Ces débats épistémologiques sont repris par le milieu mathématique dans le cadre de discussions importantes autour de la place et du rôle des mathématiques et de son enseignement qui ont lieu dans les années 1900 et auxquelles participe une grande partie des mathématiciens français, notamment les plus éminents, dans le cadre des réformes de l'enseignement secondaire en 1902 et 1905<sup>35</sup>. Dans le cadre international, pour l'enseignement secondaire comme pour l'enseignement supérieur, ces derniers participent à des réflexions sur la place de la science et sur la modernisation nécessaire des contenus des cours pour tenir compte des évolutions de la société<sup>36</sup>. Même si ces débats ne concernent pas directement le domaine de la recherche, il est intéressant de signaler la place qu'ils occupent au sein du milieu mathématique, d'autant qu'ils mobilisent des participants actifs de cette recherche<sup>37</sup>.

### 1.1.4 Une utilisation partielle des thèses dans l'historiographie

Dans *La France mathématique*, Hélène Gispert considère le corpus des doctorats des sociétaires de la Société mathématique de France. Sur ce corpus, elle réalise une analyse quantitative ainsi qu'une analyse des rapports de thèses et utilise donc, pour

34. Cf. GISPERT 1991, p. 126 Cette citation est extraite d'un article de Lebesgue de 1926.

35. Cf. GISPERT 2007. L'importance de ce phénomène se traduit notamment par l'augmentation importante de publications de sociétaires sur ces questions dans la revue *l'Enseignement mathématique* à partir des années 1900, cf. GISPERT 1993, p. 144-145 mais également par l'évocation de ce sujet lors des conférences pédagogiques dans le cadre des réformes de 1902, cf. GISPERT 2007. Poincaré et Borel sont ainsi les auteurs de deux conférences pédagogiques la première en 1904 sur la question de l'intuition, de la logique et de la rigueur dans les sciences mathématiques, la seconde en 1905 portant plus sur le lien de la recherche aux applications.

36. En témoignent la création de la Commission internationale de l'enseignement des mathématiques en 1908 et la forte implication des membres du milieu mathématique français, pris dans son ensemble, cf. GISPERT 1991, p. 131-136. Y participent non seulement des professeurs de la faculté des sciences de Paris, tels que Darboux, Appell, Koenigs, Goursat ou Borel mais également des professeurs de l'École polytechnique, du Conservatoire des arts et métiers ainsi que des professeurs de faculté de province et des enseignants du secondaire et des classes préparatoires. Dans NABONNAND 2006, Philippe Nabonnand évoque également ce même questionnement sur l'enseignement mathématique à fournir pour le public plus spécialisé des ingénieurs et sur l'adaptation des programmes aux demandes de ces derniers en rapport avec le réel.

37. Notons que cette dimension ne peut *a priori* apparaître directement ni dans l'étude du corpus des thèses, ni dans celui de leur rapport. C'est d'ailleurs l'un des manques des informations fournies par l'analyse de ce corpus.



reprendre les niveaux d'analyse que je distingue, les niveaux un et un-et-demi que j'ai décrits dans mon introduction. Dans « La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 : Baire, Borel, Lebesgue ... et tous les autres », GISPERT 1995a, elle n'étudie les thèses que de quelques mathématiciens (dont Baire, Borel, Lebesgue, Fréchet, Montel, Denjoy), qui utilisent dans leur mémoire de doctorat des notions de théorie des ensembles. Pour ce corpus spécifique, elle analyse les rapports de thèses et se place donc au niveau un-et-demi d'analyse.

Dans un des tableaux présentés en annexe de *La France mathématique* GISPERT (1991) figure la répartition par branche des thèses mathématiques soutenues à Paris suivant les trois sujets distincts : analyse, géométrie et mathématiques appliquées<sup>38</sup>. Pour la période 1900-1909, les 44 thèses se répartissent dans les trois catégories sus-citées respectivement au nombre de 21, 3 et 16. Ces données, qui ne sont pas explicitement exploitées dans GISPERT 1991, figurent dans « Le milieu mathématique français et ses journaux en France et en Europe » GISPERT 1993, p. 151. Hélène Gispert les énonce alors pour confirmer la part dominante de l'analyse dans les travaux de recherche du milieu mathématique ainsi que la grande faiblesse de la géométrie et le peu d'intérêt que suscitent les mathématiques appliquées. Le total de 16 thèses de mathématiques appliquées semble aller à l'encontre de cette affirmation, mais se trouvent regroupées dans cette rubrique les thèses de mécanique, de physique mathématique et les thèses d'astronomie. Ces dernières sur-évaluent cette rubrique<sup>39</sup>.

Parmi les docteurs ès sciences mathématiques, on peut noter la présence de nombreux mathématiciens étrangers, et notamment d'Europe de l'Est, qui participent à l'activité de la SMF et font partie de ces étrangers qui investissent le milieu français de l'époque<sup>40</sup>. Ce phénomène traduit un mouvement plus global, à savoir la venue importante d'étudiants étrangers qui viennent se former dans les universités françaises avant de retourner dans leur pays d'origine pour obtenir des postes universitaires et construire de nouvelles écoles mathématiques. L'étude de la nationalité des doctorants apparaît donc pertinente pour saisir des échanges mathématiques internationaux.

Parallèlement à l'exploitation quantitative des données fournies par les thèses, Hélène Gispert montre dans son article « La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 : Baire, Borel, Lebesgue ... et tous les autres », GISPERT 1995a, p. 63-76, comment l'étude plus précise des contenus des thèses des sociétaires de la SMF soutenues à

38. Cf. tableau 5.5, *les thèses mathématiques en France (1860-1910)*, p.174. Ce classement a été effectué par Hélène Gispert (cf. GISPERT 1991, p. 77) d'après le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*.

39. Dans la seconde partie de ce chapitre, je compléterai ces données en tenant compte de l'ensemble des doctorats soutenus à Paris mais également dans les facultés de province et je prolongerai jusqu'en 1914 la période étudiée.

40. Cf. GISPERT 1991, p. 137-143 et notamment p.141. On peut ainsi citer Davidoglou, Serge Bernstein de Saint-Petersbourg, ainsi que Lalesco, Popovici, Burileanu, Pompeiu de Roumanie qui, tous, soutiennent une thèse à la faculté des sciences de la Sorbonne.

la Sorbonne permet de révéler l'ampleur de la « montée en puissance » de la théorie des ensembles parmi les notions travaillées et utilisées par le milieu mathématique français de l'époque. L'analyse des rapports de thèses montre qu'entre 1900 et 1910 plus de la moitié des thèses d'analyse, soit le quart de l'ensemble des thèses soutenues par les sociétaires, font explicitement usage de cette théorie notamment pour des fonctions de variable complexe et des fonctions de variable réelle<sup>41</sup>.

L'étude des rapports de thèses dans GISPERT 1991, p. 121-122 montre également le rôle du mathématicien italien Volterra et son influence sur certains domaines de la recherche française en analyse. Baire élabore en effet une partie de sa thèse à son contact ainsi que Fréchet avec ses recherches sur les espaces de fonctions et les espaces abstraits. Ces rapports permettent ainsi d'apporter un éclairage sur certaines influences exercées par des mathématiciens, français comme étrangers, sur les travaux menés dans le cadre des doctorats.

Dans GISPERT 1995a, un lien est fait entre la formation que les étudiants ont suivie et leur travail de thèse. Les docteurs, qui ont utilisé les nouveaux outils de la théorie des ensembles, sont normaliens pour la plupart et ils ont assisté, pendant leur formation à l'École normale supérieure, aux conférences de Borel en théorie des fonctions. Ils ont pu lire également les volumes de sa collection et se sont donc familiarisés avec ces nouvelles notions en théorie des ensembles, notions qu'ils réutilisent ensuite dans leur thèse.

Par ailleurs, Catherine Goldstein dans GOLDSTEIN 1994, p. 152 utilise le rapport de Picard sur la thèse de Chatelet en 1911 pour affirmer le rôle de ce dernier dans l'apparition de la théorie algébrique des nombres en France. Le rapport fournit ici une information plus globale sur l'évolution française de cette théorie particulière<sup>42</sup>.

Comme on a l'a déjà signalé, les questions d'ordre épistémologique et les débats qui en découlent sont l'objet, entre 1900 et 1914, d'une part non négligeable des articles publiés par les sociétaires de la SMF<sup>43</sup>. Il s'avère que les rapports de thèse sont une source particulièrement intéressante pour saisir des réticences et des interrogations d'une partie du milieu mathématique<sup>44</sup>. Les auteurs de ces rapports appartiennent à l'« ancienne » génération de mathématiciens, celle qui occupe les chaires des universités et qui ne s'implique pas directement dans ces nouvelles recherches. En jugeant les travaux qui sont présentés dans le cadre du doctorat, ils laissent percer leur inquié-

---

41. Cf. GISPERT 1995a, p. 64-65 On peut retenir celles de Lebesgue bien sûr, mais aussi Fréchet, Montel et Denjoy.

42. Dans GOLDSTEIN 1994, Catherine Goldstein ne procède pas à une étude systématique de certaines thèses ou rapports de thèses. Pour ce faire, elle fait référence à l'ouvrage d'Hélène Gispert, GISPERT 1991, où sont reproduits les rapports de thèses.

43. 10% de la production de la SMF, c'est-à-dire 3 fois plus que dans les années 1870-1900.

44. Cf. GISPERT 1991, p. 124-131.

tude quant à la tendance à l'axiomatisation et aux généralisations que l'utilisation de nouveaux outils peut entraîner.

Il apparaît ainsi que l'utilisation, même partielle, des thèses met en évidence le lien entre les intérêts de recherche d'une époque et les sujets des thèses en sciences mathématiques. Le corpus des thèses, considéré comme un corpus de recherche mathématique, est ainsi en première approche un corpus pertinent pour révéler des dynamiques du milieu académique et universitaire<sup>45</sup>. Qui plus est, la thèse peut parfois servir de première exposition de travaux d'importance, comme dans le cas de René Baire et Henri Lebesgue, ce qui montre sa place parmi les productions de recherche. Enfin, la lecture des rapports permet de voir quelle appropriation et quels usages sont faits de certaines théories et témoigne de l'apparition de nouveaux thèmes sur la scène mathématique française.

Enfin, l'éclairage qu'apportent ces rapports sur les débats épistémologiques montre comment ce corpus permet de percevoir la réception par le milieu mathématique institutionnellement établi de résultats exposés dans le doctorat.

Dans cette première partie, j'ai mis en évidence, tout à la fois, les caractéristiques principales du milieu mathématique français tel qu'il est présenté dans les travaux d'Hélène Gispert et les premiers apports d'une analyse fondée sur l'étude partielle du corpus des thèses. Il s'agit maintenant de voir comment une analyse plus approfondie de l'ensemble du corpus des thèses mathématiques soutenues en France entre 1900 et 1914 ainsi que du corpus de certains de leurs rapports permet de retrouver ce bilan, de l'affiner, de le compléter. Il ne s'agit pas dans cette partie de procéder à une analyse aussi approfondie du corpus des rapports de thèse tel que cela sera fait pour la période de l'entre-deux-guerres. Je cherche ici à mesurer la pertinence du corpus des thèses et de leurs rapports en comparant les résultats de mes analyses rapides avec les travaux, élaborés en partie à partir de corpus différents, qui s'intéressent à la même période et au même milieu. L'un des enjeux de mon travail est de considérer les apports et les limites de notre corpus et de percevoir la portée de l'objet thèse comme source primaire à exploiter pour saisir les dynamiques de recherche mathématique.

## 1.2 Le corpus complet des thèses entre 1900 et 1914

Le corpus des thèses de sciences mathématiques soutenues en France entre 1900 et 1914 est constitué de 84 ouvrages<sup>46</sup>. Afin de pouvoir exploiter ce corpus, notamment

---

45. Dans l'analyse ci-dessus, on peut évoquer la mise en valeur de l'apparition et de l'utilisation progressive de la théorie des ensembles en analyse.

46. Dans le même intervalle de temps, 18 doctorats d'université ont été soutenus.

pour connaître l'évolution des dynamiques de recherches, j'ai procédé au classement des différentes thèses en utilisant un outil bibliographique contemporain de ces recherches<sup>47</sup>.

Il s'agit du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, répertoire bibliographique<sup>48</sup> qui couvre l'ensemble de la période, du début du siècle jusqu'en 1942. Il recense l'essentiel des travaux mathématiques qui paraissent internationalement et il permet en particulier de couvrir la majeure partie du corpus des thèses en sciences mathématiques de 1900 à 1942<sup>49</sup>. Ainsi, entre 1900 et 1914, sur les 72 thèses de sciences mathématiques soutenues à Paris, seules 7 ne sont pas référencées en tant que « Thèse » dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, et pour les 12 thèses soutenues en province, trois ne figurent pas dans le répertoire.

De plus, entre 1900 et 1914 la composition du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* et sa division en chapitres reste relativement stable, tout comme son rythme de parution<sup>50</sup>. Les perturbations les plus importantes n'interviennent que pour le volume des années 1914-1915<sup>51</sup>. Entre 1900 et 1914, les évolutions des divisions à l'intérieur de chaque section ne concernent pas directement l'utilisation que je fais dans mon analyse du classement des thèses de cette période, c'est-à-dire les domaines que je distingue et où sont recensés les doctorats.

Pour la dizaine de thèses qui ne sont pas référencées par le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, différents cas de figures se présentent :

- Si l'auteur a publié sur le sujet d'autres travaux en lien explicite avec le sujet de la thèse et référencés par le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, tels

---

Dans le cadre de cette partie, je ne chercherai pas à discuter de la nature du mémoire de thèse, ni de son statut particulier, ni de la façon dont le milieu le considère. Une telle réflexion sera menée ultérieurement pour la période entre 1914 et 1945.

47. Je ne ferai ici que présenter brièvement mes méthodes et le répertoire bibliographique consulté. J'y reviendrai plus longuement dans le deuxième chapitre à propos de l'entre-deux-guerres.

48. créé en 1868, donc bien avant les périodes considérées.

49. C'est également le répertoire bibliographique qui a été utilisé par Hélène Gispert dans ses travaux GISPERT 1991, 1993 et l'un de ceux auxquels se réfèrent Catherine Goldstein dans GOLDSTEIN 1999, 1994.

50. 2 ans de décalage avec l'année recensée jusqu'en 1904, puis 3 ans jusqu'en 1913.

51. Ce volume ne paraît qu'en 1922. De plus, la présentation formelle et l'organisation de ce recueil évolue précisément à partir de cette année-là. Une table des matières apparaît et pour la première fois depuis 1900 un titre de chapitre évolue : la section « Physique mathématique » est remplacée par « Théorie de la relativité et théorie de la gravitation ». De plus les chapitres correspondant aux domaines de la « Mécanique » et de l'« Astronomie, Géodésie et Géophysique » sont profondément réorganisés. Je ne parlerai pas dans le cadre de cette partie des conséquences qu'un tel bouleversement entraîne ou de ce qu'il peut révéler (ces évolutions n'ont lieu qu'à la dernière année de cette première période). De même, je ne discuterai pas ici des biais que l'utilisation de cet outil entraîne pour le découpage entre les disciplines et donc pour les équilibres entre les divers domaines mathématiques. Je ne commenterai pas non plus la façon dont sont reflétées des opinions propres à certaines collectivités, opinions qui ne coïncident pas forcément avec la perception française du moment et le caractère national de certaines disciplines. Une telle discussion sera menée ultérieurement pour la période entre 1914 et 1945.

que des notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, j'ai alors classé la thèse en question dans la même discipline que celle donnée par le répertoire bibliographique<sup>52</sup>.

- Dans le cas contraire, j'ai effectué une recherche à partir du titre de la thèse. Lorsque je pouvais trouver une publication s'intéressant explicitement aux mêmes questions, la plus contemporaine possible<sup>53</sup>, j'ai classé la thèse concernée dans la discipline mentionnée par le *Jahrbuch*<sup>54</sup>.

Je ne discuterai pas des effets et des biais qu'engendre l'utilisation d'un tel répertoire bibliographique ancré dans une tradition nationale. Ils semblent cependant importants. La rapide comparaison du *Jahrbuch* avec, par exemple, le répertoire bibliographique français *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*<sup>55</sup> montre ainsi l'influence des perceptions nationales pour juger de l'appartenance d'un domaine à une discipline, pour le regroupement de domaines entre eux, regroupement dépendant de l'importance relative des différents domaines considérés.

Pour la classification du répertoire français, seuls trois grands domaines sont distingués (l'analyse mathématique, la géométrie et les mathématiques appliquées) domaines à l'intérieur desquels sont regroupés certaines des divisions présentes dans la classifica-

52. C'est le cas pour 4 des thèses soutenues à Paris. Par exemple, la thèse de Bratu en 1914, *Sur l'équilibre des fils soumis à des forces intérieures* n'est pas référencée directement. En revanche, Georges Bratu a publié en 1914 dans le *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* de Darboux un article *Figures d'équilibre d'un fil dont les éléments se repoussent mutuellement*, article classé par le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* en « mécanique ». C'est donc le classement que j'ai adopté. Autre exemple : la thèse de Popovici en 1908, *Sur les surfaces intégrales communes aux équations différentielles*. Ce cas est peut-être plus sujet à discussion. En 1908, le *Jahrbuch* recense un article de l'auteur qui semble concerner le sujet de sa thèse : *Sur les équations aux intégrales réciproques*, classé en « Calcul différentiel et intégral ». Mais une recherche dans le *Jahrbuch* à partir de mots du titre « surfaces intégrales » donne pour la période proche de 1908 l'article d'Émile Turrière, publié en 1909 dans les *Nouvelles annales*, *Sur certains systèmes orthogonaux du plan et sur les surfaces intégrales de l'équation de Laplace  $r + t = 0$* , et référencé en géométrie analytique de l'espace. J'ai donc pour ce cas particulier préféré référencer la thèse en géométrie (géométrie analytique), classement qui est confirmé à la lecture du rapport de thèse.

53. Il m'a paru important de ne choisir que des publications de la même période, de façon à tenir compte des évolutions de la classification du *Jahrbuch*.

54. Outre la thèse de Popovici en 1908, ce cas concerne 3 autres doctorats parisiens. Par exemple, la thèse de Marius Grandjean de 1902, *Sur le régime permanent graduellement varié qui se produit à la partie amont des tuyaux de conduite et sur l'établissement du régime uniforme dans ces tuyaux*, n'est pas référencée par le *Jahrbuch*, comme aucun autre article de l'auteur. J'ai alors effectué une recherche sur le titre en choisissant les termes « régime permanent graduellement varié ». Cette recherche a donné comme résultat deux notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* écrites par Joseph Boussinesq en 1890 portant le même titre : *Théorie du régime permanent graduellement varié qui se produit près de l'entrée évasée d'un tube fin, où les filets d'un liquide qui s'y écoule n'ont pas encore acquis leurs inégalités normales de vitesse* et classées toutes deux dans la section de « mécanique » (en « dynamique »). J'ai donc classé la thèse de Marius Grandjean en « mécanique ». J'ai procédé de la même manière pour les thèses de Casimir Monteil en 1905 et de Rousier en 1908.

55. Dirigé par la Société mathématique de France, ce répertoire est initié par des savants français dont Poincaré à la fin du XIX<sup>ème</sup> et sa publication dure de 1894 à 1912. Le travail de recensement ne s'étend que peu à des travaux mathématiques du XX<sup>ème</sup> siècle et je n'ai pu y trouver mention d'aucune des thèses soutenues entre 1900 et 1914. Cf. ROLLET et NABONNAND 2002.

tion du *Jahrbuch*<sup>56</sup>. Au sein de l'analyse mathématique, on trouve ainsi des domaines pourtant nettement séparés dans la classification du répertoire allemand tels que l'algèbre, l'arithmétique, le calcul des probabilités, la théorie des fonctions ou le calcul différentiel et intégral. La section « géométrie » regroupe des domaines référencés dans le *Jahrbuch* en « géométrie pure, élémentaire et synthétique » et en « géométrie analytique », la section « mathématiques appliquées » les questions de « mécanique », de « physique mathématique », d'« astronomie, mécanique céleste, géodésie », ainsi que de « philosophie et histoire des sciences mathématiques ».

## 1.3 Niveau un de l'analyse

Il s'agit à présent de procéder à une analyse quantitative du corpus des thèses mathématiques. La comparaison des résultats de cette analyse avec le bilan historiographique qui a été fait dans la première partie me permettra de voir comment l'utilisation de l'objet thèse permet de saisir des dynamiques globales de la recherche et de percevoir l'évolution des équilibres entre les domaines et le milieu mathématique ainsi approché<sup>57</sup>.

En utilisant le classement des thèses effectué à partir du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, je cherche dans un premier temps à compléter et à exploiter le tableau qu'a déjà établi Hélène Gispert GISPert 1991, p. 174 pour la période entre 1900 et 1910 et pour les thèses soutenues à Paris<sup>58</sup>. L'analyse de l'évolution des champs mathématiques va me permettre de voir quelles dynamiques sont perceptibles à l'étude du corpus des thèses et comment l'exploitation de ces données s'inscrit par rapport au bilan historiographique précédemment établi.

De façon à avoir des résultats exploitables au premier niveau de mon analyse, j'ai regroupé dans le tableau ci-dessous plusieurs rubriques du *Jahrbuch* entre elles de façon à créer des mots-clés de premier niveau<sup>59</sup>. Le domaine correspondant à la « géométrie » regroupe les sections « géométrie pure, élémentaire et synthétique » et « géométrie analytique » ; celui correspondant à l'« analyse » : « séries », « calcul

56. Cf. RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES 1898 and 1908 and 1916.

57. Pour mieux saisir des dynamiques globales et pour éviter des effets ponctuels qui pris ponctuellement pourraient altérer la pertinence de l'analyse, j'ai choisi de diviser les périodes que j'étudie en intervalles de cinq ans.

58. J'ai exclu les thèses que je n'ai pu classer, ce qui explique la différence entre le nombre total des thèses mentionné précédemment et le total que l'on trouve en faisant le total des tableaux ci-dessous. Remarquons d'ailleurs que l'essentiel des thèses qui n'étaient pas référencées directement dans le *Jahrbuch*, appartiennent au domaine des mathématiques appliquées (physique mathématique ou mécanique), signe qui confirme le statut particulier de ces disciplines comme l'a indiqué le bilan dressé précédemment.

59. Ce regroupement de rubriques et la création de mots-clés seront explicités dans le second chapitre pour la période entre 1914 et 1945.

différentiel et intégral » et « théorie des fonctions » ; celui correspondant aux mathématiques appliquées : « mécanique », « physique mathématique », « astronomie, géodésie, météorologie ». Je n'ai pas intégré les sections « algèbre » et « arithmétique inférieure et supérieure » à celle de l'analyse, contrairement au *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*, préférant leur conserver le statut indépendant de ce domaine vis-à-vis de l'analyse que leur accorde le *Jahrbuch*<sup>60</sup>. Entre 1900 et 1914, une unique thèse traite de questions de « Théorie combinatoire et calcul des probabilités » et je n'ai donc pas intégré ce champ disciplinaire dans mon tableau récapitulatif<sup>61</sup>. L'analyse du corpus de l'ensemble des thèses confirme ainsi le statut particulier de ce champ mathématique donné par le bilan précédent<sup>62</sup>. Il n'appartient ni au milieu mathématique académique de la recherche française entre 1900 et 1914, ni au milieu mathématique que permet de saisir le corpus des thèses<sup>63</sup>.

	algèbre et arithmétique		géométrie		analyse		mathématiques appliquées	
	Paris	Province	Paris	Province	Paris	Province	Paris	Province
1900-1904	2	0	1	3	11	0	4	2
1905-1909	1	0	3	1	10	0	9	2
1910-1914	4	0	3	0	10	0	13	3
Totaux	7	0	7	4	30	0	26	8

TABLE 1.1 – Sujets des thèses mathématiques entre 1900 et 1914

Les données ci-dessus montrent que durant les quinze premières années du XX<sup>ème</sup> siècle, l'analyse est de façon stable la discipline principale de l'activité mathématique des doctorants des universités. La géométrie, tout comme l'algèbre ou l'arithmétique, ne suscitent l'intérêt que de peu d'étudiants sur l'ensemble de la période. Ces premières constatations aboutissent ainsi à la même conclusion que le bilan précédent.

Mais plus précisément, l'étude de ce corpus complet de thèses permet de révéler une certaine importance de l'activité de recherche en mathématiques appliquées ainsi qu'une croissance de l'intérêt pour ces disciplines sur la période<sup>64</sup>. Ces deux caractéris-

60. Dans ce répertoire bibliographique, ces sections sont placées avant les sections de géométrie.

61. Il s'agit de la thèse de Bachelier en 1900, « Théorie de la spéculation ».

62. et plus précisément dans ARMATTE à paraître et GISPERT 1991.

63. Même si Borel investit, seul, ce domaine à partir de 1905, cf. LELOUP et GISPERT prévu pour 2009; BRU 1999b et le dernier chapitre de la présente thèse sur le calcul des probabilités.

64. Le nombre de thèses en mathématiques appliquées triple entre les cinq premières et les cinq dernières années étudiées.

tiques n'apparaissent pas dans le bilan historiographique que j'ai présenté<sup>65</sup>. L'étude du corpus des thèses se présente ainsi comme un moyen de révéler l'importance de ce domaine par rapport aux autres champs disciplinaires des sciences mathématiques françaises.

Avant d'analyser plus finement chacun des domaines évoqués, il faut signaler comment ces premières données permettent de rendre compte de l'activité mathématique des facultés de province ainsi que de sa nature.

Le tableau 1.2 ci-dessous cumule les thèses soutenues en province et à Paris, sans distinction de domaines<sup>66</sup>. Si on met en perspective ce tableau avec le précédent (tableau 1.1), on constate la faible part des thèses soutenues en province par rapport à Paris. De plus, ce sont d'autres mathématiques qui y sont travaillées. L'étude des sujets montre en effet que le domaine le plus abordé est celui des mathématiques appliquées. La géométrie vient ensuite. Le domaine de l'analyse ne fait l'objet d'aucun travail. Les intérêts de recherche en province apparaissent donc en décalage avec ceux de la capitale<sup>67</sup>. L'aspect uniquement parisien de la recherche, induit par l'étude de la Société Mathématique de France, se trouve alors confirmé. Cet équilibre entre Paris et la province justifie également l'idée qu'étudier les rapports des thèses soutenues à Paris permet de saisir les dynamiques françaises de la recherche académique.

	1900-1904	1905-1909	1910-1914
Paris	19 78%	23 86%	30 90%
Province	5	4	3
France	24	27	33

TABLE 1.2 – Nombre de thèses soutenues à Paris et en province entre 1900 et 1914

Pour la géométrie, toutes les thèses<sup>68</sup> référencées dans cette discipline appartiennent à la section « géométrie analytique » et leur titre se réfère systématiquement à l'étude de courbes et de surfaces. Le nombre des thèses d'algèbre et d'arithmétique (en fait principalement en arithmétique, en théorie des nombres et des formes) égale à Paris celui des thèses de géométrie. Même si le nombre de thèses soutenues dans ces domaines apparaît faible, et donc également leur part de l'activité mathématique, l'analyse quantitative de ces thèses particulières suit les mêmes conclusions que l'étude

65. ou du moins pas explicitement, hormis dans le tableau de GISPERT 1991, p. 174. Il n'en est cependant pas fait mention dans le corps du texte.

66. Il faut noter que pour la période de 1900 à 1914, l'université de Strasbourg fait partie de l'Allemagne et n'est pas comptée dans les thèses de province. Les universités de province où des thèses sont soutenues entre 1900 et 1914 sont les suivantes : Lyon (3), Toulouse (2), Grenoble (2), Nancy (2), Bordeaux (1), Besançon (1), Montpellier (1).

67. Notons toutefois que leur faible nombre ne permet pas de connaître leur réelle portée.

68. mis à part une à Lyon en 1906 de Paul Wiernsberger.



des articles dans les journaux de recherche français de la période. Et même si la classification du *Jahrbuch* a été utilisée pour référencer les thèses, l'étude révèle un intérêt (même minime) de mathématiciens français pour l'arithmétique, intérêt que montre Catherine Goldstein dans GOLDSTEIN 1999, en contournant les limites de ce répertoire par une étude spécifique des articles de théorie des nombres recensés en combinant plusieurs critères de sélection.

	Théorie des fonctions	Calcul différentiel et intégral	Séries
1900-1904	4	7	0
1905-1909	5	3	2
1910-1914	2	8	0

TABLE 1.3 – Thèses d'analyse à Paris entre 1900 et 1914

L'étude du corpus des thèses d'analyse montre comment se répartissent les différents sujets entre les domaines « théorie des fonctions », « séries » et « calcul différentiel et intégral ». Elle permet de confirmer l'attrait que suscitent ces différents thèmes dans les recherches des doctorants. Une analyse plus fine permet de préciser les conclusions de *La France mathématique* GISPert (1991). Le nombre de thèses dont le sujet appartient au domaine du calcul différentiel et intégral révèle comment les thèmes plus traditionnels de l'analyse française, étudiés par la génération de mathématiciens des Picard, Appell, Poincaré, Goursat et Painlevé, font l'objet de la majorité des travaux d'analyse sur la période. Le domaine du calcul différentiel et intégral est le domaine dominant en analyse pendant les cinq premières et les cinq dernières années de la période, avec une inversion de cet équilibre pour les thématiques de théorie des fonctions et des séries entre 1905 et 1910<sup>69</sup>. Cette constatation ne trouve pas d'échos dans les différents ouvrages consultés pour dresser le bilan historiographique précédent.

On peut se poser la question des limites de notre analyse quantitative tout d'abord en raison de la pertinence du découpage temporel choisi. La mesurer renvoie à des critères de nouveauté de la production mathématique, de durée à partir de laquelle on (et qui ?) peut juger qu'un domaine a évolué. La discussion ne pourra être menée dans le cadre de ce travail qui se contente de poser cette interrogation. De plus, on peut également s'interroger sur la classification qui est faite selon le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. En prenant par exemple le cas de la théorie des fonctions, le découpage des classifications du *Jahrbuch* ne permet pas de saisir les évolutions de dynamiques plus précises internes à chaque domaine. En effet, les divisions du chapitre VII « Théorie des fonctions » (VII.1. Généralités, VII.2. Fonctions particulières, divisé en A. Fonctions élémentaires (y compris les fonctions Gamma et les séries hypergéométriques), B. Fonctions elliptiques, C. Fonctions hyperelliptiques, fonctions d'Abel

69. En additionnant les thèses de théorie des fonctions et sur les séries on obtient près du double de celles de calcul différentiel et intégral.

et fonctions du même type<sup>70</sup>, et D. Fonctions circulaires et fonctions apparentées) ne permettent pas directement de répartir les thèses parmi les trois thématiques dominantes du sujet, décrites par Hélène Gispert dans *La France mathématique* GISPERT (1991) : la théorie de la variable complexe, les fonctions de la variable réelle ainsi que la représentation des fonctions les séries de fonctions. La prise en compte de ces problématiques est cependant rendue possible par les rapports de thèses, comme je vais le montrer dans les prochains paragraphes.

Ainsi, sans rentrer dans le détail<sup>71</sup>, ce travail montre l'intérêt des étudiants et/ou de leurs patrons à la fois pour les disciplines traditionnelles, ainsi que pour les champs de la théorie des fonctions<sup>72</sup>. L'étude simple du corpus des thèses, sans les rapports, ne permet pas de révéler la nouveauté ou l'innovation contenue dans les travaux. En revanche, elle permet de mettre en évidence des équilibres relatifs globaux entre les domaines de recherche. Les rapports de thèses vont permettre parfois, comme l'a déjà montré Hélène Gispert pour le cas particulier de la théorie des ensembles, de révéler de quelle façon certaines théories sont travaillées et assimilées dans le travail de doctorat.

	Mécanique	Physique mathéma- tique	Astronomie, géodésie, météorologie
1900-1904	2	2	0
1905-1909	4	2	3
1910-1914	2	3	8

TABLE 1.4 – Thèses de mathématiques appliquées à Paris entre 1900 et 1914

J'ai signalé précédemment la part du domaine des mathématiques appliquées parmi les sujets d'étude des doctorants entre 1900 et 1914, part sous-estimée si on ne se fonde que sur le bilan historiographique que j'ai dressé précédemment. Certes, ce domaine regroupe plusieurs disciplines comme la mécanique, la physique mathématique et également l'astronomie. Mais les conclusions de l'étude des articles parus dans les journaux mathématiques français ainsi que de *l'Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* ne permettaient pas de soupçonner leur importance relative

70. Traduction choisie pour « verwandte ».

71. Ce travail nécessiterait une étude exhaustive et fine à la fois des rapports de thèses et des thèses en elles-mêmes, qui, pour cette période n'entre pas dans le cadre de ma thèse. Elle sera menée en partie pour les thèses de 1914 à 1945.

72. Savoir en effet exactement qui de l'étudiant ou du patron décide du sujet de la thèse est une question toujours ouverte. Je discuterai de ce point ultérieurement plus particulièrement pour la période de l'entre-deux-guerres. La part de l'influence de ces patrons sur les choix de sujet reste ainsi encore inconnue et les rapports de thèses ne fournissent d'ailleurs pas de renseignements explicites à ce sujet.

par rapport à l'analyse. À la faculté des sciences de Paris, entre 1910 et 1914, le nombre de thèses de mathématiques appliquées soutenues est supérieur à celui des doctorats classés en analyse. L'étude plus fine de la répartition des sujets dans les différents domaines construits par le *Jahrbuch* montre que le pôle constitué par la mécanique et la physique mathématique est stable sur toute la période et correspond à la moitié des thèses d'analyse. En revanche le nombre des thèses dont le sujet est référencé par le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* dans la section « astronomie, géodésie, météorologie », et plus précisément dans la division « astronomie » de ce chapitre<sup>73</sup>, augmente de façon importante à partir de 1905. La hausse, particulièrement forte entre 1910 et 1914, explique la supériorité, en nombre, des thèses de mathématiques appliquées sur les thèses d'analyse.

L'astronomie est un domaine en marge du milieu mathématique académique, un point aveugle du bilan historiographique classique sur la période du début du XX<sup>ème</sup> siècle. Il se développe indépendamment du milieu académique traditionnel dans des lieux séparés géographiquement, tels que les observatoires, hors des facultés des sciences, de l'Académie des sciences, du Collège de France. L'étude du corpus des thèses apparaît donc comme un moyen de percevoir des dynamiques internes à ce domaine, d'approcher ce milieu spécifique qui appartient aux sciences mathématiques entre 1900 et 1914 et également entre 1914 et 1945.

En ce qui concerne les domaines de la mécanique et de la physique mathématique, le corpus des thèses apparaît ici aussi comme un moyen privilégié d'accéder à des informations sur les évolutions globales de ces domaines, décrite historiographiquement en marge du milieu mathématique académique plus traditionnel. Notons également que la distinction entre les deux disciplines n'est pas évidente dès ce début du XX<sup>ème</sup> siècle. Ce sont ces thèses qui ont été le moins bien référencées par le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* et le découpage entre ces deux domaines dépend peut-être d'intérêts nationaux. En effet dans certains des rapports de thèses classées en mécanique par le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*<sup>74</sup>, on trouve mentionnée l'appartenance des questions étudiées à la physique mathématique.

Le public des doctorants français en sciences mathématiques ne se compose pas uniquement de membres de la Société mathématique de France. En se référant aux noms des auteurs des thèses dont les rapports figurent en annexe de *La France mathématique* GISPERT (1991), on peut analyser les domaines auxquels appartiennent les thèses soutenues par les sociétaires. Sur 41 thèses, entre 1900 et 1914, 4 appartiennent au domaine de l'« algèbre et l'arithmétique », 5 à celui de la « géométrie », 26 à celui

73. à deux exceptions près : la thèse de Paul Helbronner en 1912 *Résumé des opérations exécutées jusqu'à la fin de 1911 pour la description géométrique détaillée des Alpes françaises* et la thèse d'Alphonse Blondel en 1912 *Sur la théorie des marées dans un canal. Application à la Mer Rouge*.

74. comme par exemple pour la thèse de Granjean, en 1902.

de l'« analyse » (14 en « calcul différentiel et intégral », 12 en « théorie des fonctions et séries »), 6 à celui des « mathématiques appliquées ». La proportion de thèses d'analyse est donc beaucoup plus forte. En comparaison, les thèses en « mécanique appliquée » sont en nombre beaucoup plus faible. En regardant plus précisément, on constate qu'aucun membre de la Société mathématique de France ne soutient de thèse en astronomie ou mécanique céleste. Le milieu mathématique que permet de saisir l'analyse de l'ensemble du corpus des thèses est donc plus vaste que celui de la recherche mathématique académique classique. Il permet d'inclure certains des domaines à la marge de ce milieu mathématique, ceux qui touchent à la mécanique et à la physique mathématique et qui peuvent être plus proches des milieux des sciences de l'ingénieur. Il permet également d'inclure une partie du milieu des astronomes<sup>75</sup>. Il faut cependant relever l'absence quasi totale, mis à part Bachelier en 1901, de représentants du domaine de la théorie des probabilités. Le corpus des thèses ne permet donc pas de rendre compte de dynamiques de recherches propre à des milieux tels que celui des actuaires.

Je viens de voir comment l'apport et les limites de l'analyse quantitative des rapports de thèses pour approcher un certain milieu académique des sciences mathématiques ainsi que ses équilibres de recherche. L'étude des corpus des rapports des soixante-douze thèses soutenues à la faculté des sciences de Paris va me permettre d'affiner et de compléter les résultats obtenus au premier niveau de l'analyse, en donnant notamment d'autres informations à la fois sur les personnalités impliquées dans l'élaboration de la thèse, sur le travail mathématique en lui-même et sur le jugement des travaux par certains acteurs du milieu.

## 1.4 Les jurys et les rapports de thèses

L'une des spécificités de la thèse par rapport aux autres publications de recherche mathématique réside dans le but initial de sa réalisation : l'obtention du grade de docteur ès sciences de la faculté des sciences où le doctorant soutient son travail. L'une des composantes de l'objet doctorat<sup>76</sup> est ainsi le rapport écrit par un membre de la faculté des sciences, dans lequel ce dernier décrit et juge les problèmes posés, les méthodes utilisées, les résultats obtenus ainsi que leur portée<sup>77</sup>. La composition des

---

75. De tels renseignements sont parfois présents dans les rapports de thèses. Certains précisent ainsi le statut du doctorant, auteur du mémoire. On peut évoquer par exemple Vergne (1909), ingénieur de l'École centrale, auteur d'une thèse de mécanique, Louis Roy (1911), membre de la société française d'électricité et auteur d'une thèse de physique mathématique, ou encore Caubet (1910), calculateur à l'observatoire de Toulouse.

76. Tel que je l'ai déjà présenté en introduction de la présente thèse.

77. Je reviendrai plus en détail dans le deuxième chapitre sur les critères officiels et officieux que doivent respecter les rapports de thèse. Je souligne ici les spécificités du rapport pour la période entre 1900 et 1914.

rapports reste stable entre 1900 et 1914. Les différences viennent des auteurs. Chaque mathématicien a son propre style d'écriture et fait le choix d'entrer, ou non, dans les détails du mémoire. La forme des rapports varie cependant peu entre 1900 et 1914<sup>78</sup>.

Seuls les rapports des thèses soutenues à la faculté des sciences de Paris sont disponibles. Entre 1900 et 1914, ils sont consultables aux Archives Nationales aux cotes AJ 16 5537, AJ 16 5538, AJ 16 5539, AJ 16 5540, AJ 16 5541<sup>79</sup>.

La connaissance de ce corpus m'a permis de constituer une base de données sur les thèses entre 1900 et 1914 qui se fonde sur le même modèle que celle constituée pour la période de l'entre-deux-guerres<sup>80</sup>. La base de données a ainsi 12 entrées pour chaque doctorat, qui sont les suivantes : année de soutenance du doctorat, nom du doctorant, titre du doctorat, cote du rapport de thèse aux Archives Nationales, nom du président du jury, nom du rapporteur, nom des autres membres du jury, mention obtenue par le doctorant, classement dans le *Jahrbuch*, informations sur la publication du mémoire ou justification du classement, ville de la faculté des sciences, nombre de pages du mémoire. Toutes les entrées ne sont pas systématiquement renseignées, auquel cas elles sont laissées vides<sup>81</sup>.

Les indications de publications des mémoires données par le *Jahrbuch* fournissent pour la période entre 1900 et 1914 quelques indices sur l'audience des travaux et sur leur importance. L'essentiel des mémoires publiés en tant que « Thèse »<sup>82</sup> paraissent chez Gauthier-Villars, maison d'édition où est publiée à l'époque une grande partie des ouvrages mathématiques de recherche. Quelques doctorats paraissent également en tant que thèse chez Hermann ou chez Privat à Toulouse. En outre, certains d'entre eux sont ensuite republiés dans des journaux mathématiques comme par exemple le *Journal des mathématiques pures et appliquées*, le *Journal de l'École polytechnique*, les *Annales de l'École normale supérieure*, *Acta Mathematica*, journaux de diffusion des travaux de recherche<sup>83</sup>. Cette diffusion situe d'emblée les travaux de thèse comme des travaux de la production normale de recherche.

---

78. Il en sera d'ailleurs de même jusqu'en 1945.

79. Les rapports sur les thèses soutenues par les membres de la SMF se trouvent également dans l'ouvrage d'Hélène Gispert GISPert 1991.

80. dont je donne une description dans le chapitre suivant.

81. Par exemple, pour les thèses soutenues en province, les membres du jury, la cote aux Archives nationales, ainsi que la mention obtenue par le doctorant ne sont pas connus.

82. Cette précision est indiquée par le *Jahrbuch* pour la période entre 1900 et 1914, seul répertoire que j'ai consulté pour recenser les données concernant les maisons d'édition entre 1900 et 1914, car je n'ai pas consulté les thèses en elles-mêmes.

83. Je n'ai cependant pas pu trouver de corrélations entre les domaines abordés dans les thèses et la mention d'une double parution, ni interpréter ces données de façon plus précise.

### 1.4.1 Les « patrons » mathématiques dans les jurys

Dans la réalisation et l'achèvement d'un doctorat, interviennent d'autres mathématiciens en plus du doctorant : les membres du jury de la thèse. Deux figures (parfois confondues) de ce jury jouent un rôle particulier : le président et le rapporteur, chargés de lire le travail et de le juger. De ce fait, les membres des jurys occupent un rôle institutionnel crucial, au moins au sein du milieu mathématique universitaire. Ils accordent les droits d'entrée dans le milieu de la recherche mathématique. De ce point de vue, leur influence s'exerce à plus long terme sur l'ensemble du milieu mathématique. La connaissance des membres de jury permet donc de saisir un aspect de l'exercice du pouvoir institutionnel au sein de la faculté des sciences de la Sorbonne. Elle apporte un éclairage sur les mathématiciens qui y jouent un rôle et permet de voir comment évoluent les influences des « patrons » mathématiques qui participent à l'achèvement des travaux de thèse<sup>84</sup>.

Les différences entre la forme et le contenu des deux rapports (rapport sur le mémoire, rapport de soutenance) ainsi que les différences entre les tâches administratives imparties aux deux fonctions de président et de rapporteur amènent à traiter séparément ces deux activités. Notons d'ailleurs qu'est mentionné sur le manuscrit de la thèse le nom du président ainsi que le nom des autres membres du jury, mais il n'y est pas mentionné le nom du rapporteur. La connaissance de cette information n'est possible que par la consultation des rapports aux Archives nationales. Cette différence d'accès à l'information rend donc encore plus nécessaire la distinction des deux fonctions.

#### Les présidents de jury

	Darboux	Appell	Picard	Poincaré	Painlevé	Andoyer
1900-1904	5	7	6	0	0	0
1905-1909	2	14	3	4	1	0
1910-1914	4	11	11	3	0	1
Totaux	11	32	20	7	1	1

TABLE 1.5 – Présidents des jurys des thèses de la Sorbonne entre 1900 et 1914

La charge de président de jury est une charge uniquement institutionnelle. Entre 1900 et 1914, seulement six mathématiciens sont sollicités. La fonction de président est d'autant moins partagée que deux scientifiques, Picard, et surtout Appell, l'occupent de façon écrasante sur l'ensemble de la période. Darboux et Poincaré ne sont présidents que d'un nombre bien plus faible de jurys. Painlevé, comme Andoyer, ne préside le jury

<sup>84</sup>. Le terme « patrons » renvoie ici à l'article LELOUP et GISPERT prévu pour 2009 où il y est explicité.

que d'un unique doctorat. Se manifeste ainsi de façon certaine le poids institutionnel du poste de doyen de l'université, poste occupé par Appell pendant l'essentiel de cette période<sup>85</sup>, et dont le bilan historiographique précédent n'établissait pas l'importance. L'étude des présidents de jury de thèse permet alors de montrer comment s'exercent les poids institutionnels au sein de la faculté des sciences, l'un des centres du milieu mathématique français.

Si on fait de plus le lien entre les thématiques des thèses et l'identité des présidents de jurys, on peut remarquer que Darboux est le président de l'essentiel des thèses classées en géométrie dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*<sup>86</sup>. Il s'agit certes du seul domaine où ce rapprochement est pertinent. Il témoigne cependant d'une certaine emprise du mathématicien sur le domaine de la géométrie et peut éclairer la faible importance des travaux de recherche français relatifs à cette discipline. L'influence exercée par Darboux serait l'un des facteurs qui a freiné le renouvellement français de ce domaine.

### Les rapporteurs de thèse

La fonction de rapporteur de thèse est partagée entre un plus grand nombre de mathématiciens : treize. Une explication tient à la condition institutionnelle nécessaire à respecter pour être président de jury : être professeur titulaire d'une chaire de sciences mathématiques. Davantage de mathématiciens peuvent occuper la fonction de rapporteur<sup>87</sup>.

	Picard	Boussinesq	Appell	Koenigs	Goursat	Hadamard	Painlevé
1900-1904	6	2	1	3	3	0	2
1905-1909	4	3	2	1	1	1	5
1910-1914	7	3	2	0	3	2	3
Totaux	17	8	5	4	7	3	10

	Darboux	Borel	Poincaré	Andoyer	Puiseux	Drach
1900-1904	0	0	0	0	0	0
1905-1909	1	2	2	1	0	0
1910-1914	2	2	3	2	2	1
Totaux	3	4	5	3	2	1

TABLE 1.6 – Rapporteurs des jurys des thèses de la Sorbonne entre 1900 et 1914

85. Pour être plus précis il devient doyen de la faculté des sciences de la Sorbonne à partir du premier avril 1903 et le reste jusqu'en 1920, cf. CHARLE et TELKES 1989.

86. À une exception près, pour la thèse de Lattès en 1906, *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation*. Elle est classée en géométrie analytique et le président de son jury est Painlevé.

87. Je reviendrai dans le chapitre suivant sur les conditions officielles et officieuses que doit vérifier un mathématicien pour être membre d'un jury de thèse.

Si on regarde la population des rapporteurs, force est de constater le rôle central de Picard qui a en charge près de deux fois plus de thèses que Painlevé, qui est le deuxième plus fréquent. Sont également présents de façon importante Boussinesq et Goursat. Par rapport aux personnalités que le bilan historiographique précédent avait permis de mettre en évidence, on remarque que la population des rapporteurs présente une composition et un équilibre différents. Boussinesq a ici un poids équivalent à celui de Painlevé, Goursat sans parler de Borel ou Poincaré.

En fait lorsque on établit des correspondances rapides entre les rapporteurs et les thématiques des thèses sur lesquelles ils rapportent, on remarque que certains sujets sont exclusivement traités par une seule personne. C'est ainsi que Boussinesq rapporte sur l'essentiel des thèses référencées par le *Jahrbuch* en physique mathématique. L'exploitation de cette information donne lieu à plusieurs interprétations.

Cette place prépondérante souligne en fait l'absence d'autres mathématiciens rapporteurs significatifs dans les domaines de la physique mathématique et de la mécanique. Cette dernière interprétation tendrait à confirmer un intérêt restreint des mathématiciens français à la recherche dans ces domaines. En comparaison, le nombre de mathématiciens impliqués dans l'écriture des rapports des thèses d'analyse<sup>88</sup> apparaît significatif de la dynamique de ce domaine.

Il reste à savoir quel rôle intellectuel réel joue Boussinesq. Il faudrait pour cela étudier comment sa présence prépondérante se traduit dans les travaux effectués, ce qui nécessiterait une lecture attentive des thèses concernées. Cependant une première lecture des rapports de ces thèses atteste que dans le cas particulier des thèses de physique mathématique et de mécanique, Boussinesq revendique une influence intellectuelle. Ainsi dans plusieurs rapports<sup>89</sup>, Boussinesq évoque explicitement ses propres travaux ou ses différents enseignements comme origine directe des recherches qui sont effectuées dans le travail de thèse. Il cite plusieurs de ses publications, y compris des parutions récentes et contemporaines des doctorats, faisant des liens avec ses propres résultats et ceux qui sont présentés dans le cadre du mémoire sur lequel il rapporte<sup>90</sup>.

À cet égard, le corpus des rapports de thèses joue ici un rôle particulier. Il permet de saisir des influences intellectuelles, des échanges intellectuels entre les mathématiciens confirmés et les mathématiciens débutants que sont les doctorants. D'un accès

---

88. C'est le cas de Goursat, Painlevé, Picard, Borel et Hadamard.

89. notamment ceux d'Estenave en 1900, Grandjean en 1902, Monteil en 1905, et surtout Rousier en 1908, ainsi que Roy en 1910 et Annycke en 1911.

90. En particulier, dans la thèse de Rousier en 1908, « Ondes par émergence », Boussinesq évoque ses propres méthodes pour résoudre les équations de propagation plane des ondes par émergence et trouver le potentiel des vitesses des ondes. Il décrit également comment les travaux de Rousier complètent ses propres recherches, sur lesquelles il publie encore lors de la soutenance de la thèse. Une note aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, rédigée par Boussinesq est référencée en 1910 par le *Jahrbuch* sous le titre exact « Propagation verticale aux grandes profondeurs, du mouvement des ondes par émergence dans le cas d'un canal ou d'un bassin horizontalement indéfini ».



plus abordable que le corpus même des thèses intégrales, il donne dans certains cas, comme pour Boussinesq ici, de premiers éléments d'informations concernant les mathématiques qui sont travaillées et les mathématiciens à l'origine des travaux sur ces mathématiques.

### Les rapporteurs des thèses d'analyse

L'étude des mathématiciens impliqués dans l'écriture des rapports de thèses d'analyse fait ressortir un équilibre différent de celui donné par le bilan historiographique. À côté de Picard, Painlevé et Goursat occupent une place insoupçonnée parmi les mathématiciens importants en analyse. Ils sont tous les trois respectivement chargés de 8, 9 et 7 rapports de thèses en analyse sur un total de 30 mémoires classés dans ce domaine. En outre, pour Painlevé et Goursat, ces rapports représentent l'essentiel des rapports qu'ils écrivent sur cette période<sup>91</sup>.

Cette différence révèle des distinctions à faire entre le milieu de la recherche académique d'exception et le milieu académique où les mathématiques sont couramment et traditionnellement travaillées. C'est le deuxième milieu que permet davantage de saisir le corpus des thèses mathématiques. On peut cependant nuancer cette affirmation dans la mesure où le travail demandé aux rapporteurs nécessite une volonté et une disponibilité que certains mathématiciens ne souhaitent pas y consacrer. La participation de certains d'entre eux peut alors révéler des liens existant entre les mathématiciens confirmés et les étudiants.

### Les rapporteurs des thèses d'astronomie

Notons enfin, conformément à ce que l'analyse des sujets de thèse a permis de voir, la présence parmi les rapporteurs d'astronomes, Andoyer et Puiseux, dont les thèmes de recherche sont en astronomie. Astronomes, ils ont été occultés dans le bilan historiographique.

En regardant plus particulièrement les membres des jurys des 11 thèses d'astronomie soutenues à Paris, on remarque la présence de Poincaré à la fois en tant que rapporteur et en tant que président. Poincaré préside ainsi le jury de quatre thèses en astronomie, Appell en préside trois, et rapporte sur cinq doctorats de ce domaine.

Cette étude de la composition des jurys des thèses d'astronomie permet donc de voir qui, entre 1900 et 1914, représentent au sein de la faculté des sciences de la Sorbonne le domaine de l'astronomie décrit à la marge du milieu mathématique traditionnel. Cette étude révèle également un rôle particulier que semble jouer Poincaré. Il semble cependant difficile d'en mesurer la portée : l'étendue des capacités mathéma-

---

91. Painlevé en écrit 10 au total et Goursat 7. Parmi les autres rapporteurs de thèses en analyse figurent Borel (3), Hadamard (2), Appell (1), Koenigs (1), Poincaré (1).

tiques de Poincaré fait-elle de ce dernier le seul mathématicien capable de comprendre les thèses d'astronomie et d'en écrire un rapport ? Si tel était le cas, la position de l'astronomie et celle de la mécanique céleste à la frontière des sciences mathématiques se trouvent d'autant plus confirmées. Poincaré pourrait-il avoir une influence sur les divers travaux qui sont faits dans cette discipline ?

Sur ces questions, l'étude plus précise des rapports de thèse permet d'apporter quelques éléments de réponse. Dans tous les rapports des thèses référencées en astronomie<sup>92</sup>, il n'est fait référence à aucun moment de travaux de Poincaré alors que des travaux d'Andoyer<sup>93</sup> sont mentionnés. Il s'agit essentiellement de rendre compte de calculs, de méthodes employées pour mener ces calculs et de leur résultats. Cette étude des rapports permet de mesurer l'absence d'influence intellectuelle de Poincaré tout en éclairant sa position institutionnelle dans la faculté des sciences. Cela confirme la situation particulière du champ disciplinaire de l'astronomie dans le milieu mathématique.

### Le rôle central de Picard

En étudiant maintenant l'ensemble des deux populations des rapporteurs et des présidents, sans distinction disciplinaire, la constatation la plus manifeste est la présence centrale de Picard, à la fois comme président et comme rapporteur. Il apparaît ainsi à la fois sur le plan institutionnel mais également sur un plan plus intellectuel comme détenteur d'une certaine autorité sur le milieu mathématique et comme la personnalité centrale dont il faut obtenir l'aval et l'approbation pour que les travaux soient acceptés. Ce poids institutionnel et intellectuel était également manifeste dans le bilan historiographique précédent. Picard, par son soutien aux nouvelles recherches d'analyse en théorie des fonctions et en calcul fonctionnel, avait en effet contribué à leur développement et à leur émergence au début du XX<sup>ème</sup> siècle. L'étude de la population des membres de jury apparaît alors comme un moyen pertinent d'accéder à cette information. L'analyse de leur composition montre comment cette influence institutionnelle et intellectuelle se traduit au sein de la faculté des sciences et les conclusions peuvent être étendues au milieu mathématique académique.

Il ne s'agit cependant pas dans le cadre de cette partie d'analyser plus finement les liens qui peuvent exister entre les rapporteurs et les thématiques des thèses qu'ils rapportent<sup>94</sup> ni de mesurer plus précisément et plus globalement le rôle intellectuel que peuvent jouer les différents mathématiciens par rapport à la population des doctorants.

---

92. Il s'agit des thèses de Fayet, Saint-Blancat en 1906, Lambert en 1907, Caubet en 1910, Blondel, Véronnet, Nicolau, Helbronner en 1912, Fassbinder et Troussel en 1913.

93. par exemple dans les thèses de Caubet ou Troussel.

94. Cette analyse est réservée à la période entre 1914 et 1945.

Une telle analyse nécessiterait une analyse plus approfondie de l'ensemble des rapports des thèses.

Il faut remarquer que la population des rapporteurs et des jurys de thèse ne peut correspondre de façon exacte à l'ensemble des mathématiciens à la pointe de la recherche mathématique académique française. C'est d'ailleurs l'une des explications aux différences avec le bilan précédent. La raison essentielle réside dans les conditions institutionnelles nécessaires à remplir pour pouvoir être rapporteur ou président. Un mathématicien en début de carrière ne peut ainsi intervenir tant qu'il n'est pas nommé à un poste à la faculté des sciences de la Sorbonne. Borel, par exemple, n'a que trente ans au début de la période. Il est chargé de cours en 1904 puis nommé professeur titulaire en 1909, ce qui empêche une prise en compte pertinente de ce mathématicien dans l'étude des membres de jury.

Cette étude permet de révéler comment s'exercent les positions institutionnelles dans les jurys de thèses. Elle montre un équilibre entre les mathématiciens qui confirme globalement celui dressé dans le premier bilan mais qui apparaît cependant décalé du fait, notamment, du délai que doivent attendre les jeunes mathématiciens avant d'occuper les fonctions institutionnelles permettant d'être rapporteur ou président. Se trouvent cependant révélés certains mathématiciens comme Boussinesq dont l'influence sur le domaine de la physique mathématique au sein de la faculté des sciences de la Sorbonne apparaît manifeste.

### 1.4.2 Les rapports de thèse

Il ne s'agit pas ici de procéder à une exploitation exhaustive et précise du corpus des rapports de thèses pour la période entre 1900 et 1914. Mon intérêt porte sur la façon dont une analyse partielle des rapports permet d'affiner et de confirmer les premiers bilans dressés par l'historiographie existante de la période, en mettant en évidence certaines dynamiques du milieu mathématique français. Je tenterai pour cela de montrer quelles sont les caractéristiques principales des rapports de thèses en présentant les informations pertinentes qu'ils fournissent.

#### Une évaluation des travaux

Le corpus des rapports des thèses soutenues à la faculté des sciences de Paris est un corpus original dans la mesure où, pour l'essentiel des thèses, sont exprimés des jugements précis et parfois argumentés de façon systématique sur les travaux mathématiques présentés. Le rapporteur peut ainsi profiter de ce lieu pour exprimer son avis sur les résultats présentés dans le mémoire, sur les méthodes employées, sur l'utilité du travail. Il peut même y donner sa conception de l'avenir des mathématiques et de la

« Science » en général, dans lequel il inscrit la contribution de la thèse sur laquelle il rapporte<sup>95</sup>.

Une insistance particulière est parfois mise sur la nouveauté de la recherche et sur les avancées que permettent les thèses. Cette insistance n'est le fait ni d'un unique rapporteur ni d'une seule phrase circonstanciée dans un rapport de soutenance. Elle se retrouve dans plusieurs rapports de thèses. La lecture de ces rapports permet donc de connaître pour certains travaux quel point de vue défend le représentant de la communauté mathématique. Il est ainsi intéressant de relever les thèses qui suscitent les réactions les plus louangeuses et celles qui n'en suscitent pas, d'étudier comment certains rapporteurs mettent en avant certaines d'entre elles par rapport aux autres. On peut ainsi saisir des équilibres entre les différents domaines mathématiques.

Certains doctorats sont en effet qualifiés d'« exceptionnels » dans les rapports. Parmi ceux-ci, on relève particulièrement les thèses de Lebesgue en 1902, Fréchet en 1907, Denjoy en 1909 et Lévy en 1911<sup>96</sup>. Ces éloges ne sont pas le fait d'un ou de plusieurs mathématiciens enclins à systématiquement exagérer l'importance d'un travail. En effet, Picard, Hadamard, Borel et Poincaré (rapporteurs respectifs des thèses de Lebesgue, Fréchet, Denjoy et Lévy) écrivent d'autres rapports beaucoup moins élogieux<sup>97</sup>. Ces quatre thèses sont des thèses d'analyse, ce qui confirme en quelque sorte le statut particulier de ce domaine comme le domaine d'excellence de la recherche mathématique française entre 1900 et 1914.

À côté de ces quatre thèses, un certain nombre d'autres, en moyenne les deux tiers, sont qualifiées d'« excellentes », de « remarquables », ou encore « du plus grand intérêt », comportant des « résultats nouveaux », ou encore « originaux »<sup>98</sup>.

95. Hadamard, dans le rapport sur la thèse de Fréchet en 1907, écrit par exemple : « Le travail de M. Fréchet apporte une contribution d'une extrême importance à une branche de la Science que je considère comme appelée à prendre dans l'avenir une grande extension, et qui est le Calcul Fonctionnel. »

96. Dans chacune de ces thèses, on trouve au moins une phrase semblable à celle écrite par Borel, en 1910 dans le rapport de Denjoy : « c'est assurément l'un des meilleurs travaux qui aient été présentés à la Faculté depuis plusieurs années », ou encore Hadamard pour le travail de Fréchet en 1907 : « nous pensons que ce travail est un de ceux qui méritent le plus l'approbation de la Faculté ».

97. Hadamard, par exemple est ainsi plus tempéré dans le rapport de la thèse de Samuel Lattès en 1906 (« Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante »). Hadamard en souligne les limites tout en reconnaissant le sérieux du travail. Dans le rapport de thèse de Brouwer, en 1902, il critique également le manque de rigueur dans certaines démonstrations de l'auteur.

98. D'autres, en revanche, ne voient pas leur recherche et leur mémoire valorisés par le rapporteur. On peut ainsi évoquer par exemple la thèse de Michel en 1901 (« Sur les applications géométriques du théorème d'Abel ») au sujet de laquelle, Goursat affirme : « Le mémoire de M. Michel ne saurait être comparé pour ses qualités d'invention à quelques-unes des remarquables thèses qui ont été soutenues devant la Faculté depuis quelques années ». Autres exemples les rapports (de thèse et de soutenance) sur le mémoire de Popovici en 1908 décrivent un travail pour lequel « l'intérêt n'est plus le même que par le passé » et Painlevé, comme Darboux, signalent la faiblesse du contenu mathématique de la thèse. On peut encore citer la thèse de Reveille en 1905 dont le sujet est décrit par Koenigs comme ne « prêtant pas à des recherches bien profondes ».

En revanche, les six thèses référencées en géométrie grâce au *Jahrbuch* ne semblent pas, à la lecture des rapports, contenir particulièrement des travaux « excellents », « nouveaux » ou « originaux ».

Quant aux thèses d'arithmétique, elles constituent en elles-mêmes un corpus particulier dans la mesure où les rapports sont systématiquement élogieux sur les travaux présentés, dès lors que le travail fait apparaître, selon le rapport, des liens forts avec la théorie des fonctions : on évoquera ainsi les mémoires de Cotty, Châtelet, Got et Chapelon, ou encore les applications des nouveaux outils de la théorie des fonctions à la théorie des fractions continues dans la thèse de Montessus de Ballore.

Les thèses comprenant des applications à des théories très concrètes ne bénéficient globalement pas du même jugement que les thèses plus théoriques. Les réflexions personnelles des rapporteurs sur l'intérêt et la portée des travaux y sont moins fréquentes. En revanche, une « grande habileté dans les calculs » est souvent signalée<sup>99</sup>. Dans quelle mesure est-ce significatif de l'intérêt du milieu ? Le rapport qu'écrit Painlevé sur la thèse d'Esclangon en 1904 est un exemple significatif, à mon sens, du manque d'intérêt des mathématiciens français de l'époque pour les thèses plus appliquées. Painlevé, tout en reconnaissant la qualité du travail, semble plus mitigé que dans les autres rapports qu'il écrit : il ne parle pas d'effort exceptionnel, mais « méritoire », tout en évoquant une « intéressante application de ses résultats à la météorologie ». Cette spécificité du jugement exprimé par les rapporteurs sur les domaines de mathématiques appliquées semble en tout cas confirmer le statut à part de ces domaines dans le milieu académique français de l'époque.

## Une description des travaux

Le but du rapport est également de décrire plus ou moins précisément les travaux présentés dans le mémoire de doctorat. Le rapport résume les recherches effectuées par le doctorant et dans certains cas les catégorise. Certains rapporteurs précisent à quel(s) domaine(s) mathématique(s) appartiennent, de leur propre point de vue, les questions traitées par le doctorant.

Ces renseignements permettent alors d'affiner la caractérisation des travaux, préalablement réalisée à partir du répertoire bibliographique du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* et donc de contourner certains biais de ce premier classement.

Par exemple la thèse de Raymond Alezaïs<sup>100</sup> ou encore celle de Traynard<sup>101</sup> sont toutes les deux référencées par le *Jahrbuch* dans le chapitre « Théorie des fonctions ».

99. Comme par exemple dans le rapport pour la thèse de mécanique de Burileanu (« Méthode de ballistique extérieure », 1901), ou dans celui de la thèse d'astronomie de Lambert (« Sur les coefficients du développement de la fonction perturbatrice »).

100. *Sur une classe de fonctions hyperfuchsienues*, 1901.

101. *Sur les fonctions thêta de deux variables et les surfaces hyperelliptique*, 1907.

Cependant dans les deux cas, les rapports font explicitement mention de nombreuses questions d'arithmétique. La thèse de Michel<sup>102</sup> est référencée en « Théorie des fonctions » et Goursat décrit très précisément dans le rapport que ce dernier s'intéresse aux interprétations géométriques des intégrales qu'il considère. Autre exemple, la thèse de Lebesgue<sup>103</sup>, référencée dans le chapitre « Calcul différentiel et intégral. Intégrales précises » du *Jahrbuch*, alors que le rapport de Picard indique qu'elle « se rapporte aux points les plus délicats de la théorie des fonctions réelles ». De même des thèses classées par le *Jahrbuch* en mécanique, sont désignées comme un travail de physique mathématique par Boussinesq<sup>104</sup>.

À la lecture des rapports, on perçoit donc certaines limites de l'utilisation du répertoire bibliographique liées au classement qu'il fait des mémoires et au premier niveau de mot-clé que je distingue. Certes, entre 1900 et 1914, aucune thèse classée dans un domaine correspondant à un mot-clé de premier niveau<sup>105</sup> n'est décrite par un rapporteur comme traitant essentiellement de questions relatives à un domaine distinct. Mais, les frontières entre les différents domaines de premier niveau de mot-clé ne sont pas clairement définies. Elles dépendent en partie de facteurs nationaux, comme l'a montré précédemment la comparaison entre le *Jahrbuch* et le *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*. De plus, l'étendue du contenu mathématique des thèses fait que plusieurs questions y sont traitées, certaines pouvant se rapporter à des domaines différents.

On voit donc ici un intérêt à prendre en compte les rapports de thèses comme corpus complémentaire. Ils permettent d'affiner le classement des thèses et notamment de confirmer ou infirmer celui choisi pour les mémoires qui ne sont pas directement référencés dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*<sup>106</sup>. Ils permettent également de saisir, à une échelle plus précise, certaines interactions entre différents domaines de premier niveau ou de niveau supérieur de mots-clés par la perception plus fine des problèmes traités exprimée par des mathématiciens français de la période. Cette description des domaines, que l'on tire des rapports, met ainsi en évidence les domaines mathématiques où certaines questions particulières sont travaillées. Dans *La France mathématique* GISPERT (1991), Hélène Gispert évoque une diversité des domaines mathématiques où les questions d'ordre géométriques sont travaillées. Dans

---

102. *Sur les applications géométriques du théorème d'Abel*, 1901.

103. *Intégrale, longueur*, Aire, 1902.

104. Citons par exemple le cas pour les travaux de Rousier en 1908, *Ondes par éersion*.

105. C'est-à-dire à l'analyse, la géométrie, l'arithmétique et l'algèbre ou aux mathématiques appliquées.

106. Ainsi, dans le cas particulier de la thèse de Popovici, mentionné dans une note précédente, j'ai choisi de me référer au classement d'un article particulier pour référencer la thèse en « calcul différentiel et intégral ». Or Painlevé dans le rapport signale dès le début du rapport le lien du travail avec les équations intégrales réciproques ce qui semble confirmer mon choix.

cette perspective, les rapports apparaissent comme un corpus permettant de les mettre en évidence<sup>107</sup>.

### Un exemple : les thèses de mécanique et de physique mathématique

Parmi l'ensemble des rapports de thèses entre 1900 et 1914, j'étudie ici plus particulièrement les rapports des doctorats classés en physique mathématique et en mécanique. Il s'agit de mettre en valeur ce que l'analyse d'un tel corpus permet de montrer et de révéler sur les dynamiques de recherche de ces domaines, sur les mathématiques travaillées et les notions manipulées, sur les travaux et les mathématiciens cités.

L'étude de ces rapports montre tout d'abord un lien certain entre le domaine de l'analyse et ceux de la physique mathématique et de la mécanique et précise la nature de ce lien, explicitement évoqué dans plusieurs rapports.

Ainsi, en 1905, Appell explique, dans le rapport sur la thèse de Husson<sup>108</sup>, comment « les ressources issues du progrès de l'Analyse mathématique ont été appliquées à l'étude du mouvement d'un corps pesant ». D'après les rapports, les doctorants de ces deux domaines cherchent la plupart du temps<sup>109</sup> à appliquer des théories d'analyse pour résoudre concrètement des équations différentielles ou intégrales et pour mener à bien et améliorer leurs calculs. Ainsi, selon Boussinesq, Grandjean<sup>110</sup> applique à des questions d'hydrodynamique la théorie des équations différentielles partielles ou ordinaires, Stonesco<sup>111</sup> résout des équations différentielles pour déterminer la propagation d'ondes. Rousier<sup>112</sup> cherche à résoudre une équation de physique mathématique relative à la propagation d'ondes dans une direction verticale avec des méthodes d'analyse empruntées au calcul intégral. Boussinesq, rapporteur, et Appell, président du jury, soulignent dans le cas de Stonesco la longueur des calculs et le mérite du doctorant à les avoir menés au bout. Dans le cas de Rousier, il apparaît que le but des travaux ne consiste pas à apporter de nouveaux outils ou à faire des avancées rapides en physique mathématique mais là encore à appliquer les méthodes théoriques pour améliorer les calculs et pour perfectionner la résolution des équations.

---

107. Les questions géométriques sont ainsi par exemple travaillées dans le domaine de l'analyse avec les fonctions particulières.

108. *Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe.*

109. Parmi les thèses référencées en physique mathématique et en mécanique, une seule, celle de Louis Roche en 1913 (*Sur la surface des ondes dans la polarisation rotatoire magnétique et dans quelques phénomènes plus généraux*), utilise des notions mathématiques qui ne sont pas empruntées à l'analyse. D'après Boussinesq, les recherches présentées mettent en jeu des ensembles de représentations géométriques.

110. dans sa thèse en 1902, *Sur le régime permanent graduellement varié qui se produit à la partie amont des tuyaux de conduite et sur l'établissement du régime uniforme dans ces tuyaux.*

111. En 1905 dans *Sur la propagation et l'extinction des ondes planes dans un milieu homogène et translucide, pourvu d'un plan de symétrie.*

112. En 1908 dans *Ondes par émergence.*

Les thèses de mécanique et de physique mathématique apparaissent alors comme un lieu propice pour mettre en application des résultats théoriques d'analyse, comme un lieu d'échanges entre théories et applications. Dans le rapport sur la thèse de Bratu<sup>113</sup>, Appell fait une distinction nette entre le contenu d'une thèse d'analyse et celui d'une thèse de mécanique qui nécessite une « précision des détails indispensable ».

Si les doctorants en mécanique et en physique mathématique ne visent pas le perfectionnement de certaines théories mathématiques, ils peuvent néanmoins s'intéresser à des problèmes pointus d'analyse. Dans sa thèse soutenue en 1909, Vergne étudie ainsi des équations fonctionnelles liées à l'équation de Fredholm. D'après le rapport de Boussinesq, il ne donne pas de solutions nouvelles par rapport aux résultats de l'époque déjà établis, mais il pointe les problèmes et en résout certains dans des cas simples<sup>114</sup>. De même, Villat s'intéressant à la forme de sillages<sup>115</sup> traite selon Picard, de « questions pointues de théories des fonctions dont la résolution pourra exercer la sagacité des nombreux mathématiciens s'intéressant aux équations intégrales-différentielles ».

L'étude des rapports de thèses met également en évidence les applications concrètes et le lien important au réel des domaines de la physique mathématique et de la mécanique entre 1900 et 1914. Les résultats présentés dans les mémoires ont ainsi pour l'essentiel des intérêts « pratiques » et « vérifiables »<sup>116</sup>. Boussinesq, rapportant sur la thèse d'Estanave<sup>117</sup>, affirme que la « thèse présente [...] un véritable intérêt pratique », Estanave cherchant à résoudre concrètement les équations relatives à l'« équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince ». De même, Boussinesq souligne l'application à des questions d'hydrodynamique que fait Marius Grandjean des résultats obtenus dans sa thèse. Boussinesq précise comment ses résultats ont été confirmés par des expériences et sont utilisés concrètement dans les domaines de l'édilité et de l'hygiène urbaine. Un autre exemple : dans le rapport sur la thèse de Davidoglou en 1900, Picard mentionne explicitement comment la résolution d'équations aux dérivées partielles est appliquée à des problèmes pratiques, comme celui des vibrations d'une verge homogène.

Les applications proposées dans les thèses peuvent également être utiles à d'autres domaines scientifiques, et particulièrement à la physique. Ainsi, selon Boussinesq et Appell, l'un des intérêts de la thèse de Stoenesco soutenue en 1905 réside dans « l'interprétation physique utile aux expérimentateurs » que fait le doctorant de ses calculs lorsqu'il résout certaines équations différentielles sur la propagation d'ondes. Bous-

---

113. *Sur l'équilibre des fils soumis à des forces intérieures*, 1914.

114. On peut également évoquer la thèse de Monteil (*Contribution à l'étude des courants de convection calorifique*) en 1905. Selon Boussinesq, il y pose des « questions entièrement nouvelles, trop difficiles [...] pour être abordables à l'Analyse actuelle dans leur énoncé général ».

115. En 1911 dans *Sur la résistance des fluides*.

116. Cf. Appell dans le rapport sur la thèse de Husson (1905).

117. *Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince dont deux bords opposés au moins sont appuyés sur un cadre*, 1900.



sinesq ainsi qu'Appell dans le rapport de soutenance de la thèse de Louis Roche<sup>118</sup> évoquent l'application directe de ses recherches (sur la surface des ondes dans la polarisation magnétique) à la prévision de phénomènes physiques. Dans le rapport sur la thèse de Louis Roy<sup>119</sup>, Boussinesq insiste particulièrement sur la nature des équations à résoudre et sur leur signification physique au point de vue des propriétés thermomécaniques des corps solides. Il mentionne en outre explicitement que le doctorat est issu de l'École supérieure d'électricité et que sa thèse sera publiée dans *le Bulletin de la Société internationale des électriciens*. Dans le rapport de la thèse de l'Abbé Annycke<sup>120</sup>, il insiste à nouveau sur les « interprétations physiques » des résultats présentés par ce dernier. Le milieu concerné par les thèses de physique mathématique et mécanique apparaît alors plus large que le seul milieu mathématique académique : il s'étend à celui de la physique et touche également le milieu des ingénieurs par les applications qui y sont présentées.

L'étude des rapports de thèses a permis ainsi de mieux caractériser les thèses en physique mathématique et en mécanique. On y trouve une même utilisation générale de méthodes d'analyse, empruntées le plus souvent au calcul différentiel et intégral, les résultats obtenus étant ensuite appliqués pour répondre à des problèmes concrets. Les doctorants de ces domaines n'exposent pas de nouvelles théories mathématiques, ils cherchent à approfondir les connaissances de certains aspects physiques. Les mémoires comportent ainsi presque systématiquement une partie spécifiquement destinée à l'application pratique des calculs préalablement réalisés.

Les rapports des thèses d'astronomie, autre champ disciplinaire à la marge du milieu mathématique traditionnel, mentionnent également une même utilisation par les doctorants des théories, des résultats de l'analyse pour améliorer les connaissances pratiques qui peuvent toucher un autre milieu, ici celui des astronomes. Par exemple, dans le rapport sur la thèse de Blondel<sup>121</sup>, Picard insiste sur « le souci des applications pratiques et des problèmes précis » dans les thèses d'astronomie. Il s'agit ici aussi de comparer la théorie et l'expérience en vérifiant les résultats théoriques établis dans le cadre de la thèse et les données expérimentales recueillies.

Les rapports des thèses de mathématiques appliquées renseignent ainsi sur la nature des applications considérées. Les rapporteurs insistent particulièrement sur l'importance des applications des résultats mathématiques théoriques. Cette insistance renvoie à des considérations plus générales qu'ils formulent sur les sciences mathématiques. Les rapports de thèses apparaissent alors comme un lieu propice où les communiquer. On y retrouve ainsi un écho de débats épistémologiques qui ont animé le milieu

---

118. *Sur la surface des ondes dans la polarisation rotatoire magnétique et dans quelques phénomènes plus généraux*, 1913.

119. *Recherches sur les propriétés thermo-mécaniques des corps solides*, 1910.

120. *Contribution à l'étude thermodynamique des tiges et des plaques*, 1911.

121. *Sur la théorie des marées dans un canal. Application à la Mer Rouge*, 1912.

mathématique français de l'époque<sup>122</sup>. Les sciences mathématiques françaises ne sont pas conçues par les patrons de l'époque comme une pure abstraction et les recherches doivent être pensées en vue d'applications, applications à d'autres théories et applications pratiques. De telles mentions ne sont pas uniquement faites dans les rapports sur les thèses de mathématiques appliquées. Par exemple, Picard, dans le rapport sur le mémoire de Lebesgue, évoque le degré d'abstraction des théories mathématiques ainsi que le rôle de l'intuition dans le travail de recherche. Hadamard parle également de ce rôle joué par l'intuition dans le rapport sur la thèse de Boutroux en 1903. Il en souligne, comme Picard, les dangers.

## 1.5 Les thèses : un corpus pertinent

L'utilisation des rapports de thèses a permis dans un premier temps de confirmer et d'affiner le classement du doctorat établi par le *Jahrbuch*, voire d'y pallier quand le mémoire n'y est pas recensé. Cet apport nous sera d'autant plus utile dans la période entre 1914 et 1945 que ce répertoire bibliographique connaît des évolutions importantes et constantes et qu'il cesse de paraître en 1942. L'utilisation d'autres outils bibliographiques tels que le *Zentralblatt* n'étant pas très concluante<sup>123</sup>, les rapports fournissent une catégorisation des questions abordées dans les thèses, exprimée par un mathématicien contemporain de leur étude.

Dans un second temps, les équilibres entre les domaines qu'a révélés l'analyse quantitative du corpus confirment et affinent l'image des sciences mathématiques produites par le bilan historiographique. De plus, l'étude des rapports a permis ici de préciser la nature des équilibres entre ces domaines ainsi que les relations entre certains d'entre eux. La géométrie est ainsi apparue au second plan des travaux présentés par la faculté. Les liens entre les domaines des mathématiques appliquées et du calcul différentiel et intégral ont été précisés tant au niveau de leur importance que de leur nature. Boussinesq est apparu comme un des mathématiciens influents en mécanique et en physique mathématique. Les rapports mettent également en évidence certaines relations entre les mathématiques françaises et étrangères. Par exemple, les travaux du mathématicien Volterra sont fréquemment cités dans les thèses d'analyse.

Une étude plus approfondie des rapports et des introductions de thèses, telle qu'elle sera faite pour la période entre 1914 et 1945, permettrait d'étudier plus précisément

---

122. Ils sont décrits par Hélène Gispert dans *La France mathématique* GISPERT (1991) et dans « Quelles lectures pour les conférences de mathématiques : savante, pédagogique, politique ? », GISPERT 2007.

123. Je reparlerai ultérieurement de ces problèmes de classification, mais je peux déjà signaler que pour le *Zentralblatt*, lorsque les thèses sont recensées, peu sont classées et lorsqu'elles le sont, la classification est faite à l'aide de mots-clés employés de nos jours et donc de façon anachronique par rapport aux thèses.

quels travaux mathématiques sont cités et utilisés dans les thèses, de voir quelle influence ils ont sur les recherches des doctorants. Cette étude révélerait alors l'existence et la nature de certaines dynamiques de la recherche mathématique. Cependant, elle ne pourrait prétendre dégager l'ensemble de ces dynamiques de façon exhaustive. Les travaux tels qu'ils sont abordés et retranscrits dans les thèses et dans les rapports de thèses sont soumis à différents filtres institutionnels et intellectuels difficilement identifiables. Entre 1900 et 1914, l'étude des thèses et de leurs rapports a permis de montrer que les recherches sur la théorie des ensembles et sur la nouvelle théorie des fonctions étaient intégrées et réutilisées dans certains mémoires. Ce corpus n'est cependant l'écho que d'une certaine recherche. Par les exemples qu'il pointe, son étude est révélatrice. Ainsi, aucun des rapports des thèses soutenues à la faculté des sciences de Paris ne fait référence à Élie Cartan et à ses recherches d'alors, notamment en théorie des groupes. Alors qu'il est déjà, par ses publications, actif sur les scènes mathématiques française et internationale, ses travaux ne sont pas encore repris et retravaillés par des thèses d'État en sciences mathématiques.

## Chapitre 2

# Les thèses mathématiques soutenues en France entre 1914 et 1945. Premier niveau d'analyse

### Sommaire

2.1	Une thèse d'État en sciences mathématiques : description.	76
2.2	Les bases de données . . . . .	83
2.3	Méthodes de classement . . . . .	86
2.4	Résultats du premier niveau d'analyse . . . . .	96

Le chapitre précédent a permis de montrer la pertinence de l'objet thèse comme objet de connaissance du milieu de la recherche mathématique entre 1900 et 1914. L'analyse aux premiers niveaux de ce corpus a déjà permis de dégager non seulement certaines dynamiques institutionnelles, mais également des dynamiques de recherche, internes aux domaines ou entre les domaines mathématiques considérés.

À partir de ce deuxième chapitre, le corpus considéré est celui des 242 thèses d'État en sciences mathématiques soutenues en France entre 1914 et 1945<sup>1</sup>, dont la liste a été obtenue principalement par le *Catalogue des thèses et écrits académiques* du Ministère de l'Instruction publique<sup>2</sup>. La focalisation sur ce corpus aux différents

---

1. Les années frontières sont incluses dans ma période. Je m'en suis tenue pour mon recensement aux dates de soutenance des thèses et non pas aux dates où les mémoires sont écrits et présentés aux rapporteurs de la faculté des sciences. La question s'est en effet posée pour deux manuscrits. Sur le rapport de la thèse de Bernard Combes, *Le plus petit corps convexe contenant un arc de courbe dans l'espace à  $n$  dimensions*, Georges Valiron mentionne la date d'avril 1945. De même sur celui de Christian Pauc, *Les méthodes directes en calcul des variations et en géométrie différentielle*, la date du 10 août 1939 est inscrite. Les deux doctorats ont été soutenus devant la faculté des sciences de Paris respectivement le 25 mars 1946 et le 21 mai 1946. Je ne les ai donc pas insérés dans ma base de données.

2. Le *Catalogue* recense par année, par discipline et par faculté l'ensemble des thèses d'État et doctorats d'Université qui y sont soutenus. J'ai relevé celles qui figuraient avec la mention « Thèse de sciences mathématiques ».

niveaux d'analyse décrits en introduction devrait permettre une nouvelle approche du milieu mathématique, approche dont la pertinence a été prouvée précédemment.

Avant de procéder à l'analyse du corpus à différents niveaux, je commencerai par présenter et définir les différentes composantes de l'objet doctorat, que j'ai indiquées dans l'introduction. Il s'agit de mieux comprendre dans quel contexte institutionnel est élaboré et soutenu un doctorat d'État et de mieux caractériser l'objet thèse par les critères officiels et officieux qu'il doit respecter. Je précise également les principes utilisés pour constituer différentes bases de données à partir de ce corpus.

En préalable à toute analyse du corpus des thèses, il faut classer les thèses en fonction des différents domaines des sciences mathématiques. Cette étape est nécessaire à toute étude. Les conclusions des analyses menées à différents niveaux dépendent en outre directement du classement effectué. Chaque niveau est en effet emboîté dans le précédent et dès le premier niveau, l'analyse quantitative qui est menée dépend de la classification des doctorats. J'explicite alors comment je construis les domaines composant les sciences mathématiques et je décris la méthode employée pour le classement des thèses. Une fois ces principes posés, je rappelle les résultats obtenus dans mon DEA par le premier niveau d'analyse du corpus des doctorats d'État.

## 2.1 Une thèse d'État en sciences mathématiques : description.

### 2.1.1 Critères officiels

Dans le cadre de cette section, je ne cherche pas à interroger le statut de la thèse parmi les autres travaux mathématiques, c'est-à-dire sa considération par la communauté mathématique française et sa portée comme publication de recherche mathématique<sup>3</sup>. Je m'attache à donner les éléments d'information caractérisant une thèse d'État : les critères à respecter pour en soutenir une, les conditions de son élaboration, les conditions qu'elle doit vérifier pour être acceptée, etc.

Le doctorat d'État en sciences mathématiques est le résultat d'un travail réalisé dans le cadre d'une faculté des sciences. Institué statutairement depuis le début du XIX<sup>ème</sup> siècle<sup>4</sup>, il constitue l'examen de passage obligé pour obtenir le grade universitaire de « docteur ès sciences mathématiques », grade nécessaire pour accéder au professorat de faculté et envisager ensuite une carrière académique. Les décrets successifs qui ont instauré officiellement le grade de docteur figurent d'ailleurs sur tous les

---

3. J'émettrai cependant ultérieurement quelques hypothèses à ce sujet.

4. depuis 1815, cf. HULIN 1990, p. 403-404.

procès-verbaux des soutenances des doctorats entre 1914 et 1945, avant tout renseignement sur le doctorant :

« En exécution du décret impérial du 17 mars 1808, du statut du 6 février 1810, du Décret impérial du 22 août, et conformément au Règlement du 8 juin 1848, etc. »

Avant d'entamer un travail de thèse d'État, le candidat doit remplir certaines conditions qui ont cependant évolué depuis l'instauration du grade de docteur, notamment à la suite de la réforme de 1896. Ces conditions demeurent inchangées entre 1900 et 1945. Elles sont exposées par Albert Saint-Germain dans son *Rapport sur l'enseignement* où il donne un aperçu général sur l'enseignement supérieur des mathématiques, SAINT-GERMAIN 1911, p. 2,3

« Le décret du 22 janvier 1896 vint donner plus de liberté aux étudiants et aux maîtres, par suite, plus de vie aux facultés ; il institue les certificats d'études supérieures, dont chacun se rapporte à une seule branche de la sciences, mécanique rationnelle, chimie appliquée, etc., et constitue assez exactement la sanction d'un cours déterminé ; il y a pour chaque certificat un examen séparé, avec épreuves écrite, pratique et orale. Le grade de licencié est conféré à tout étudiant pourvu de trois certificats choisis à son gré, ce qui lui permet d'étudier les parties de la science vers lesquelles il se sent le plus attiré ; toutefois, s'il veut que son grade de licencié lui serve, pour entrer dans l'enseignement ou pour se présenter, soit à l'examen du doctorat, soit au concours d'agrégation, il ne peut choisir arbitrairement la nature de ses trois certificats. »

La licence est ainsi exigée des candidats au doctorat de sciences mathématiques ; les certificats de mathématiques nécessaires correspondent au découpage des licences traditionnelles<sup>5</sup> : calcul différentiel et intégral, mécanique rationnelle, et un troisième à choisir parmi les certificats suivants : astronomie, algèbre supérieure, analyse supérieure, géométrie supérieure et physique générale<sup>6</sup>.

À l'origine, au début du XIX<sup>ème</sup> siècle, le grade de docteur ès sciences mathématiques est obtenu après la soutenance de deux thèses<sup>7</sup> sur la mécanique et l'astronomie. Cependant dès le règlement de 1848, le candidat a la possibilité de présenter une seule thèse. À la deuxième thèse se substitue alors la discussion de questions proposées par

5. Et sont déterminés par le décret du 16 janvier 1898, cf. NABONNAND 2006, p. 130 et HULIN 1990, p. 407.

6. Cf. SAINT-GERMAIN 1911. Pour présenter un doctorat d'Université, seuls deux certificats de licence sont nécessaires, cf. GISPERT 1995b. À côté du doctorat d'État et du doctorat d'Université, on trouve également le grade d'ingénieur-docteur, réservé aux seuls ingénieurs qui n'ont aucun certificat de licence.

7. Cf. HULIN 1995, p. 16.

la faculté. Ces questions peuvent porter sur n'importe quel cours enseigné à la faculté des sciences où est soutenu le doctorat<sup>8</sup>. Entre 1914 et 1945, la thèse unique constitue la règle générale pour les doctorants en sciences mathématiques<sup>9</sup>.

En ce qui concerne la soutenance du doctorat, si la faculté toute entière doit y assister d'après le statut de 1810, le décret de juillet 1877 retient le nombre de trois docteurs ès sciences mathématiques pour la composition du jury. Le décret de 1908 introduit également la possibilité de faire appel à des juges non docteurs quand les travaux se rapportent aux études du candidat<sup>10</sup>. À de rares exceptions près<sup>11</sup>, ce n'est cependant pas le cas des jurys des doctorats d'État en sciences mathématiques entre 1914 et 1945.

Enfin, Jules Ferry, en 1880, détaille les modalités à suivre pour la soutenance<sup>12</sup> :

« La thèse est lue par les trois professeurs du jury ; chacun donne par écrit son approbation ou désapprobation. Ils signent en commun un rapport d'ensemble, où ils indiquent la valeur de la thèse et font ressortir les faits nouveaux qui la rendent originale. Le recteur juge alors d'après le rapport s'il doit donner le permis d'imprimer ou s'il doit en référer au ministre.

La thèse est soutenue ensuite en public, devant le même jury, et la soutenance fait l'objet d'un rapport. »

Il y décrit la nature des deux rapports qui sont écrits à l'occasion du doctorat et de sa soutenance en distinguant nettement le rôle que chacun d'entre eux joue. Le premier rapport est ainsi celui où la qualité du travail et l'originalité des résultats, sont jugés. Jules Ferry précise ainsi le rôle que doit remplir ce rapport : il doit « faire ressortir les faits nouveaux qui rendent [la thèse] originale ». Le rapport de thèse doit

8. Cf. HULIN 1995, p. 18.

9. Seuls trois d'entre eux semblent déroger à cet usage et présentent deux thèses : Léon Pomey, en 1924 (première thèse : *Sur les équations intégrales-différentielles et intégrales linéaires et non linéaires à une ou plusieurs variables*, seconde thèse : *Sur le dernier théorème de Fermat* ; Henri Krebs, en 1925 (première thèse : *Sur deux équations aux dérivées partielles "du second ordre"*, seconde thèse : *Sur la théorie du réglage en horlogerie*) ; Constantin Woronetz, en 1935 (première thèse : *Sur les perturbations provoquées dans le mouvement d'un fluide par des variations de la température*, seconde thèse : *Mouvements des fluides en couches minces sur des surfaces courbes*). Au moins pour ces trois doctorats, il existe à la fois un rapport pour la première thèse et un rapport pour la seconde. De plus le rapporteur utilise explicitement le terme « seconde thèse » et n'emploie par l'expression « propositions données par la faculté » pour désigner ce second travail. Pour tous les autres, même si l'expression « propositions données par la faculté » n'est pas toujours employée, il n'existe pas de rapports autres que ceux relatifs à la première thèse et à la soutenance. Le rapport de soutenance mentionne d'ailleurs dans la plupart des cas ces questions et indique comment le doctorant y a répondu. Par exemple dans le rapport de soutenance de la thèse de Paul Delens en 1927, Élie Cartan écrit que le doctorant « a prouvé [...] une étude sérieuse des questions posées par la Faculté » (ici les « Conditions suffisantes pour l'extremum des intégrales  $\int_{(a,b)} f(x, y, y') dx$  »).

10. Cf. HULIN 1995, p. 17, HULIN 1990, p. 408, DE BEAUCHAMP 1909, p. 1208.

11. comme par exemple Joseph Bize, ingénieur des Ponts et Chaussées du Vaucluse qui participe aux jurys de thèses soutenues à la faculté de Montpellier : celle d'Hourfar, en 1939, et celle de Youtévang, en 1941.

12. Cf. HULIN 1990, p. 409 et FERRY 1880.

donc rendre compte du contenu du travail mathématique effectué par le doctorant. Le second rapport apparaît beaucoup plus factuel. Il porte sur le déroulement même de la soutenance et il n'est pas supposé rentrer dans les détails des contenus scientifiques.

Enfin, les registres d'examens des doctorats d'État parisiens<sup>13</sup> mentionnent la tenue de cette soutenance et indiquent également la composition du jury ainsi que la mention obtenue par le candidat à l'issue de sa soutenance<sup>14</sup>.

### 2.1.2 Critères officiels

Le règlement de 1848 « admet à la discussion » à la fois des thèses de sciences mathématiques « renfermant une découverte quant aux résultats, quant à la méthode ou quant à la forme d'exposition »<sup>15</sup> mais également des thèses « ne comportant rien de nature à faire avancer la science [...] à condition qu'elle[s] porte[nt] [...] sur des questions relatives à la mécanique rationnelle ou à la mécanique des corps célestes »<sup>16</sup>. En revanche depuis les années 1870, il est implicitement reconnu qu'une thèse doit constituer une recherche originale. L'accent est mis sur l'exigence de résultats nouveaux et intéressants. La qualité attendue des doctorats est évoquée en ces termes dans une lettre de J. Pierpont<sup>17</sup>. L'étude des rapports de thèses de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle montre en outre que les jurys de thèses accordent au doctorat dès les années 1870 un rôle important dans le développement de la « science française »<sup>18</sup>. Aucun critère plus précis n'est cependant officiellement donné sur l'excellence attendue des travaux présentés. L'autorisation de la soutenance et l'obtention du grade de docteur dépendent donc apparemment uniquement du jugement formulé par le jury de la thèse.

En ce qui concerne l'élaboration du mémoire de thèse, aucun texte de l'époque ne rend compte d'exigences imposées ou de cadres précis relatifs aux conditions de sa réalisation, à la durée officielle de son élaboration. Toutes les situations peuvent se produire<sup>19</sup>.

---

13. Consultables aux Archives Nationales, ils sont référencés aux cotes AJ/16/5515 (pour les doctorats soutenus entre 1914 et 1921), AJ/16/5516 (pour ceux soutenus entre 1921 et 1929), AJ/16/5517 (pour ceux soutenus entre 1929 et 1935), AJ/16/5518 (pour ceux soutenus entre 1935 et 1941) et AJ/16/5519 (pour ceux soutenus entre 1941 et 1945).

14. « très honorable » ou « honorable ».

15. Cf. HULIN 1990, p. 406 et MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE 1848, p. 200-203.

16. Cf. HULIN 1995, p. 18.

17. « Their quality – so far as the University of Paris goes, and most of the mathematical doctorates are taken here – is considerably superior to that of the German dissertation. Remark that the French desire to maintain the exclusiveness of the doctor title. For ten to fifteen years the quality of the « thèses » has been slowly rising, so that only a small part of the German dissertations would be accepted at Paris. », cf. PIERPONT 1900 et GISPERT 1991, p. 78-79.

18. Cf. GISPERT 1991, p. 81.

19. Si on regarde par exemple le cas des thèses soutenues par des doctorants normaliens, la durée entre la date de leur promotion et la date de soutenance est très variable. Elle oscille entre 3 ans (pour Miron Nicolesco, étudiant étranger de l'École normale supérieure) et 26 ans (pour Jean Bouffard, qui en 1942 soutient une thèse portant sur des sujets de ballistique), la moyenne étant de 9-10 ans.



Le statut de « directeur de thèse », tel qu'on l'entend actuellement, n'existe pas non plus à l'époque. Aucune personne n'est désignée officiellement comme devant attribuer un sujet à un doctorant, puis comme devant le guider au cours de sa recherche<sup>20</sup>.

La situation en France n'est pas aussi clairement établie qu'au Royaume-Uni où les textes officiels notifient un délai minimum de deux ans de recherche sur un sujet avant de pouvoir soutenir un Phd, ALDRICH 2007. Cependant ces conditions n'existent au Royaume-Uni qu'à partir de 1919, date à partir de laquelle est institué ce grade dans les facultés et on ne peut pousser plus avant la comparaison. Très peu de Phd sont soutenus avant 1940 et ce travail de recherche n'est pas une étape nécessaire pour les mathématiciens anglais qui veulent poursuivre leur carrière au sein des facultés anglo-saxonnes.

La taille du mémoire de doctorat ne semble pas non plus devoir répondre à certaines normes. Un relevé systématique du nombre de pages des doctorats sur la période de 1914 à 1945 montre que le nombre de pages des thèses est variable et qu'il ne connaît pas d'évolution significative pendant l'entre-deux-guerres. Sur les 32 années de la période, la taille des mémoires est en moyenne d'une centaine de pages<sup>21</sup>. Elle oscille entre 31 pages (pour la thèse de Max Eger en 1943 ou 33 pour la thèse de Charles Brunold en 1934, à Toulouse, ou 35 pour la thèse d'André Weil à Paris en 1928) et 359 pages (pour la thèse d'Alexandre Gorny, en 1939). La taille des doctorats n'est pas corrélée à la faculté des sciences où est soutenu le travail. Elle n'est pas non plus significative de l'importance des résultats trouvés et démontrés. Ainsi dans le rapport sur le mémoire de Max Eger<sup>22</sup>, René Garnier souligne la qualité du travail « original, à plus d'un égard », « riche de résultats », même si sa « forme est concise » et Max Eger obtient d'ailleurs la mention la plus élevée, « très honorable ». Certaines thèses de taille plus importante comme celle de Louis Long, *Sur certaines transformations par polaires réciproques relativement au complexe linéaire et à la sphère*, 1926, 117 pages, ou celle de Parvulesco, *Sur les amas globulaires d'étoiles et leurs relations dans l'espace*, 1925, 142 pages, n'obtiennent quant à elles que la « mention honorable ».

Si les facultés n'imposent pas de critères précis, il semble cependant d'usage que la taille du travail ne soit pas excessive, ni que les résultats établis soient en nombre trop important. Dans certains rapports de thèses soutenues à la faculté des sciences de

---

20. À travers la lecture de témoignages d'étudiants de l'entre-deux-guerres (André Weil et Szolem Mandelbrojt, interview de Jacqueline Ferrand) et même de la période antérieure (Paul Lévy, cf. LÉVY 1970), et également par la lecture des rapports de thèses, j'ai pu cependant obtenir certains indices sur un suivi de l'étudiant. Ce suivi ne semble pas répondre à un schéma établi et celui de chaque doctorant apparaît comme un cas particulier. Le doctorant peut être totalement autonome (et se présenter comme tel) ou demander fréquemment des conseils à un mathématicien en particulier ; tous les cas intermédiaires sont en outre susceptibles d'exister. On peut parfois trouver des renseignements à ce sujet dans les avants-propos ou les rapports de thèse. J'y reviendrai ultérieurement.

21. Cf. Tableau n°C.5, « Évolution du nombre de pages des doctorats » en annexe (C).

22. *Les systèmes canoniques d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*, soutenue en 1943.

la Sorbonne, on trouve en effet mention du fait que le candidat a trouvé et démontré davantage de résultats que ceux qui sont présentés dans le cadre du mémoire. Ainsi Fréchet signale dans le rapport sur la thèse de Ky Fan<sup>23</sup> :

« Il ne nous a pas paru utile de demander à M. Ky-Fan d'adjoindre à son manuscrit les résultats des autres recherches mentionnés à la première page de ce rapport. Cette adjonction aurait rendu plus longue et plus difficile à obtenir l'impression de la thèse dans un périodique. Les quatre chapitres analysés plus haut me suffisent largement pour me permettre de donner un avis extrêmement favorable à la demande de permis d'imprimer. »

Ce qui pourrait en fait déterminer la taille de l'ouvrage est la possibilité de parution du travail dans un périodique<sup>24</sup>, après une première impression du manuscrit destiné à la soutenance. Dans l'introduction de sa thèse, parue dans la revue des *Actualités scientifiques et industrielles*, Laurent Schwartz mentionne également qu'il a dû renoncer à présenter l'ensemble de ses résultats de sa thèse dans le cadre du doctorat<sup>25</sup> :

« Notre étude contenait initialement un 3<sup>e</sup> chapitre. Nous avons dû, dans cette thèse, nous borner aux deux premiers ; le 3<sup>e</sup> paraîtra comme mémoire autonome dans un périodique. »

Lorsque les thèses sont recensées dans les répertoires bibliographiques, elles ne sont que rarement référencées comme « Thèse » entre 1914 et 1945. La référence qui figure est plutôt celle de l'édition du mémoire dans un périodique mathématique comme le *Journal mathématique des sciences pures et appliquées* ou les *Actualités scientifiques et industrielles* chez Hermann. On constate d'ailleurs une évolution de cette recension par rapport à la période précédente, entre 1900 et 1914. Dans l'entre-deux-guerres, la référence de la thèse dans les répertoires bibliographiques<sup>26</sup> est davantage celle de la publication du travail dans des recueils (tels les *Annales de l'École normale supérieure*) ou des périodiques mathématiques. Les mémoires paraissent alors dans les mêmes organes de publication que les autres productions de la recherche mathématique.

En ce qui concerne la constitution du jury de thèse, aucun texte officiel n'indique une procédure à suivre pour le choix des membres de ce jury. Selon certains témoignages de doctorants de l'époque<sup>27</sup>, le doctorant, une fois son mémoire achevé, sollicitait

23. *Sur quelques notions fondamentales de l'Analyse générale*, 1941.

24. Pour Ky Fan, il s'agira du *Journal des mathématiques pures et appliquées*, en 1942.

25. Cf. SCHWARTZ 1943, p. 4. On peut mentionner d'autres exemples où des mémoires liés aux résultats de la thèse sont publiés par le doctorant avant la soutenance de son doctorat dans des ouvrages distincts. Wolfgang Doeblin publie ainsi certains résultats relatifs à la théorie des chaînes simples de Markoff à un nombre fini d'états dans un journal la *Revue mathématique de l'Union Interbalkanique*, DOEBLIN 1938a. Il en rappelle les points principaux dans l'introduction de son doctorat mais n'y reprend pas le détail des démonstrations. J'y reviendrai dans le dernier chapitre de la présente thèse.

26. *Jahrbuch* et/ou *Zentralblatt*.

27. Cf. WEIL 1991, p. 57-59 et cf. un entretien avec Jacqueline Ferrand réalisé le vendredi 22 décembre 2006.

un de ces professeurs pour jouer le rôle de rapporteur ou de président. Suivant les disponibilités et les spécialités de chacun, le jury était ainsi constitué<sup>28</sup>.

Le jury de thèse est toujours présidé par un professeur, obligatoirement titulaire d'une chaire de sciences mathématiques. Le rapporteur de la thèse est soit un professeur, titulaire de chaire ou non, soit un chargé de cours de la faculté des sciences. Il peut d'ailleurs cumuler la charge de rapporteur avec celle de président du jury.

Dans le rapport, d'une longueur moyenne de trois-quatre pages<sup>29</sup>, il donne un premier avis sur le travail accompli, sur la qualité des résultats de la recherche et sur leur portée, comme le préconisait Jules Ferry en 1880. Il décrit le sujet, les problèmes posés, ainsi que les principales solutions apportées au problème par le doctorant. Un jugement est en général présent, parfois même de façon argumentée. Entre 1914 et 1945<sup>30</sup>, l'organisation générale du rapport est identique pour tous les mémoires. Les différences entre rapports portent sur le degré de précision dans la description des résultats, des méthodes mathématiques et des références utilisées par le doctorant ainsi que sur l'argumentation du jugement émis par le rapporteur.

Enfin une dernière question demeure à propos de la ligne de partage disciplinaire entre les sciences mathématiques et les sciences physiques. Comme l'a montré Nicole Hulin dans HULIN 1995 et HULIN 1990, cette ligne a évolué au cours du XIX<sup>ème</sup> siècle notamment sur la question de la physique mathématique. Entre 1914 et 1945, il n'est pas évident de déterminer les critères qui décident de l'appartenance d'une thèse aux sciences mathématiques ou aux sciences physiques. Un critère avancé est celui du nombre de certificats de licence que possède le candidat au grade de docteur. Cependant certains étudiants<sup>31</sup> soutiennent une thèse dans les deux disciplines. Certains doctorats, par le sujet traité, se situent à la frontière entre les deux disciplines<sup>32</sup>. La catégorisation des doctorats est en fait précisée par chaque faculté. On la retrouve dans le *Catalogue des thèses et écrits académiques* du Ministère de l'Instruction publique, catalogue officiel qui recense notamment l'ensemble des doctorats soutenus dans les universités françaises.

---

28. André Weil mentionne qu'il a d'abord demandé à Émile Picard d'écrire un rapport sur sa thèse, *L'arithmétique sur les courbes algébriques*. Face au refus de ce dernier qui accepte cependant de présider le jury, Weil sollicite ensuite Lebesgue, qui, après concertation avec Picard, le dirige vers Garnier. Je reviendrai également ultérieurement sur ce sujet en évoquant comme il l'a déjà été fait précédemment pour la période entre 1900 et 1914, les rôles institutionnels et intellectuels que peuvent jouer certains membres de jury. On peut se demander si certains doctorants, voulant voir leur travail valorisé, choisissent, par stratégie, comme membre de leur jury un mathématicien dont ils jugent l'influence déterminante sur le milieu mathématique français.

29. Sa taille varie en fait entre une et six pages.

30. C'était également le cas entre 1900 et 1914.

31. comme par exemple Yves Rocard, Francis Perrin ou Louis Cagniard.

32. On peut citer par exemple la thèse de Rokuro Yamamoto, *Sur les bases nouvelles de la sismo-physique et sur la constitution interne du globe terrestre*, 1924, mais le manuscrit de la thèse comme le *Catalogue* indiquent que le mémoire a été présenté pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques. D'autres cas semblables se rencontrent également parmi les thèses soutenues en astronomie.

## 2.2 Les bases de données

### 2.2.1 Informations retenues

Comme il est indiqué précédemment, pour constituer la base de données, j'ai consulté le *Catalogue des thèses et écrits académiques de l'Académie de Paris* et relevé le nom des étudiants qui avaient soutenu une thèse d'État en sciences mathématiques dans les diverses facultés des sciences françaises<sup>33</sup>.

La deuxième étape a consisté à rechercher les manuscrits de ces différentes thèses<sup>34</sup>. L'ensemble des thèses d'État soutenues en France se présentent matériellement de la même façon, à quelques exceptions près<sup>35</sup>. Sur la première page, figurent en premier lieu la faculté des sciences où a été soutenu le mémoire, la nature du grade pour lequel candidate le doctorant<sup>36</sup>. Viennent ensuite le nom du doctorant, le titre de la première thèse. Pour la seconde thèse, le titre ne figure que rarement en première page du manuscrit. Il est souvent indiqué « Propositions données par la faculté ». Le titre de la seconde thèse se trouve en fait presque systématiquement à la dernière page du mémoire. Sont ensuite précisés sur la page de garde la date de la soutenance<sup>37</sup>, puis les membres du jury (le président et les autres examinateurs). Figure enfin la maison d'édition où paraît le mémoire. Toutes ces informations fournies par les manuscrits des thèses ont été systématiquement recensées.

Le corpus des rapports des thèses de la faculté des sciences de la Sorbonne<sup>38</sup> fournit des renseignements supplémentaires pour les doctorats parisiens. La date de soutenance

---

33. Pour constituer le corpus des thèses de sciences mathématiques entre 1900 et 1914 et le corpus des thèses de sciences mathématiques entre 1914 et 1945, je m'en suis tenue au *Catalogue des thèses et écrits académiques*, établi par le Ministère de l'Instruction publique, cf. MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE 1885-1959. Les exemplaires consultables en bibliothèque recensent chaque année les thèses et écrits académiques université par université, les travaux étant séparés dans deux catégories distinctes. Les thèses sont regroupées par discipline dans chaque université.

34. Lors de cette recherche dans trois bibliothèques (2 bibliothèques sur le site des universités de Jussieu : Service des thèses et Mathématiques recherche ainsi que la bibliothèque Maths-Info de l'École normale supérieure de Paris), j'ai pu non seulement trouver l'ensemble des manuscrits mais également constater que la liste donnée par le *Catalogue* n'est pas exhaustive. J'ai découvert une demi-dizaine de doctorats non répertoriés par le ministère de l'Instruction publique tels que ceux d'Ahmad-Vaziri Abolghassem soutenu à la faculté des sciences de Montpellier en 1938 et celui de Pierre Momet soutenu à la faculté des sciences de Paris en 1943.

35. Cf. en annexe (appendice A) les premières et dernières pages d'une thèse. J'ai pris comme exemple celle d'Henri Cartan, soutenue en 1928, *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications*.

36. Se trouve ici précisé si la thèse est soutenue pour obtenir le grade de « docteur ès-sciences mathématiques » (il s'agit alors d'une thèse d'État), le titre de « docteur (mention mathématiques) » (il s'agit alors d'un doctorat d'Université), ou encore le titre « d'ingénieur-docteur ».

37. Seule l'année est mentionnée dans tous les cas. Le mois ainsi que le jour peuvent parfois y figurer, mais pas de manière systématique.

38. Ce corpus est consultable aux Archives nationales de Paris. Pour la période entre 1914 et 1945 il faut consulter les cartons de AJ 16 5542 à AJ 16 5554.

est plus souvent précisée sur les rapports de thèses que sur les manuscrits<sup>39</sup>. Dans certains cas, elle diffère de la date indiquée sur le manuscrit même<sup>40</sup>. Les membres du jury, ceux qui ont effectivement assisté à la soutenance, sont alors indiqués<sup>41</sup>. Viennent ensuite les rapports en eux-mêmes : rapports sur le mémoire et rapport de soutenance. Les signatures à la fin des rapports indiquent, quand cela n'est pas précisé explicitement dès le début, le président et le rapporteur. C'est cette dernière information, l'identité du rapporteur, qui est absente du manuscrit de la thèse<sup>42</sup> et dont la connaissance est apportée exclusivement par les rapports.

## 2.2.2 Description matérielle des bases de données

À partir des informations données par ces sources, j'ai créé une base de données sous forme de fichiers excels. Un premier fichier regroupe les 242 doctorats d'État soutenus en France entre 1914 et 1945. Les entrées suivantes sont renseignées : la date de soutenance de la thèse (inscrite sur le manuscrit), le nom du doctorant, le président du jury, les autres examinateurs, le titre de la première thèse et son nombre de pages<sup>43</sup>, le titre de la seconde thèse, la faculté des sciences où a été soutenu le doctorat, la bibliothèque où le manuscrit a été consulté<sup>44</sup>, ainsi que l'indication d'édition du mémoire. J'ai également créé parallèlement un fichier regroupant uniquement les thèses soutenues à la faculté des sciences de Paris dans lequel figurent en plus des informations précédentes la date de soutenance indiquée sur le rapport, le nom du rapporteur, la référence du rapport aux Archives nationales, ainsi que la mention obtenue<sup>45</sup>.

---

39. Le jour et le mois de la soutenance sont ainsi indiqués alors que ce n'est pas systématique sur les manuscrits.

40. Le mois ou le jour sont différents.

41. Ces indications peuvent différer des noms inscrits sur le manuscrit, l'explication trouvant sans doute son origine dans des contingences matérielles.

42. Parmi les 203 thèses soutenues à la faculté des sciences de Paris, je n'ai pu trouver le rapport de 23 d'entre-elles : ceux de la thèse de Louis Cagniard (*Réflexion et réfraction des ondes sismiques progressives*, 1939), de Pierre Momet (*Essai de synthèse de la géométrie anallagmatique*, 1943) et de Marcel Mayot (*Sur la stabilité des amas d'étoiles*, 1945) sont introuvables et le carton des archives pour les rapports des doctorats soutenus en 1930 et 1931 est déclaré perdu. Il concernait les thèses d'Edmée Chandon, Vladimir Bernstein, Samuel Cholodenko, Jacques Herbrand, Manuel Vasseur, Hinjiro Kunugi, Paul Dubreil, Albert Gay, Pierre Dive, Rodolphe Raclis, Jean Coulomb, Edouard Callandreaux, N. Théodoresco, Marcel Brelot, Jean Dieudonné, Gerges Durand, Christos Caratzénis, F. Marty, Georges de Rham et N. Stoyko.

43. quand cette information est connue, sinon l'entrée est laissée vide.

44. Quand cela a été possible de le trouver. Les bibliothèques principalement consultées ont été la bibliothèque Mathématiques-Recherche et le service des Thèses de l'université Pierre et Marie Curie, ainsi que la bibliothèque Mathématiques-Informatiques de l'École normale supérieure. Quand le manuscrit n'a pu être trouvé, j'ai simplement indiqué « Catalogue des thèses ». Par ailleurs, un projet de numérisation des thèses de l'entre-deux-guerres est actuellement mené par la cellule MathDoc de l'université de Grenoble à partir des informations que je leur ai communiquées.

45. L'indication de la mention (honorable ou très honorable) ne figure pas systématiquement sur les rapports de soutenance en eux-mêmes. Leur connaissance a cependant été rendue possible par la consultation aux Archives nationales des registres des procès verbaux d'examens pour le doctorat d'État (séries AJ 16 5515 à AJ 16 5519 aux Archives nationales).

En plus de ces informations fournies explicitement par les manuscrits, j'ai rajouté plusieurs données. La première concerne des informations concernant le doctorant : sa nationalité et/ou sa formation antérieure quand celles-ci sont connues<sup>46</sup>. De plus, j'ai rajouté deux entrées supplémentaires pour l'ensemble des thèses. La première concerne le classement du sujet traité dans le cadre du mémoire<sup>47</sup>. La seconde entrée renseigne l'existence ou non d'une référence du doctorat dans un répertoire bibliographique (le *Jahrbuch* ou le *Zentralblatt*). Si le mémoire est recensé, j'ai indiqué la référence de publication ainsi que son année de parution<sup>48</sup>.

En ce qui concerne les 181 rapports de thèses consultables aux Archives nationales, je les ai retranscrits et ils sont maintenant consultables sous format pdf<sup>49</sup>. Sur chaque rapport figurent le nom du candidat, la date inscrite sur le manuscrit, la date inscrite sur le rapport, les titres des thèses indiquées sur le manuscrit, le nom des membres du jury en précision les fonctions qu'ils occupent (président, rapporteur, et autres membres de jury), ainsi que le nom du doctorant, le titre du mémoire tels qu'ils sont inscrits par le rapporteur, et la référence du rapport aux Archives nationales. Viennent ensuite le rapport sur le doctorat, écrit par le rapporteur, puis le rapport de la soutenance écrit par le président du jury et la mention obtenue quand l'indication y figure<sup>50</sup>.

---

46. Les différentes informations concernant la formation du candidat sont les suivantes : École normale supérieure, École polytechnique, aide-astronome ou ingénieur. La connaissance de la nationalité des candidats de l'université de la Sorbonne a été rendue possible par des indications figurant parfois dans les rapports où les manuscrits des thèses, par des recherches personnelles et également de façon plus systématique par la consultation aux Archives nationales des registres des procès verbaux d'examens pour le doctorat d'État (séries AJ 16 5515 à AJ 16 5519) où figure le lieu de naissance du doctorant. Sur le fichier relatif aux doctorants de l'université de Paris, l'absence d'indication pour cette entrée signifie que le doctorant est de nationalité française. Pour les étudiants qui ont soutenu une thèse dans les facultés de province la connaissance de leur nationalité n'est pas systématiquement connue. Si elle l'est, je l'ai indiquée.

47. Ce classement est obtenu par une méthode particulière que j'ai élaborée et que je détaillerai dans la partie suivante. Répondre à cette question du classement a fait l'objet d'une part importante de ma recherche.

48. Je reviendrai dans la partie suivante sur la façon dont j'ai procédé pour la classification des mémoires. Comme je l'ai déjà signalé, dans les répertoires bibliographiques, peu de thèses sont référencées comme telles mais ce sont davantage leurs publications dans les périodiques qui le sont et je reviendrai plus tard sur l'analyse de ces données. Pour s'assurer qu'il s'agissait bien de la même publication, j'ai comparé le nombre de pages des manuscrits avec celui indiqué dans la référence donnée par le *Jahrbuch* ou le *Zentralblatt*.

49. L'ensemble est disponible sur un cd-rom et un exemple est directement lisible en annexe, appendice A, (il s'agit du rapport de la thèse d'Henri Cartan).

50. Dans le cadre du projet « Histoire des sciences mathématiques » et du groupe de travail « Mathématiques et Mathématiciens autour de la première guerre mondiale », un projet de base de données bibliographiques a été mis en place et programmé en php et mysql par Sébastien Gauthier, Laurent Mazliak, et moi-même. Les programmes ont été créés de telle sorte qu'ils sont facilement adaptables à mes bases de données sur les thèses et leurs rapports. L'étape de mise en forme n'a pas été réalisée jusqu'à présent.

## 2.3 Méthodes de classement

Toute analyse du corpus des thèses présuppose d'avoir au préalable procédé au classement des doctorats dans différents domaines des sciences mathématiques selon le sujet qui est abordé dans les mémoires. Les thèses composant le corpus sont soutenues sur un intervalle de 31 ans (entre 1914 et 1945). Or, pour pouvoir avoir des résultats d'analyse pertinents, il est nécessaire que le classement effectué soit uniforme et que les domaines des sciences mathématiques constitués restent stables, sans évolution forte de leur frontière, pendant le même intervalle de temps. Il faut ainsi avoir recours à un ou des répertoires bibliographiques répondant à certaines exigences : être le plus exhaustif possible, couvrir au mieux la période de l'entre-deux-guerres, être le plus contemporain de cette époque (pour éviter tout anachronisme), et être consultable facilement.

### 2.3.1 Brève présentation des répertoires utilisés.

Le choix s'est porté sur le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, seul répertoire à satisfaire en première approche l'ensemble de ces critères. L'utilisation de ce répertoire bibliographique présente cependant certains inconvénients. Tout d'abord, il cesse ses recensements en 1942. Les doctorats soutenus entre 1942 à 1945 n'y sont donc pas référencés. En outre, il est en proie durant toute la période de l'entre-deux-guerres à des difficultés : difficultés liées au contexte international, notamment dans l'immédiate après-guerre<sup>51</sup> et difficultés financières. Le *Jahrbuch* subit des restructurations qui interfèrent avec la réalisation du travail scientifique<sup>52</sup>. Il peine également à faire face à l'augmentation croissante des publications mathématiques au niveau mondial<sup>53</sup>.

Ces conditions engendrent de nombreux retards de parutions. Les tomes relatifs à certaines années ne sont pas toujours publiés dans l'ordre chronologique. Le délai entre l'année du tome et l'année de sa parution peut également atteindre neuf ans<sup>54</sup>. De plus, à partir de 1931, le *Jahrbuch* doit affronter la concurrence d'un autre répertoire : le *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*. Créé par la maison d'édition Julius Springer en réaction aux retards de parution du *Jahrbuch* et à son manque d'adaptation à l'internationalisation de la recherche mathématique, il revendique une même

---

51. L'après première guerre mondiale voit le chauvinisme des nations vainqueurs exacerbé et la fin de l'illusion d'une république de savants internationaux. Le boycott de la science allemande et des Allemands entraîne ainsi des répercussions sur le répertoire.

52. On peut notamment mentionner la démission de Lichtenstein en 1927 qui entraîne la reprise de l'entreprise du *Jahrbuch* par la *Preussische Akademie* en 1928 ou encore la fusion du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* avec la *Revue semestrielle* en 1931/1932.

53. Cf. SIEGMUND-SCHULTZE 1993, chapitres 1, 2, 3 et 5.

54. C'est le cas pour le tome de l'année 1926. De plus, le tome de l'année 1927, paraît en 1931, quatre ans avant le tome de 1926 qui paraît en 1935 ; les tomes des années 1933, 1934 et 1935 paraissent successivement en 1934, 1935, 1936, alors que le tome de l'année 1932 n'est pas encore paru (il ne l'est qu'en 1938).

ambition de recenser de façon exhaustive les publications mathématiques mondiales<sup>55</sup>. Ce dernier répertoire bénéficie de moyens beaucoup plus importants que le *Jahrbuch*. À titre d'exemple à la fin des années 1930, alors que le *Jahrbuch* recense 6000 publications par an, le *Zentralblatt* en recense 50000<sup>56</sup>.

Pour chercher des références et une classification des thèses de mon corpus, j'ai donc consulté à la fois le *Jahrbuch* (pour la période entre 1914 et 1942) et également le *Zentralblatt* (pour les doctorats soutenus entre 1931 et 1945 qui ne sont pas recensés dans le *Jahrbuch*)<sup>57</sup>.

Plusieurs problèmes sont cependant posés par l'utilisation de ces deux outils bibliographiques. Tout d'abord sur les 242 doctorats, 75 ne sont recensés par aucun de ces deux répertoires<sup>58</sup>. J'ai donc adopté une méthode systématique pour classer ces travaux que je détaille dans la prochaine sous-partie<sup>59</sup>. Cette méthode est rendue d'autant plus nécessaire à cause du classement donné dans la version numérisée du *Zentralblatt*. Tout d'abord, l'indication de classement ne figure pas systématiquement pour les thèses recensées par ce répertoire<sup>60</sup>. De plus, le classement, quand il est indiqué, est celui qui a été rajouté lors de la numérisation du répertoire. Les termes utilisés correspondent alors à la norme actuelle MSC 2000 (Mathematics Subject Classification Scheme) qui donne une vision anachronique des mathématiques de l'entre-deux-guerres. Les retards du *Jahrbuch* peuvent déjà entraîner pour certains domaines particuliers<sup>61</sup> un décalage entre la classification du doctorat au moment de l'écriture de la thèse et sa classification au moment de sa recension. Mais l'utilisation d'une grille de classification actuelle pour référencer des productions mathématiques antérieures soulève encore davantage de décalages. J'ai donc repris le classement de l'ensemble des thèses référencées uniquement par le *Zentralblatt* pour leur associer une terminologie correspondant à la vision contemporaine des mathématiques que propose le *Jahrbuch*<sup>62</sup>.

55. Cf. SIEGMUND-SCHULTZE 1993, p. 19. Dans les années 1930, le *Zentralblatt* est le seul autre répertoire à avoir de telles ambitions. Ce n'est plus le cas à la fin des années 1930 et au début des années 1940 où se multiplient les entreprises de recensement. Siegmund-Schultze évoque notamment la création en 1940 à la fois des *Mathematical Reviews* et du *Bulletin analytique* par le CNRS à Paris.

56. Cf. SIEGMUND-SCHULTZE 1993, p. 23.

57. La recherche a été simplifiée par la numérisation de ces répertoires et leur mise en ligne sur internet aux adresses suivantes :

- <http://www.emis.de/MATH/JFM/> pour le *Jahrbuch* ;
- <http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/> pour le *Zentralblatt*. Sur ce site la base de donnée sur laquelle se fondent les recherches contient également toutes les références du *Jahrbuch*.

Je suis cependant aller consulter les exemplaires papiers du *Jahrbuch* pour vérifier certaines recensions, modifiées lors de la numérisation du répertoire.

58. 66 sur les 203 de la faculté des sciences de Paris, 9 sur les 39 soutenus en province.

59. L'application de cette méthode aux 75 mémoires se trouve détaillée en annexe de la thèse : j'y détaille comment le classement a été obtenu pour cet ensemble de thèses.

60. L'indication « not reviewed » figure pour sept d'entre elles.

61. comme en théorie de la relativité.

62. Les justifications figurent dans le fichier en annexe. Elles concernent notamment les 29 doctorats d'État soutenus entre 1942 et 1945.



Un autre problème est également posé dès le départ par l'utilisation de ces deux répertoires bibliographiques : il s'agit d'entreprises allemandes qui se réfèrent donc à une vision allemande de l'organisation des frontières entre domaines mathématiques<sup>63</sup>. Comme je l'ai déjà évoqué pour la période antérieure en comparant l'index du *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques* avec celui du *Jahrbuch*<sup>64</sup>, le décalage entre les visions nationales des disciplines existe et persiste dans l'entre-deux-guerres. En témoignent notamment les évolutions des noms des chaires de sciences mathématiques de la faculté des sciences de la Sorbonne. La deuxième chaire de « Calcul différentiel et intégral », créée en 1904, est transformée en 1921 en chaire de « théorie des groupes et calcul des variations », puis en 1927 en chaire de « théorie des fonctions et théorie des transformations » et en 1939 en chaire de « théorie des fonctions ». Le rapprochement de domaines dans l'intitulé des chaires, tels que l'analyse et l'algèbre<sup>65</sup>, semble caractéristique d'une vision française des domaines mathématiques et n'a aucun écho dans l'évolution du *Jahrbuch*. Déjà dans le *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*, y compris dans la dernière édition de son *Index* en 1916, les champs de l'algèbre et de l'arithmétique étaient intégrés dans le chapitre de l'analyse<sup>66</sup>.

C'est pourquoi en plus de l'utilisation de ces répertoires, dans le cadre de ma thèse, j'ai eu recours au corpus des rapports de thèses, ainsi qu'aux préfaces ou avant-propos ou introductions des doctorats pour vérifier que le classement associé aux mémoires ne divergeait pas des considérations françaises des champs mathématiques abordés par l'étudiant. En effet, je m'intéresse aux dynamiques de la recherche mathématique *en France* et il est donc important et nécessaire de connaître le point de vue des acteurs.

### 2.3.2 Méthodes de classement

Je présente ici la méthode que j'ai suivie pour classer l'ensemble des thèses et qui m'a permis d'affiner la première classification des doctorats qui avait été faite lors de mon D.E.A. Classer les mémoires me permet de procéder ensuite à une analyse quantitative des sujets de thèses ainsi qu'à une analyse du corpus à des niveaux supérieurs. L'image globale des dynamiques de la recherche mathématique française dans l'entre-

---

63. D'après FAYET-SCRIBE 2000, il n'existe en France, pendant la période de l'entre-deux-guerres, aucune autre entreprise analogue pour les sciences mathématiques même si certains scientifiques français participent à des entreprises ou commissions internationales et généralistes comme l'Institut international de bibliographie, qui vise à organiser la coopération scientifique internationale pour l'élaboration d'un Répertoire bibliographique Universel et qui prend la forme en France du Bureau bibliographique de Paris, puis du Bureau bibliographique français en 1924.

64. Cf. section 1.2, 50.

65. Ce rapprochement ne s'explique pas uniquement par la personnalité des différents mathématiciens qui en deviennent titulaires (successivement Vessiot (1921-1927), Garnier (1928-1934), Montel (1934-1939)).

66. Cette interaction entre les deux domaines apparaît d'ailleurs de façon très claire dans les recherches entreprises dans certaines thèses que j'ai référencées en arithmétique et en algèbre, comme je le montrerai dans le quatrième chapitre de la présente thèse.

deux-guerres qui en résulte dépend alors de façon cruciale des différents domaines et disciplines que je considère. L'organisation du *Jahrbuch* – en chapitres et sections – ayant connu des profondes modifications durant la période<sup>67</sup>, j'ai essayé d'atténuer les conséquences de ces changements en regroupant certaines de ses sections pour obtenir des domaines homogènes et stables dans lesquels je classe les doctorats.

### Création des niveaux de mots-clés

L'analyse des évolutions de l'organisation du *Jahrbuch*<sup>68</sup> m'a permis d'établir plusieurs niveaux de mots-clés. Les mots-clés de premier niveau correspondent globalement aux titres des chapitres du répertoire dans lesquels sont référencés des doctorats. Les quatre plus importants domaines correspondant à ces mots-clés sont : l'arithmétique et l'algèbre, la géométrie, l'analyse et les mathématiques appliquées qui incluent la mécanique, la physique mathématique, ainsi que l'astronomie et la géodésie.

J'en considère également deux autres, comme je l'explique plus loin, la théorie des ensembles et le calcul des probabilités.

Le second niveau de mots-clés correspond au niveau des sections du *Jahrbuch*<sup>69</sup>. Pour une analyse quantitative pertinente des sujets, j'ai donc procédé au regroupement de certaines sections, au prolongement de leur durée d'existence sur tout l'entre-deux-guerres.

En ce qui concerne tout d'abord les sujets relatifs à l'arithmétique et à l'algèbre, en rassemblant les deux chapitres correspondants du *Jahrbuch* l'ensemble forme un pôle qui reste globalement stable<sup>70</sup> même si les divisions à l'intérieur changent à plusieurs reprises d'intitulés. Peu de thèses étant référencées dans ce domaine (16 sur 242), je n'ai pas créé un second niveau de mots-clés.

En ce qui concerne la géométrie, l'un des chapitres les plus stables du *Jahrbuch*, j'ai indiqué un deuxième niveau de mots-clés : géométrie différentielle (même si cette

---

67. Les trois plus importantes interviennent pour les tomes des années 1916-18, puis pour le tome de 1935 et pour celui de 1939.

68. Je ne détaille pas ici toutes ses évolutions.

69. Dans ma terminologie, un chapitre est divisé en plusieurs sections.

70. À partir du tome des années 1916-1918, les deux domaines sont regroupés dans le répertoire et le restent jusqu'au tome de 1942.

section n'apparaît que dans le tome des années 1916-1918)<sup>71</sup>, géométrie algébrique, topologie<sup>72</sup> et géométrie analytique<sup>73</sup>.

En ce qui concerne l'analyse, j'ai regroupé plusieurs sections du *Jahrbuch*, à l'intérieur desquels une plus grande précision est rendue impossible à cause des modifications trop importantes du répertoire. Cela m'a conduit à un deuxième niveau de mots-clés : « théorie des fonctions »<sup>74</sup> et « calcul différentiel et intégral »<sup>75</sup>. Le nombre de thèses référencées dans ces deux domaines m'a conduit à distinguer un troisième niveau de mots-clés. En théorie des fonctions, je distingue pour le classement des mémoires les domaines suivants même s'ils n'apparaissent qu'en 1916-1918<sup>76</sup> : « théorie générale des fonctions réelles », « théorie générale des fonctions de la variable complexe »<sup>77</sup> et « fonctions spéciales ». Ces trois rubriques restent stables jusqu'en 1939 où la structure du *Jahrbuch* se modifie profondément. Les thèses qui sont soutenues au-delà de cette date en théorie des fonctions appartiennent uniquement aux rubriques suivantes : « fonctions de la variable complexe »<sup>78</sup> et « dérivation et intégration des fonctions réelles », « approximation des fonctions réelles »<sup>79</sup>, « fonctions particulières de l'analyse réelle »<sup>80</sup>. Je ne procèderai cependant pas à une analyse quantitative de ces informations. Cette division du domaine me semble propre au répertoire allemand. Par la lecture des rapport des thèses, on peut constater que les mathématiciens français distinguent eux

71. Cette section n'apparaît que pour le tome de 1916-1918, mais la thèse de Besserve en 1915 (seul mémoire concerné) y est référencée. Elle reste stable jusqu'au tome de 1939. J'y ai intégré les sections suivantes où des thèses, soutenues après 1939 sont classées : « variétés riemanniennes », « géométrie différentielle dans les espaces euclidiens » et « géométrie différentielle de groupes de Lie particuliers ».

72. Cette section n'apparaît qu'en 1925 mais concerne dès cette date une thèse, celle de Ben-Zion Liefeld et elle disparaît dans le tome de 1939. Une rubrique semble alors la remplacer dans le répertoire : « géométrie différentielle topologique » mais aucune thèse n'y est référencée. J'y ai intégré les thèses qui avant 1925 appartiennent à la section considérations théoriques de continuité et de théorie des ensembles–Analysis situs.

73. J'y ai regroupé les thèses référencées successivement dans la section « géométrie analytique et synthétique » puis « géométrie analytique et projective ».

74. La section correspondante du *Jahrbuch* existe explicitement en 1914-1915.

75. Cette section existe explicitement dans le tome de 1914-1915 et se trouve ensuite éclatée dans les tomes suivants.

76. Cela ne concerne en fait que la thèse de Pérès de 1914, qui de toutes les façons est classée dans le répertoire informatisé dans la rubrique « théorie générale de la variable complexe ».

77. J'ai également inclus dans ce domaine la section distinguée par le *Jahrbuch* sous le titre « Représentation conforme et uniformisation ». Cette section existe depuis le tome de 1916 et elle disparaît à partir du tome de l'année 1935. Une unique thèse est concernée : celle de René de Possel, *Quelques problèmes de représentation conforme*, 1932. Dans le rapport de cette thèse, Julia la catégorise d'ailleurs comme une thèse de « théorie des fonctions ».

78. que j'ai assimilé à la section antérieure.

79. J'ai intégré ces deux rubriques à la rubrique précédente « théorie générale des fonctions réelles ». La question peut se poser de la pertinence du regroupement de la rubrique « approximation des fonctions réelles » avec celle des fonctions de la variable réelle. Il s'agit en fait de la thèse de Raphaël Salem *Essais sur les séries trigonométriques*, 1939. En 1923, Ervand Koogbeliantz soutient une thèse intitulée *Sur les séries trigonométriques et la série de Laplace*, qui est classée dans la section analyse, théorie des fonctions de la variable réelle, ce qui justifie ma démarche. J'y ai de même intégré la thèse de Laurent Schwartz : *Étude des sommes d'exponentielles réelles*, 1943.

80. que j'ai intégré dans la rubrique précédente « Fonctions particulières ».

aussi la théorie des fonctions réelles de la théorie des fonctions de la variable complexe mais soulignent des interactions entre les différents domaines de théorie des fonctions. En calcul différentiel et intégral, je distingue d'une part les thèses classées dans les rubriques qui traitent des équations différentielles (équations différentielles partielles, équations différentielles ordinaires, équations différentielles de type elliptique, la théorie du potentiel), d'autre part les thèses classées dans les rubriques concernant les équations intégrales, les équations fonctionnelles, l'analyse fonctionnelle<sup>81</sup>, et enfin des thèses traitant du « calcul des variations »<sup>82</sup>. Je n'ai pas intégré dans ces deux gros domaines cités précédemment les thèses classées dans les trois sections du *Jahrbuch* « séries »<sup>83</sup>, « Groupes continus, Invariants différentiels, invariants intégraux »<sup>84</sup>, et « analyse pratique »<sup>85</sup>. Pour les trois thèses concernées, je donne le premier niveau de mots-clés (analyse) ainsi que les indications ci-dessus et les regroupe dans mon analyse quantitative dans un deuxième niveau de mots-clés sous le titre « autres sujets ».

À côté de ces sections du *Jahrbuch* qui explicitement font partie du domaine de l'analyse durant toute la période de parution du *Jahrbuch* pendant l'entre-deux-guerres se trouve le domaine du calcul des probabilités et ses applications. Dans les évolutions de l'organisation du *Jahrbuch*, cette section connaît de nombreux changements. Dans le tome de 1914-1915, elle est tout d'abord autonome, mais aucune thèse n'y est classée. À partir du tome de 1916-1918, elle est intégrée au chapitre de l'analyse<sup>86</sup> jusqu'en 1939, où elle constitue alors un chapitre de nouveau autonome du répertoire : « Calcul des probabilités et ses applications »<sup>87</sup>. Mis à part la thèse de Robert Deltheil qui est soutenue en 1920, les sept autres le sont à partir des années 1937-1938, c'est-à-dire au moment où la classification du *Jahrbuch* connaît une évolution particulière de ce domaine. J'ai donc décidé de faire du « calcul des probabilités et ses applications » un mot-clé de premier niveau dans lequel je classe les thèses correspondantes et pour lequel je n'ai pas élaboré de mot-clé de deuxième niveau.

À côté de ces chapitres, figure dans le *Jahrbuch* un autre chapitre à l'intérieur duquel sont référencées plusieurs thèses, que j'appelle « théorie des ensembles » et qui

81. Il s'agit notamment de la section IV.7 (Équations intégrales et équations fonctionnelles analogues. Fonctions d'une infinité de variables) dans les tomes de 1916 à 1935, qui change cependant de nom à plusieurs reprises, et qui se retrouve ensuite éclatée dans les tomes suivants en plusieurs rubriques.

82. Rubrique qui existe sur toute la période.

83. Une unique thèse est concernée : celle de Nikola Obrechhoff, *Sur la sommation des séries divergentes*, 1933. Il ne s'agit pas d'après le rapport de séries de fonctions mais de séries de termes de la forme  $\sum a_n$ .

84. Il s'agit de la thèse d'Henri Mineur, *Sur la théorie analytique des groupes continus finis*, 1925.

85. Il s'agit de la thèse de Pierre Bergeot, *Sur l'intégration approchée de quelques équations simples de la physique mathématique. Méthode des moindres carrés et des moments. Emploi de développements polynomiaux*. Elle n'est pas classée par le *Jahrbuch*, mais son contenu concerne des mathématiques très appliquées.

86. Section IV. 16, dont le nom n'évolue que ponctuellement jusqu'en 1939.

87. et ceci, jusqu'à la dernière année de parution du mémoire en 1942.

constitue un mot-clé de premier niveau. Le chapitre correspondant du *Jahrbuch* est, pour les tomes de 1914 à 1938, le chapitre « Fondements des mathématiques. Théorie des ensembles » (chapitre II). En 1939, le titre évolue et devient simplement « Fondements des mathématiques ». Une nouvelle rubrique apparaît alors au sein de la section « analyse » : « Théorie des ensembles ». Cette évolution concerne une thèse du corpus, celle de Ky Fan, *Sur quelques notions fondamentales de l'Analyse générale*, 1941. Selon le rapport, la thèse traite de l'extension de certaines notions de calcul fonctionnel et différentiel à des catégories d'espaces abstraits (espaces cartésiens comme espaces de fonctions) et aborde également des notions relatives à la théorie des dimensions. En comparant ce rapport à celui d'autres thèses classées en Théorie des ensembles<sup>88</sup> ou aux introductions et avant-propos<sup>89</sup>, il semble alors malaisé de distinguer cette thèse des autres mémoires classés en théorie des ensembles, d'autant que les thématiques abordées par Ky Fan ne sont présentes dans aucun des autres doctorats d'analyse soutenus à la même période.

Enfin, le domaine qui pose le plus de problèmes est celui que j'appelle « mathématiques appliquées » comme mot-clé de premier niveau et dans lequel je regroupe les différents champs de la mécanique, de la physique mathématique et de l'astronomie<sup>90</sup>. Les chapitres du *Jahrbuch* correspondant à ces domaines ne cessent de changer de structure<sup>91</sup> et de dénomination. De plus, une partie importante des thèses qui ne sont recensées par aucun des répertoires considérés (le *Jahrbuch* et le *Zentralblatt*) appartiennent à ce domaine.

Un point sensible concerne tout d'abord le chapitre du *Jahrbuch* intitulé « astronomie, géodésie et géophysique ». Sa division interne en sections connaît certaines évolutions ponctuelles<sup>92</sup>, mais le chapitre reste autonome et continue d'exister jusqu'en 1935. Dans le tome de 1935, il disparaît et je perds alors la recension de nombreuses thèses qui semblent appartenir à ce chapitre après 1935<sup>93</sup>. On ne retrouve dans aucun autre chapitre du *Jahrbuch* des sections d'astronomie, seule une section « géodésie » est mentionnée dans le chapitre géométrie<sup>94</sup> et elle disparaît à partir de 1939.

---

88. Dans celui de la thèse de Jean Mirguet, *Nouvelles recherches sur les notions infinitésimales directes du premier ordre*, 1934, Élie Cartan évoque dans ce dernier des résultats de l'auteur sur des notions telles que le *paratingent* d'ensembles, les ensembles *orthosuperficiels* et *orthocurviligne*, de *biparatingent* d'ensembles en géométrie infinitésimale.

89. Comme pour la thèse de Samuel Cholodenko, *Sur la mesure des ensembles*, 1930.

90. Je procède ainsi de la même manière qu'Hélène Gispert dans GISPERT 1991, ce qui me permet de comparer l'évolution des sujets de doctorats du début du XX<sup>ème</sup> siècle et ceux de l'entre-deux-guerres.

91. et dans leur division en sections.

92. Notamment en 1925.

93. Avec ma méthode de classement, j'en ai ainsi comptabilisé 10 entre 1935 et 1945. Aucune d'entre elles n'est référencée non plus par le *Zentralblatt*.

94. Section V.9.

De plus la délimitation des différents domaines semblent poser problème. Dans quelle mesure une thèse comme par exemple celle de Marcel Mayot (*Sur la stabilité d'amas d'étoile*, en 1945), classée selon l'organisation du *Jahrbuch* en 1942 dans la section « Physique mathématique, hydro- et aéronautique, applications astrophysiques », appartient-elle au domaine de l'astronomie ou de la physique mathématique pour les sciences mathématiques françaises de la période ? Ce type d'interrogations remet donc en question toute analyse quantitative sur les champs plus précis que je distingue et impose une étude plus fine des contenus.

La question de frontière entre les différentes disciplines des mathématiques appliquées se pose également pour les chapitres du *Jahrbuch* « physique mathématique » et « mécanique ». Ils ne cessent d'évoluer. Le chapitre « physique mathématique » n'apparaît qu'en 1925<sup>95</sup> et disparaît en 1935. Dans l'organisation du répertoire de 1935 à 1939, les sections correspondantes appartiennent au chapitre « mécanique ». On les retrouve sous le titre « mécanique statistique et mécanique des quantas ». Dans les tomes de 1939 à 1942, le chapitre « mécanique » disparaît à son tour mais le chapitre « physique mathématique » réapparaît<sup>96</sup>. Il comprend alors les sections appartenant antérieurement au chapitre de la mécanique et notamment celles qui concernent la mécanique des corps solides ainsi que « l'hydro- et l'aérodynamique ». Il ne semble donc pas pertinent de distinguer, dans un premier temps, ce qui relève de la physique mathématique par rapport à ce qui relève de la mécanique.

De plus, cette question de frontière ne se pose pas seulement à l'intérieur du domaine des mathématiques appliquées. Elle se pose également entre certains domaines des mathématiques appliquées et d'autres domaines de premier niveau de mots-clés tel que l'analyse. Certaines thèses référencées par le *Jahrbuch* dans les chapitres de physique mathématique ou de mécanique concernent en effet l'étude d'équations différentielles particulières. Pour ces cas particuliers, j'ai cependant respecté le classement initial du *Jahrbuch* dans ce que j'appelle « mathématiques appliquées ». Il faut cependant relever l'importance des interactions entre ces domaines qui transparaît dans la structure du répertoire bibliographique.

Dans un deuxième temps, j'ai cependant élaboré des mots-clés de deuxième niveau relatifs au mot-clé de premier niveau « mathématiques appliquées » et j'ai notamment divisé l'ensemble formé par la mécanique et la physique mathématique. J'ai ainsi dis-

---

95. Il regroupe alors les sections « Généralités », « Théorie de la relativité » et « théorie des quantas », sections présentes en fait auparavant dans le chapitre XI (en 1914-1915) et VII (à partir de 1916) « Théorie de la relativité et théorie de la gravitation ».

96. Se trouve également pour la première fois dans le répertoire une section relative à la physique mathématique au sein de l'analyse : « Équation différentielle de la physique mathématique et Théorie du potentiel ». Aucune des thèses du corpus ne s'y trouve référencée mais cette évolution traduit l'interaction forte entre l'analyse et la physique mathématique que l'analyse des rapports de thèses a déjà montrée pour la période entre 1900 et 1914 et que l'analyse des rapports pour la période suivante montre également.

tingué les mots-clés suivants<sup>97</sup> : astronomie, géodésie et géophysique, mécanique des solides<sup>98</sup>, mécanique des fluides<sup>99</sup>, théorie de la relativité et théorie des quantas<sup>100</sup> et cinématique<sup>101</sup>.

### Classement des doctorats d'État

Munie de ces mots-clés de différents niveaux j'ai donc pu procéder au classement des doctorats d'État. La première étape a consisté à chercher si le mémoire est référencé par le *Jahrbuch*. Si oui, j'indique alors les titres du chapitre et de la section du *Jahrbuch* mentionnés par le répertoire ainsi que le classement, retravaillé par mes soins<sup>102</sup>. Je vérifie également si le rapport (quand il est consultable) ou l'avant-propos du mémoire (dans les autres cas) confirme le classement<sup>103</sup>.

Si le doctorat n'est pas référencé par le *Jahrbuch* et s'il est soutenu après 1931, je consulte alors le *Zentralblatt* pour vérifier si une référence du travail n'y est pas. Si oui, je saisis l'indication de publication que donne le répertoire. Je regarde également les mots-clés qui sont associés. Comme ces références ont été renormalisées avec une

---

97. À une exception près, la thèse de Jean Bernier, *Sur la théorie des cavités électromagnétiques*, 1945, classée en « physique mathématique, électrodynamique », j'ai pu répartir dans ces domaines l'ensemble des thèses de mathématiques appliquées.

98. Cet ensemble regroupe les sections « statique et dynamique des systèmes de points et des corps solides » (pour les tomes de 1914 à 1925) et « statique et dynamique » (pour les tomes de 1925 à 1939) du chapitre « mécanique » ainsi que la section « mécanique des corps solides » du chapitre « physique mathématique » après 1939. Une partie, à partir des années 1930, semble, à la lecture des rapports coïncider avec ce qui relève pour les mathématiciens français de la mécanique céleste. Par exemple, dans le rapport sur la thèse de Georges Meyer, *Solutions voisines des solutions de Lagrange dans le problème des  $n$  corps*, 1932, mémoire que j'ai classé en mécanique, statique et dynamique, jugeant le travail du candidat, Jean Chazy écrit : « Il connaît bien et il sait appliquer toute une partie de la Mécanique Céleste. » On peut également citer la mention explicite de ce domaine dans le titre de la thèse d'Hervé Fabre, *Les mouvements récurrents en Mécanique céleste et la variation des éléments des orbites*, 1938, le mémoire étant classé par le *Jahrbuch* en physique mathématique, mécanique des corps solides. Mais on ne peut faire exactement coïncider cette section avec la mécanique céleste française. Certaines des thèses des années 1920 ne s'y rattachent en aucune manière. De plus dans certains rapports de thèses, classées par le *Jahrbuch* en Astronomie, se trouve également mentionné le terme de « mécanique céleste », comme par exemple dans celui sur la thèse de Kiveliovitch, *Sur le point singulier du problème des trois corps*, 1932.

99. Cet ensemble regroupe les sections du chapitre mécanique « mécanique des corps déformables » (pour les tomes de 1916 à 1925) et « mécanique des fluides » (pour les tomes de 1925 à 1939) ainsi que la section « hydro et aérodynamique » du chapitre « physique mathématique » après 1939.

100. Cet ensemble regroupe les sections « théorie de la relativité » et « théorie des quantas » du chapitre « physique mathématique » (pour les tomes de 1925 à 1935 puis de 1939 à la fin). En effet, pour les années où le chapitre « physique mathématique » disparaît de la classification du *Jahrbuch*, aucune des thèses soutenues ne traite de ce sujet.

101. La section appartient au chapitre « mécanique » entre 1914 et 1939, période pendant laquelle sont soutenues les thèses qui y sont référencées. L'évolution de l'organisation du *Jahrbuch* en 1939, où cette section appartient au chapitre « Géométrie » n'a pas d'incidence sur l'analyse quantitative que je fais. Aucune des thèses de géométrie soutenues dans les universités françaises après 1939 ne sont classées dans cette rubrique particulière.

102. quand celui-ci diffère du fait de recoupement de sections.

103. Pour les niveaux de mots-clés dont j'ai besoin pour mon analyse quantitative des sujets, cela est le cas pour tous les mémoires référencés par le *Jahrbuch*.

terminologie anachronique, je ne me contente pas de cette indication et je procède alors de la même façon que pour les doctorats qui ne sont pas référencés.

Je commence par regarder quelles sont les autres publications de l'auteur qui sont recensées en m'intéressant en particulier à celles qui paraissent dans les mêmes années que celles où il soutient sa thèse<sup>104</sup>. Je regarde leur classement en privilégiant celles qui semblent explicitement se rapporter au sujet de la thèse. Si aucun travail du doctorant n'est référencé ou si aucune de ces publications ne semble a priori traiter de sujets analogues à ceux de son mémoire, j'effectue une recherche dans le *Jahrbuch* sur les mots du titre. Parmi les résultats de cette recherche, je regarde le classement des articles qui paraissent à des dates proches de la date de soutenance du doctorat. Suivant la date des publications qui me servent à classer le mémoire, je regarde comment la section correspondante du *Jahrbuch* a évolué à la date de soutenance de la thèse. Je la modifie en conséquence dans ma base et indique les différents niveaux de mots-clés correspondants à cette section.

Quelles que soient les démarches utilisées, la dernière étape consiste à comparer le classement obtenu avec les indications de classification que peut donner le rapport sur la thèse, d'autant qu'à la fin de certains rapports, son auteur caractérise parfois le travail sur lequel il rapporte, décrivant son appartenance à un certain domaine des mathématiques<sup>105</sup>. Cela me permet de m'assurer de la validité de la méthode et également de trancher pour les cas où les méthodes précédentes donnent des résultats qui ne concordent pas<sup>106</sup> ou ne fournissent aucun résultat<sup>107</sup>.

Dans aucun cas, il n'y a de divergence majeure entre les domaines mathématiques décrits par ma méthode de classement et ceux évoqués dans les rapports ou introductions. Si incertitude il y a, je l'ai précisé dans le fichier que j'ai créé en annexe. Elle ne porte jamais sur le premier niveau des mots-clés mais sur ceux de deuxième ou troisième niveau<sup>108</sup>. La précision sur laquelle porte l'incertitude est cependant telle qu'elle

104. Elles peuvent être antérieures ou postérieures à cette date de soutenance. Dans un cas comme dans l'autre, a priori, les travaux peuvent se rapporter aux thèmes abordés dans le doctorat. Il peut s'agir dans un cas de travaux préparatoires, dans l'autre de travaux poursuivant et prolongeant les recherches présentées dans la thèse.

105. À titre d'exemple, Gaston Julia dans le rapport sur la thèse de René de Possel, *Quelques problèmes de représentation*, 1932, évoque le domaine traité par le candidat : « Dans le présent mémoire, René de Possel introduit, en théorie des fonctions, une notion nouvelle... »

106. Comme dans le cas de la thèse de Max Eger, *Les systèmes canoniques d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*, 1943, cf. fichier en annexe.

107. Dans seulement deux cas, pour les thèses de Maître (*Étude statistique des excès de couleur des étoiles*, 1944) et Genty (*Méthode nouvelle de navigation astronomique aérienne*, 1944) les recherches dans les répertoires bibliographiques n'ont donné aucun résultat. Je me suis alors seulement référée aux renseignements fournis par le rapport de thèse.

108. tels que théorie des fonctions de la variable complexe, théorie des fonctions de la variable réelle ; ou encore physique mathématique et mécanique. L'exemple de la thèse de Florin Vasilescu *Essai sur les fonctions multiformes de variables réelles*, 1925, peut illustrer cette incertitude.



n'empêche pas une analyse quantitative des sujets des mémoires fondée essentiellement sur le premier niveau de mots-clés.

Signalons cependant une limite à cette démarche : pour les thèses non référencées par le *Jahrbuch* et le *Zentralblatt*, les publications de l'auteur auxquelles je me réfère sont assez fréquemment des notes aux *Comptes rendus* ou des ouvrages dont la taille n'est pas comparable avec celle du mémoire. Ils ne reflètent donc qu'une partie de la recherche réalisée dans le cadre du doctorat. C'est pourquoi il apparaît nécessaire, pour surmonter en partie cette limite, de vérifier que ce classement ne rentre pas en contradiction avec la description que le rapport, l'avant-propos ou la préface du mémoire en donnent. Cette limite empêche cependant, à ce stade, une analyse fine des rapports entre les différents champs des disciplines mathématiques considérées. D'autres limites sont également à souligner : l'accès restreint au contenu des thèses que donnent les classements, les évolutions sensibles de l'organisation du répertoire et le nombre des thèses qui ne sont pas référencées. Seule une analyse des rapports des mémoires ou des contenus permet de rendre compte précisément des interactions entre les différents domaines abordés par les doctorants en sciences mathématiques de l'entre-deux-guerres.

## 2.4 Résultats du premier niveau d'analyse

Dans le premier niveau d'analyse du corpus des thèses, il s'agit tout d'abord d'analyser quantitativement le nombre de doctorats soutenus dans les différentes facultés de sciences françaises afin d'évaluer la dynamique globale de la recherche mathématique pendant l'entre-deux-guerres et plus globalement sur la période entre 1900 et 1945. Par « dynamique globale de la recherche », j'entends ici percevoir l'évolution et le développement de la recherche en sciences mathématiques grâce au nombre de doctorats soutenus.

Dans un deuxième temps, l'analyse quantitative est réalisée selon les sujets des thèses. Elle est relative à la répartition des thèses dans les différents domaines des sciences mathématiques de premier niveau de mot-clé. Ces domaines, comme je l'ai expliqué précédemment, sont construits à partir du répertoire bibliographique, le *Jahrbuch*, qui est celui que j'ai également utilisé pour le classement des doctorats de la période précédente entre 1900 et 1914. L'évolution de la répartition des mémoires à l'intérieur de ces domaines peut alors être analysée plus globalement pour la période entre 1900 et 1945, afin de percevoir les transformations des équilibres entre les domaines entre les deux périodes de 1900 à 1914 et de l'entre-deux-guerres.

Pour les deux points de vue de l'analyse quantitative, les périodes considérées seront divisées en intervalles de cinq ans<sup>109</sup>. Je reprends les résultats dont une partie a déjà été présentée dans mon mémoire de DEA. La comparaison avec les résultats obtenus pour la période de 1900 à 1914 est ici originale.

### 2.4.1 Analyse quantitative du nombre de doctorats

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de thèses d'État soutenues dans l'ensemble des facultés des sciences en France. On observe un découpage très net de la période de l'entre-deux-guerres. Après une chute du nombre de doctorats soutenus pendant la première guerre mondiale, ce nombre croît de façon très prononcée pendant les années 1920. En l'espace de cinq années entre 1920 et 1924, les effets du conflit ont en partie été effacés (le nombre de doctorats soutenus entre 1920 et 1924 égalant approximativement celui de la période entre 1910 et 1914) et ont disparu dans l'intervalle de temps suivant. En effet, si la croissance du nombre n'avait connu aucune discontinuité du fait de la guerre, l'augmentation serait de cinq doctorats par intervalle de temps, on atteindrait alors pour la période entre 1930 et 1934 le nombre de 53 ce qui est à une thèse près le nombre obtenu. Les effets de la guerre se font donc sentir essentiellement pendant la guerre et au début des années 1920. Le massacre causé par le conflit se traduit par une baisse du nombre des soutenances pendant le conflit et par un plus faible nombre de ces soutenances entre 1920 et 1924<sup>110</sup>. À partir de la deuxième partie des années 1920 les doctorants sont des étudiants qui pendant la guerre n'avaient pas l'âge de combattre. Cette période de l'après-guerre apparaît donc comme une période, où les effets quantitatifs du conflit, après avoir été fortement ressentis, sont peu à peu gommés. Le nombre de doctorats se stabilise et stagne ensuite pendant les années 1930, signe manifeste de classes démographiquement creuses. Il diminue ensuite durant le deuxième conflit mondial du fait de la mobilisation, des prisonniers de guerre, de la désorganisation des facultés à cause de l'occupation. Dans un contexte de tensions internationales croissantes au cours des années 1930, on pourrait chercher

109. L'« année de thèse » correspond à l'année de la soutenance. Dans le cas de l'université de Paris, le corpus des rapports de thèse fournit l'année d'écriture des rapports des thèses. En comparant cette date avec celle de la soutenance, on constate qu'il existe souvent un délai assez important (de quelques mois à une année parfois). Cette différence rend impossible une analyse quantitative par année de soutenance. Diviser en intervalles de cinq ans la période de l'entre-deux-guerres permet alors de distinguer six périodes qui permettent de percevoir certaines évolutions, comme l'a montré mon DEA, LELOUP 2004.

110. L'effet ressenti ici est dû au nombre de morts parmi les jeunes étudiants qui entre 1920 et 1924 auraient été en âge de soutenir une thèse. Le nombre des étudiants normaliens qui correspondent à cette tranche d'âge et qui sont décédés lors du conflit témoigne de l'étendue des pertes. On peut signaler que les pertes ne touchent pas uniquement la population des jeunes étudiants mais également celle des jeunes docteurs. Dans les registres d'examens ont été conservées certaines lettres relatant la mort de certains d'entre eux. Aucune ne concerne un docteur ès sciences mathématiques. On peut toutefois citer l'exemple de M. Wohlgemuth, docteur ès sciences physiques en juin 1914 et mort au champ de bataille en mai 1915.

à expliquer ce ralentissement de la croissance des doctorats par une diminution de la part des étudiants étrangers parmi les doctorants alors qu'ils représentent une partie non négligeable de la population des docteurs des années 1920. Il n'en est cependant rien et un nombre important d'étudiants étrangers continuent à participer, y compris pendant la deuxième moitié des années 1930, à la vie universitaire et mathématique française.

1900-1904	1905-1909	1910-1914 <sup>111</sup>	1915-1919	1920-1924	1925-1929	1930-1934	1935-1939	1940-1945
23	28	33	13	29	44	54	54	43

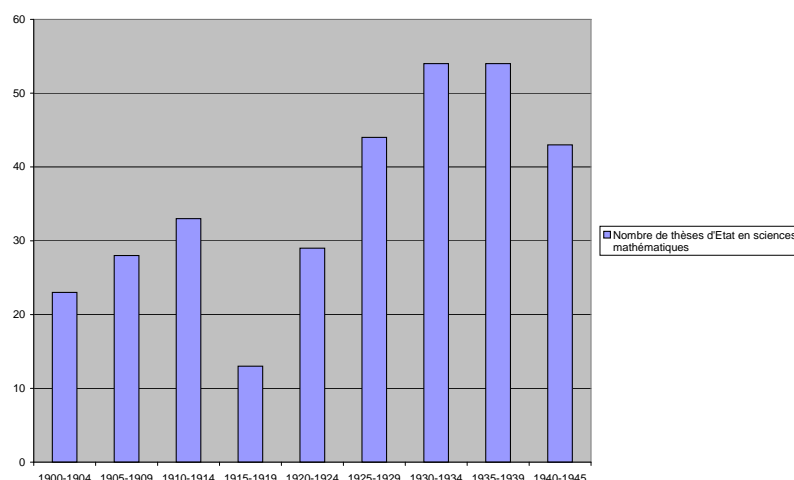


FIGURE 2.1 – Évolution du nombre de doctorats soutenus en France entre 1900 et 1945

Signalons également qu'il n'est pas certain que l'ensemble des thèses indiquées ci-dessus comme soutenues pendant la seconde guerre mondiale aient effectivement été présentées devant un jury selon les usages de soutenance de doctorat. J'ai pu constater en consultant les registres d'examens que les annotations « mobilisés » ou « prisonniers » figuraient beaucoup plus fréquemment sur les procès-verbaux des doctorats présentés entre 1939 et 1945 que pour ceux soutenus pendant la guerre de 1914-1918. Les situations difficiles vécues par certains doctorants ont entraîné des écarts de temps importants entre les dates d'écriture des mémoires, de l'écriture des rapports et de la soutenance en elle-même. Si l'on prend par exemple la thèse de Raphaël Salem : sur le manuscrit du mémoire est indiquée la date du 16 septembre 1939 et la mention « mobilisé » est indiquée sur le registre d'examen. Aucune date ultérieure n'est écrite et le

111. Toutes les thèses de 1914 sont soutenues avant le début de la première guerre mondiale en France (1<sup>er</sup> août 1914). C'est pourquoi j'ai décidé d'inclure l'année 1914 dans l'intervalle 1910-1914, afin de mieux percevoir les conséquences de la première guerre mondiale.

rapport de soutenance de son doctorat ne figure d'ailleurs pas aux Archives nationales, à la suite du rapport de thèse. Dans le cas de Jean Kuntzmann, la même date de 1939 figure sur le manuscrit et sur le rapport de la thèse. Le doctorat est référencé dans le *Catalogue des thèses* en 1941, et la soutenance a lieu en avril 1942. Je n'ai relevé aucun exemple de ce type parmi les thèses soutenues pendant la première guerre mondiale. On peut ainsi penser que, du fait de l'occupation du territoire, les institutions universitaires françaises sont davantage désorganisées en 1939-1945, qu'en 1914-1918 : des soutenances programmées ne peuvent se dérouler.

### 2.4.2 Analyse quantitative des sujets

Pour le premier niveau d'analyse quantitative des sujets, je considère les domaines des sciences mathématiques de premier niveau de mot-clé parmi lesquels l'ensemble des doctorats est classé, c'est-à-dire l'arithmétique et l'algèbre, la géométrie, l'analyse, les mathématiques appliquées (qui incluent la mécanique, la physique mathématique, ainsi que l'astronomie et la géodésie), la théorie des ensembles, le calcul des probabilités. Il faudrait aussi ajouter le domaine de la philosophie<sup>112</sup> dans lequel est référencé une unique thèse, celle Jacques Herbrand, en 1930, *Recherches sur la théorie de la démonstration*.

En comparant les domaines abordés par les doctorats d'État avant la première guerre mondiale puis pendant l'entre-deux-guerres, on constate tout d'abord que deux nouveaux domaines apparaissent : celui de la théorie des ensembles et celui du calcul des probabilités. Ce phénomène n'est pas créé artificiellement par les changements d'indexation du *Jahrbuch*. En effet, j'ai indiqué dans mon étude précédente sur la période entre 1900 et 1914 en me référant aux travaux d'Hélène Gispert, GISPERT 1991, que des notions de théorie des ensembles commençaient à être travaillées dans le cadre de thèses d'analyse dès le premier quart du XX<sup>ème</sup> siècle, mais qu'aucun mémoire de doctorat n'y est entièrement consacré<sup>113</sup>. De plus, la section du *Jahrbuch* existe dès 1905, et aucun travail n'y est pourtant recensé entre 1900 et 1914. Les premiers mémoires à y être classés datent des années 1930. La recension des doctorats dans ce domaine ne coïncide donc pas avec l'apparition de ce domaine dans les rubriques du répertoire. Les années 1930 marquent alors l'émergence de ce domaine parmi les sujets de la recherche mathématique française.

---

112. Il s'agit de la section « philosophie » du chapitre du *Jahrbuch* « Histoire, philosophie et pédagogie ».

113. Comme le décrit Hélène Gispert dans GISPERT 1995a, le rôle de la théorie des ensembles en France à l'époque est celui d'être un outil pour l'analyse.

	Arithmétique et algèbre	Géométrie	Analyse	Mathématiques appliquées
1900-1904	2	4	11	6
1905-1909	1	4	10	11
1910-1914	4	3	10	16
1915-1919	1	3	6	3
1920-1924	0	10	9	9
1925-1929	3	10	18	13
1930-1934	3	5	22	17
1935-1939	5	12	15	16
1940-1945	2	10	8	20

	Théorie des ensembles	Calcul des probabilités	Philosophie
1900-1904	0	0	0
1905-1909	0	0	0
1910-1914	0	0	0
1915-1919	0	0	0
1920-1924	0	1	0
1925-1929	0	0	0
1930-1934	6	0	1
1935-1939	1	5	0
1940-1945	1	2	0

TABLE 2.1 – Évolution des sujets des thèses de sciences mathématiques entre 1914 et 1945

Quant au domaine du calcul des probabilités<sup>114</sup>, d'après l'historiographie de ce domaine dont je ferai un bilan dans le sixième chapitre de la présente thèse, il s'agit ici d'un domaine qui acquiert ce statut pendant les années 1930. Auparavant il n'était pas considéré par la communauté mathématique comme un domaine des mathématiques. L'émergence de ce domaine et son importance croissante à la fin des années 1930 se traduit concrètement par le nombre de thèses soutenues dans ce domaine.

À côté de ces deux domaines qui émergent parmi les sujets de doctorats, l'équilibre entre les domaines traditionnels des mathématiques françaises, que sont l'arithmétique et l'algèbre, la géométrie, l'analyse et les mathématiques appliquées, évolue de façon sensible entre les périodes 1900-1914 et 1914-1945. Une certaine évolution a également lieu au cours de l'entre-deux-guerres.

La part de l'arithmétique et de l'algèbre reste à peu près constante et ne connaît pas de grande variation<sup>115</sup>. En revanche, la part de la géométrie ainsi que celles de l'analyse et des mathématiques appliquées évoluent entre les deux périodes. L'analyse ne représente pas l'unique thème de recherche des doctorants. Cela était déjà le cas

114. qui existe dans le classement du *Jahrbuch* dès les années 1900, car le mémoire de Bachelier de 1900 s'y trouve référencé.

115. Cette part représente en moyenne 6-7 %, excepté entre 1920 et 1924 où aucune thèse de ce domaine n'est soutenue.

avant la première guerre mondiale où l'analyse et les mathématiques appliquées étaient les principaux domaines travaillés de façon équivalente en nombre par les doctorants <sup>116</sup>.

L'analyse quantitative par sujets montre en fait une division de l'entre-deux-guerres en trois périodes : de 1914 à la fin des années 1920, la première moitié des années 1930 et la seconde moitié des années 1930 jusqu'à la seconde guerre mondiale. À chaque période correspond un équilibre différent entre les domaines. Pendant les années 1920, la géométrie, l'analyse et les mathématiques appliquées se partagent l'essentiel des sujets. Cet équilibre constitue un changement notable par rapport à l'avant-guerre avec la part croissante du nombre de mémoires de géométrie (entre les deux périodes, cette part double). Le nombre de thèses d'analyse reste cependant encore supérieur à celui des autres domaines. Dans la première partie des années 1930, la part de la géométrie diminue brusquement au profit essentiellement de la théorie des ensembles <sup>117</sup>. Le nombre de thèses en analyse et en mathématiques appliquées reste stable. En revanche, dans la deuxième partie des années 1930, la part de l'analyse diminue, cette fois-ci au profit du calcul des probabilités. Cette diminution se confirme pendant la deuxième guerre mondiale. La proportion des thèses d'analyse atteint à peine 20%, alors que celle des thèses de mathématiques appliquées approche les 50%. La dynamique de la recherche en analyse s'essouffle dans le sens où ce domaine n'attire plus autant de doctorants et que sa part parmi les autres domaines de la recherche diminue. On peut constater que cette diminution correspond à celle du nombre global des doctorats soutenus. La question se pose alors de l'interprétation de cette correspondance : le domaine de l'analyse n'attire-t-il plus autant les doctorants par rapport à d'autres sujets plus appliqués ou plus nouveaux, ou bien faut-il y voir une conséquence de la seconde guerre mondiale, et si oui laquelle ?

### 2.4.3 Le cas de la faculté des sciences de Paris

L'analyse quantitative dont j'ai présenté les résultats ci-dessus considérait l'ensemble des thèses mathématiques soutenues en France, sans distinction de la faculté d'origine. Sur les 242 thèses soutenues entre 1914 et 1945, 203 le sont à la faculté des sciences de Paris, ce qui représente une proportion de 84% du nombre total. Cette proportion reste globalement constante au cours de la période. Les principaux résultats de notre analyse quantitative et notamment les évolutions entre les périodes de l'avant-première guerre mondiale et l'entre-deux-guerres ne se trouvent pas modifiés par la restriction du corpus des thèses à celles qui sont soutenues à la Sorbonne, comme le montre le tableau 2.2 de répartition par sujets ci-après.

---

116. En moyenne chaque domaine rassemblait 40% des sujets des doctorats.

117. La part cumulée des deux domaines reste en effet constante.

	Arithmétique et algèbre	Géométrie	Analyse	Mathématiques appliquées
1900-1904	2	1	11	4
1905-1909	1	3	10	9
1910-1914	4	3	10	13
1915-1919	1	3	6	2
1920-1924	0	9	8	7
1925-1929	3	8	18	13
1930-1934	2	5	18	15
1935-1939	4	8	11	12
1940-1945	2	8	6	15

	Théorie des ensembles	Calcul des probabilités	Philosophie
1900-1904	0	1	0
1905-1909	0	0	0
1910-1914	0	0	0
1915-1919	0	0	0
1920-1924	0	1	0
1925-1929	0	0	0
1930-1934	3	0	1
1935-1939	1	5	0
1940-1945	1	2	0

TABLE 2.2 – Évolution des sujets des thèses de sciences mathématiques soutenues à Paris entre 1914 et 1945

Seules quelques nuances sont à remarquer. Pour certains domaines, la proportion des thèses parisiennes est supérieure à la moyenne. Comme pour le calcul des probabilités cette proportion peut d'ailleurs atteindre 100%. De même, 88% des thèses d'arithmétique et d'algèbre sont présentées à Paris. Sur les 16 thèses de ce domaine, seules deux sont soutenues en province<sup>118</sup>. La part des thèses d'analyse parisiennes est également légèrement supérieure à 84% : 86,5% des thèses d'analyse sont ainsi présentées à Paris entre 1914 et 1945.

Les domaines des sciences mathématiques où la proportion des thèses parisiennes est inférieure à 84% sont la géométrie (82%), les mathématiques appliquées (82%) et la théorie des ensembles (63%). En étudiant plus précisément les thèses de ces domaines qui sont soutenues en province, on constate qu'elle concernent des sujets particuliers qui ne sont pas repris dans les doctorats parisiens<sup>119</sup>. En ce qui concerne le domaine de la géométrie par exemple, un nombre important de thèses dirigées par Émile Turrière sont soutenues à Montpellier entre 1938 et 1945. Elles sont référencées par mes principes de classement en géométrie. Pourtant elles portent sur des questions

118. Il s'agit des thèses de Marcel Courrier, *Solutions entières des équations de genre 0*, soutenue à Strasbourg en 1931 et d'Oudin, *Étude sur les divers calendriers*, soutenue à Montpellier en 1938.

119. Je le préciserai dans la partie suivante sur les facultés de province.

très appliquées, à la marge de ce domaine, et aucune de ces questions n'est évoquée dans un doctorat parisien en géométrie. Les thèses de mathématiques appliquées soutenues en province, le sont principalement à Lyon. Elles concernent plus spécifiquement le champ de l'astronomie et de la photométrie stellaire. Enfin, comme je le montrerai dans le chapitre suivant <sup>120</sup>, une partie des thèses de théorie des ensembles est élaborée sous la direction de Bouligand. Elles sont soutenues à Poitiers et également à Toulouse, mais toujours en lien avec le mathématicien. De plus, le nombre total de thèses de ce dernier domaine étant faible (8), le fait que 3 thèses de ce champ soient soutenues en province a plus de conséquences que pour les autres domaines qui sont abordés par davantage de doctorants.

À ces quelques nuances près, l'analyse quantitative des sujets des doctorats soutenus à Paris fournit les mêmes résultats que celle du corpus de l'ensemble des thèses. L'analyse n'est pas l'unique domaine dans lequel sont classés des doctorats. Les parts des mémoires soutenus en mathématiques appliquées et en géométrie sont comparables à celle des mémoires d'analyse. L'évolution des équilibres entre domaines est similaire à celle qui a lieu pour le corpus de l'ensemble des thèses et on constate tout autant la diminution de la part de l'analyse. Cette diminution se trouve d'autant plus marquée par la comparaison des domaines abordés par les doctorants pendant la première guerre mondiale et pendant la seconde guerre mondiale. La part des thèses parisiennes en analyse passe ainsi de 50% de l'ensemble des thèses parisiennes à 20%. Cette diminution ne peut être imputée aux circonstances du 2<sup>ème</sup> conflit mondial car elle est déjà sensible dans la décennie précédente. L'étude des rapports des thèses de l'université de Paris permettrait de voir que cette diminution touche essentiellement un sous-domaine particulier de l'analyse : celui du calcul différentiel. Ce domaine, moins travaillé dans le cadre des thèses d'analyse, est en fait repris dans les thèses de mathématiques appliquées et notamment dans les thèses de mécanique et de mécanique des fluides.

Une fois les domaines des sciences mathématiques construits et le classement des mémoires dans ces domaines explicité, le premier niveau d'analyse permet donc de saisir l'évolution des équilibres entre domaines. L'image du milieu mathématique français tel qu'elle est produite par la « mémoire collective » du groupe Bourbaki est réévaluée dès ce niveau d'étude. Ainsi, pour résumer, l'analyse n'est pas le seul domaine travaillé par la recherche française. La place occupée par les mathématiques appliquées et par la géométrie sont significatives. De plus, l'arithmétique et l'algèbre ne sont pas totalement inexistantes avant l'arrivée des membres de Bourbaki sur la scène mathématique française. L'analyse du corpus à des niveaux plus élevés permet dans un second temps de

---

120. Cf. Partie sur la faculté des sciences de Poitiers et sur le rôle de Bouligand, Partie 3.2.2, p. 119.



mieux percevoir quelle est la nature de ces évolutions, quelles sont les mathématiques qui sont travaillées dans les différents domaines, quels rôles (institutionnels ou intellectuels) jouent certains mathématiciens français, tels Élie Cartan pour la géométrie ou Paul Montel pour l'analyse, etc. L'étude des rapports de thèses et des avant-propos des mémoires permet de voir comment certaines notions, certaines théories du premier quart du XX<sup>ème</sup> siècle sont encore travaillées pendant un temps dans les thèses de l'entre-deux-guerres, comment des notions nouvelles sont étudiées dans les mémoires, comment les doctorants s'approprient les nouvelles recherches des domaines considérés.

Cette étude sera réalisée pour les thèses soutenues à la faculté des sciences de Paris, dont j'ai montré qu'elles sont représentatives de l'ensemble du corpus des doctorats de France. Elle concernera dans les trois derniers chapitres de la présente thèse les domaines et sous-domaines des sciences mathématiques sur lesquels il est apparu important de réévaluer ou de tester l'image produite par les historiographies relatives<sup>121</sup>. Il s'agira des domaines de l'arithmétique et de l'algèbre (dans le quatrième chapitre), du sous-domaine de la théorie des fonctions en analyse (cinquième chapitre) et du domaine du calcul des probabilités (dans le sixième chapitre).

Avant de focaliser mon analyse sur le corpus des thèses de ces différents domaines, il est apparu nécessaire d'étudier plus précisément, avec le niveau d'analyse un-et-demi, les thèses soutenues en province. L'un des objectifs est d'étudier comment se développent les différentes facultés de province : quel est leur équilibre relatif dans la production de recherche mathématique. Il s'agit d'observer si certaines facultés jouent un rôle particulier ou se caractérisent par le développement d'un domaine particulier de la recherche. L'idée est également de voir si certaines facultés peuvent constituer un second pôle de la recherche française pendant l'entre-deux-guerres, comme un écho de Paris en province.

---

121. Cf. l'introduction de la présente thèse où j'ai explicité mon choix de ces domaines.

# Chapitre 3

## Les facultés de province

### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Les années 1920 : Strasbourg, un écho de Paris . . . . .</b>	<b>108</b>
<b>3.2</b>	<b>Les années 1930 : Poitiers . . . . .</b>	<b>115</b>
<b>3.3</b>	<b>D'autres pôles en province . . . . .</b>	<b>131</b>

L'analyse quantitative du corpus a montré, dans le chapitre précédent, comment les thèses soutenues pendant l'entre-deux-guerres à la faculté des sciences de Paris sont représentatives de l'ensemble des doctorats français<sup>1</sup>. Décrire Paris comme le centre de la recherche mathématique française, comme le lieu où tout se fait, est également courant dans l'historiographie de l'entre-deux-guerres. Reinhard Siegmund-Schultze dans SIEGMUND-SCHULTZE 2001, Chapitre 6, p. 71-72 utilise ainsi le terme de « monopole » pour décrire la position de Paris face aux autres villes de province dans le domaine de la recherche scientifique.

De fait, les institutions vitrines des mathématiques françaises, sont implantées à Paris : outre la faculté des sciences de la Sorbonne, s'y trouvent l'Académie des sciences, le Collège de France et, à partir de la fin des années 1920, l'Institut Henri Poincaré ; il n'existe aucun équivalent à ces institutions ailleurs en France. Certes, certains instituts de mécanique et de mathématiques appliquées sont créés dans des universités de province comme à Nancy ou à Lille<sup>2</sup>, mais rien n'est comparable à

---

1. Pour rappel, parmi les 242 doctorats présentés entre 1914 et 1945, 39 seulement (soit 16%) le sont dans des universités de province, et j'ai également comparé dans le chapitre précédent les résultats de l'analyse quantitative par sujet de l'ensemble du corpus et ceux de l'analyse restreinte aux doctorats parisiens.

2. Cf. GRELON 1989 et NABONNAND 2006. De plus, l'*Hommage à Albert Châtelet*, rendu au mathématicien à l'occasion de l'Inauguration du Centre Universitaire Albert Châtelet, le 6 juin 1963, mentionne à plusieurs reprises les efforts d'Albert Châtelet en tant que recteur et président du Conseil de l'université de Lille pour créer dans les facultés de Lille de nouveaux services adaptés aux besoins de la science et de l'industrie. Le mathématicien a ainsi contribué à l'installation de plusieurs instituts, tels l'Institut de Mécanique des Fluides avec une soufflerie modèle ou encore l'Institut de Mécanique appliquée, cf. MEMBRES DU COMITÉ D'ORGANISATION DE L'INAUGURATION DU CENTRE UNIVERSITAIRE ALBERT CHÂTELET 1963, p. 14. Dans MOUNIER-KUHN 1996, Pierre Mounier-Kuhn

la situation parisienne. L'équipement, les moyens scientifiques sont pour l'essentiel à Paris<sup>3</sup>. À part certains instituts de mathématiques appliquées et certains observatoires, les ressources sont faibles en province. Cette hypercentralisation parisienne<sup>4</sup> aurait pour principale conséquence le faible niveau scientifique des universités de province et de leurs étudiants comme le rapportent certains mathématiciens français de l'époque<sup>5</sup>.

Cependant, cette concentration de l'« équipement » scientifique à Paris<sup>6</sup> n'explique pas à lui seul le rôle majeur de l'université de la Sorbonne. Étudier à Paris et y soutenir sa thèse peut en effet faire partie d'une stratégie de carrière. Le jeu des relations créées à ces occasions favorise l'accession future à une chaire dans l'enseignement supérieur français<sup>7</sup>. Paris attire ainsi les meilleurs étudiants : c'est dans les institutions parisiennes que peuvent avoir lieu les rencontres avec les mathématiciens les plus influents, les membres ou correspondants de l'Académie des sciences. Elles ont également un rôle dans la diffusion des résultats obtenus dans la thèse au moyen de *Notes* présentées aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* par un membre de l'Académie. Si on consulte le *Jahrbuch* à la recherche des publications des doctorants de l'entre-deux-guerres, on remarque que c'est une pratique répandue parmi ces doctorants, et surtout les parisiens, d'avoir publié une ou plusieurs *Notes* aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* sur les principaux résultats de leur thèse avant leur soutenance<sup>8</sup>. Selon

---

parle également de la création en 1929-1930 d'instituts de mécanique des fluides, non seulement à Paris et à Lille, mais également à Marseille et Toulouse.

3. Cf. TELKÈS 1990, p. 460. Cette situation est également évoquée dans les mêmes termes par différents acteurs de l'époque, comme André Weil, WEIL 1991, p. 100 ou Laurent Schwartz, SCHWARTZ 1997, p. 155. Ce dernier rapportant des propos d'Henri Cartan décrit l'université de Toulouse comme un « désert scientifique ». Selon André Weil, les bibliothèques des universités provinciales ne bénéficient que de peu de moyens. Seule se distingue celle de Strasbourg. Cette bibliothèque, située dans le département de mathématiques, dans un local ample et facile d'accès pour les professeurs et les étudiants, est un héritage du temps de la domination allemande. Depuis 1918, elle a continué à être maintenue et développée et elle constitue, selon Weil, un « excellent instrument de travail ». Jacqueline Ferrand, dans l'entretien qu'elle m'a accordé, a également évoqué les conditions matérielles difficiles des facultés de province. Elle a notamment mentionné l'état des bibliothèques scientifiques qui, à la fin des années 1930, ne disposaient même pas des dernières publications des périodiques mathématiques.

Dans le premier chapitre de sa thèse, Liliane Beaulieu a déjà évoqué certains aspects particuliers de facultés des sciences françaises pendant l'entre-deux-guerres, celles où ont enseigné les premiers membres de Bourbaki, Clermont-Ferrand, Nancy et Strasbourg, cf. BEAULIEU 1990.

4. pour reprendre le terme de Siegmund-Schulze dans SIEGMUND-SCHULTZE 2001.

5. Siegmund-Schulze cite des propos de Trowbridge de 1925, ce dernier rapportant des dires de Picard.

6. Surtout dans les sciences mathématiques.

7. Cf. TELKÈS 1990, p. 460.

8. Dans la majorité des cas, ces notes paraissent l'année précédant la soutenance. Par exemple, Henri Milloux expose les principaux résultats de son doctorat, *Le Théorème de Picard. Suites de fonctions holomorphes. Fonctions méromorphes et fonctions entières*, 1924, dans deux Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, le 5 mars et le 28 mai 1923 (*Sur la croissance des fonctions entières d'ordre fini, et leurs valeurs exceptionnelles dans des angles* et *Sur les suites infinies de fonctions et les fonctions méromorphes à valeurs asymptotiques*).

Florin Vasilescu, lui-même doctorant pendant l'entre-deux-guerres à Paris<sup>9</sup>, l'usage habituel est ainsi que les meilleures thèses provinciales soient soutenues à la faculté des sciences de la Sorbonne<sup>10</sup>.

Il convient cependant d'apporter quelques nuances à ce tableau, selon lequel la recherche dans les facultés de province n'existerait pas. Il s'agit en outre de distinguer les différentes facultés de province où sont soutenus des doctorats d'État en sciences mathématiques.

	1914-1919	1920-1924	1925-1929	1930-1934	1935-1939	1940-1945	Total
Lyon	1	1	0	1	4	3	10
Strasbourg	0	3	1	2	1	1	8
Toulouse	0	0	1	2	1	1	5
Poitiers	0	0	0	3	3	0	6
Montpellier	0	0	0	1	3	3	7
Caen	0	0	0	1	0	0	1
Lille	0	0	0	0	1	0	1
Nancy	0	0	0	0	0	1	1
Province	1	4	2	10	13	9	39
Paris	17 94%	25 86%	42 91%	44 81%	41 75%	34 79%	203 84%

TABLE 3.1 – Nombre de thèses soutenues dans les facultés des sciences de province et à Paris entre 1914 et 1945

Si l'on compare tout d'abord les proportions des thèses soutenues en province dans l'entre-deux-guerres avec celles relatives à l'avant-première guerre mondiale<sup>11</sup>, plusieurs remarques peuvent être formulées. La part des doctorats présentés en province n'avait fait que diminuer pendant les quinze premières années du XX<sup>ème</sup> siècle (en passant passant successivement de 22%, à 14% puis à 10% pour chaque intervalle de cinq ans). Après la première guerre mondiale, il faut attendre les années 1930 pour que cette proportion réatteigne le niveau du début du siècle. En 1930-1934, la part des doctorats soutenus en province est ainsi de 19% et elle continue à croître entre 1935 et 1945 en représentant successivement 25 et 21% de l'ensemble des travaux. Après une

9. Ces propos sont rapportés lors de l'interview de Marcovitch, membre officiel de la fondation Rockefeller, le 14 septembre 1931, dans le RAC, IEB 1.3., box 61, f. 1028 ; cf. SIEGMUND-SCHULTZE 2001, p. 72.

10. Pour reprendre l'exemple d'Henri Milloux, ce dernier, pourtant étudiant à l'université de Lille, soutient cependant son mémoire à la Sorbonne, et ceci même si dans l'introduction de sa thèse, il remercie ses précédents professeurs. De même, Jean Mirguet en 1934 soutient une thèse à la Sorbonne alors qu'il a effectué l'essentiel de ses recherches à Poitiers en travaillant sur des thématiques de recherches, les notions originelles de la géométrie infinitésimale directe, communes à celles de Rabaté, docteur de l'université de Poitiers en 1931 et de Bouligand professeur à l'université de Poitiers. Jean Mirguet précise d'ailleurs dans l'introduction de son mémoire qu'il a échangé à de nombreuses reprises avec Bouligand pendant l'élaboration de son travail.

11. Cf. le premier chapitre et le tableau 1.2.

période de creux autour du premier conflit mondial, on observe donc un mouvement de réinvestissement de certaines universités de province par la recherche mathématique, qui se confirme à la fin de l'entre-deux-guerres.

Le réinvestissement et même l'investissement de la recherche en province ne concernent pas toutes les facultés de la même façon et cet investissement n'est pas constant au cours de l'entre-deux-guerres. Certains indices laissent penser que les scientifiques français, conscients des limites du modèle hiérarchique unipolaire, vont chercher pendant la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle à favoriser une vie scientifique de plus grande qualité en province en créant des pôles autres que Paris.

L'étude des doctorats soutenus en France permet de rendre compte des différents lieux de province où des efforts particuliers sont réalisés dans le cadre des sciences mathématiques. Elle révèle l'apparition de deux nouveaux centres mathématiques de province dans l'entre-deux-guerres, centres dans lesquels aucun doctorat n'a été soutenu entre 1900 et 1914 : Strasbourg dans les années 1920 après son occupation par les Allemands entre 1870 et 1914<sup>12</sup>, puis Poitiers dans les années 1930. Dans le même temps, les facultés de Lyon et de Montpellier continuent à attirer un nombre faible mais constant de doctorants. L'étude des thèses montre également que Strasbourg, Poitiers, Lyon et Montpellier sont des cas très différents correspondant à des projets et des réalités différentes.

### 3.1 Les années 1920 : Strasbourg, un écho de Paris

À la fin de la première guerre mondiale, l'université de Strasbourg, allemande pendant quarante-huit ans, redevient française. Pour les scientifiques français, elle est alors un emblème de la victoire de la France sur l'Allemagne et ils veulent en faire la seconde université de France<sup>13</sup>, une université d'excellence, « modèle de rayonnement international »<sup>14</sup>. Les premiers enseignants nommés à Strasbourg<sup>15</sup> aux chaires de mathématiques et de mécanique sont ainsi des mathématiciens prometteurs, triés sur le volet, tels que Fréchet, Villat, Esclangon ou Denjoy<sup>16</sup>.

---

12. Aucun doctorat ne pouvait donc y être soutenu.

13. Cf. un discours de Fréchet devant la Société franco-écossaise d'Edimbourg, rapporté par Siegmund-Schultze dans SIEGMUND-SCHULTZE 2005, p. 187.

14. Cf. SIEGMUND-SCHULTZE 2005, p. 185. Pour une description plus complète de l'université de Strasbourg dans l'après-guerre (les enjeux politiques et scientifiques de sa refondation, les objectifs annoncés, etc.), je renvoie également à l'article de Françoise Olivier-Utard, OLIVIER-UTARD 2005 et à l'article d'Havlova, Mazliak et Sisma, HAVLOVA ET AL. 2005, pp.7-10. Dans sa thèse, Liliane Beaulieu a également évoqué la situation particulière de Strasbourg pendant l'entre-deux-guerres, cf. BEAULIEU 1990, p. 120-121.

15. par des administrateurs siégeant à Paris! (cf. OLIVIER-UTARD 2005, p. 149.

16. Arnaud Denjoy occupe la chaire de mathématiques générales, Georges Valiron, celle de calcul différentiel et intégral (alors qu'il a soutenu sa thèse en 1914), Henri Villat, celle de Mécanique, Maurice Fréchet, celle d'Analyse supérieure, et Ernest Esclangon, celle d'astronomie.

Cette volonté est particulièrement mise en évidence par l'étude des premiers doctorats soutenus en province dans l'entre-deux-guerres. Sur les sept thèses présentées en province entre 1918 et 1930, quatre le sont à Strasbourg<sup>17</sup>. Ces quatre mémoires sont des travaux dont la qualité est relevée par les mathématiciens français et leurs auteurs se distinguent parmi le public des doctorants.

Deux premiers doctorats sont tout d'abord soutenus presque simultanément en juillet 1921. Il s'agit des travaux de Louis Antoine et de René Thiry. Les deux doctorants sont d'anciens élèves de l'École normale supérieure<sup>18</sup> et également des héros de la première guerre mondiale. Mobilisés dès le début du conflit<sup>19</sup> sur le front des combats, ils ont tous les deux été blessés de guerre et décorés. Une des blessures de Louis Antoine est particulièrement grave et fait de lui un symbole du patriotisme exacerbé d'après-guerre. Ancien combattant, aveugle de guerre, c'est en tant que chevalier de l'Ordre de la Légion d'Honneur, décoré de la Croix de guerre avec palme, qu'il soutient son doctorat.

Le travail de Louis Antoine est le fruit d'une rencontre avec Henri Lebesgue. À la suite de la blessure qui l'a rendu aveugle, Henri Lebesgue est l'un de ceux qui le convainc d'entreprendre une thèse<sup>20</sup>. Il lui propose alors des sujets de recherche. Ce fait est important à relever. En effet, il n'est pas habituel pour l'époque<sup>21</sup> qu'un professeur « donne » un sujet. Ainsi, Louis Antoine étudie pour son doctorat un sujet d'*Analysis situs* inspiré par Henri Lebesgue et qui se rapporte aux recherches de ce mathématicien. Il cherche à étendre l'homéomorphie entre deux figures à leurs voisinages ou à leurs espaces respectifs.

Lebesgue influence intellectuellement le travail. Il assiste également à la soutenance de la thèse, à Strasbourg, en tant que président du jury, alors qu'il n'est titulaire d'aucune chaire de cette faculté, ce qui est rare dans l'ensemble du corpus des thèses d'État. De plus, Lebesgue, alors nouvellement nommé professeur au Collège de France<sup>22</sup>, à Paris, ne participe de façon aussi impliquée à aucun autre doctorat pendant l'entre-deux-guerres. Il a certes été membre de six jurys entre 1914 et 1919, mais n'a écrit le rapport que d'un seul doctorat, celui de François Jager en 1916, *Sur les marées d'un bassin à parois verticales*, mémoire qui ne se réfère aucunement à des travaux de Lebesgue.

---

17. Deux des trois autres thèses sont soutenues à Lyon (en 1919 et en 1922) et la troisième à Toulouse, en 1927.

18. issus respectivement des promotions de 1909 et 1907. Les différentes informations bibliographiques indiquées ci-dessous proviennent pour Louis Antoine de MARTIN 1972 et LEFORT 2007, et pour René Thiry de CERF 1970.

19. respectivement le 2 et le 3 août 1914.

20. suivant le propre témoignage d'Antoine, cf. FÉLIX 1974, p. 19.

21. Cf. le témoignage même de Lebesgue dans FÉLIX 1974, p. 18. On peut également se référer au témoignage d'André Weil dans WEIL 1991, p. 51.

22. Il a été nommé en 1921.

En ce qui concerne la qualité du travail de Louis Antoine, ses recherches en *Analysis situs* sont considérées dès cette période comme remarquables, selon Yves Martin dans MARTIN 1972. Dans son doctorat, pour illustrer dans un espace de dimension trois le cas d'une homéomorphie entre deux figures qu'on ne peut étendre d'aucune manière, Louis Antoine crée l'exemple du « collier d'Antoine »<sup>23</sup>. Cet exemple est aussitôt repris par d'autres mathématiciens<sup>24</sup>, ce qui peut révéler la qualité du travail et également sa diffusion dans le milieu mathématique.

La thèse de Louis Antoine n'est donc pas seulement un travail réalisé par un grand blessé de guerre. Il s'agit également d'un travail qui se distingue par sa qualité et son importance dans la recherche en sciences mathématiques. À la suite de la soutenance de sa thèse en 1921, Louis Antoine reçoit ainsi en 1922 le Prix Francoeur de l'Institut de France<sup>25</sup>.

La soutenance d'un tel doctorat à Strasbourg permet également de présenter dans le cadre de cette nouvelle université française des recherches inspirées par les travaux d'Henri Lebesgue, l'un des mathématiciens influents, aux début des années 1920, dans le milieu de la recherche académique parisienne.

Un dernier fait particularise Louis Antoine parmi la population des doctorants : au moment de la soutenance, il occupe depuis deux ans la fonction de maître de conférences à la faculté des sciences de Strasbourg. Il a en effet obtenu cette charge en 1919<sup>26</sup>. Il est l'un des seuls doctorants entre 1914 et 1945 à occuper une telle position au moment de la soutenance, même si officiellement les statuts n'interdisent pas à un doctorant d'être à un tel poste avant l'obtention du grade de docteur<sup>27</sup>. René Thiry et Paul Flamant, les deux doctorants suivants à Strasbourg, sont également chargés de cours à l'université de Strasbourg au moment de leur soutenance<sup>28</sup> mais ils n'ont pas de postes de maîtres

23. ainsi nommé de nos jours, et qui est resté dans la postérité selon Jean Lefort dans LEFORT 2007.

24. tels Alexander en 1923, qui le simplifie pour créer un contre-exemple à la conjecture de Schoenflies sur les sphères en dimension supérieure ou égale à trois, cf. LEFORT 2007, p. 19. Par ailleurs, on peut remarquer que le choix du sujet, la géométrie, distingue également le mémoire parmi les autres thèses soutenues à l'époque en considérant le degré d'abstraction nécessaire que Louis Antoine, aveugle doit atteindre.

25. Cf. MARTIN 1972, p. 44. Signalons également que dans DE RHAM 1980, p. 23, de Rham évoque la thèse de Louis Antoine comme l'un des premiers ouvrages qu'il ait consulté à la bibliothèque de la Sorbonne pour s'initier à la théorie de l'Analysis situs en 1926 au commencement de ses recherches en vue d'écrire lui aussi un doctorat. Il la cite en même temps que les travaux de Poincaré, Brouwer et Lebesgue.

26. Cf. OLIVIER-UTARD 2005.

27. Le doctorat en sciences mathématiques est en effet seulement le grade nécessaire à obtenir pour pouvoir ensuite accéder au grade de professeur de l'enseignement supérieur. Pour reprendre la définition trouvée dans le glossaire de CROWFORD et OLFF-NATHAN 2005, p. 310, un maître de conférences est un « enseignant titulaire, de grade inférieur à celui de professeur ». Il est indiqué qu'il est « généralement docteur d'État », toutefois l'obtention de ce grade n'est pas obligatoire pour être nommé maître de conférence.

28. Cf. OLIVIER-UTARD 2005. René Thiry est notamment déjà affecté, au moment de sa soutenance, au Centre d'études de Strasbourg.

de conférence. On peut signaler d'autres cas de doctorants qui sont chargés de cours avant leur soutenance. Gaston Rabaté, par exemple, soutient un doctorat à Toulouse en 1931 alors qu'il est chargé de conférences de mathématiques générales à la faculté des sciences de Poitiers. Cependant ces cas restent exceptionnels parmi les doctorants de l'entre-deux-guerres, aucun n'est à signaler parmi les doctorants parisiens.

Le doctorat de René Thiry est aussi symbolique de la volonté de faire de Strasbourg une nouvelle université française d'excellence et un emblème de la victoire sur les Allemands. René Thiry est normalien. Ancien blessé de la guerre, il est fait prisonnier devant Verdun en 1916. À sa libération, en janvier 1919 seulement, il est alors directement nommé à Strasbourg<sup>29</sup>. Selon les propos d'Henri Villat, rapportés par Georges Cerf dans CERF 1970, René Thiry est « orienté vers la mécanique des fluides ». D'après l'introduction de la thèse de René Thiry, c'est Villat, nouvellement nommé à l'université de Strasbourg, qui fournit au doctorant la première idée de son mémoire de doctorat<sup>30</sup>. Comme le doctorat de Louis Antoine, celui de René Thiry est jugé « remarquable » et lui vaut d'assurer en 1922 le cours Peccot au Collège de France. René Thiry y approfondit des résultats obtenus par Henri Villat en 1914 sur les singularités et les indéterminations trouvées parmi les solutions au problème du mouvement permanent discontinu, uniforme à l'infini, d'un fluide parfait incompressible en présence d'un obstacle.

On perçoit donc à travers ces deux premières thèses présentées dans l'immédiate après-guerre deux symboles d'une excellence mathématique française : les recherches sont jugées de qualité et les auteurs, en plus d'être des étudiants normaliens, ont été des participants au conflit, où ils ont été blessés ou fait prisonnier. La troisième thèse qui est soutenue à Strasbourg en 1924 a des caractéristiques similaires. Elle est également l'oeuvre d'un normalien, Paul Flamant, qui a vécu la guerre en tant que prisonnier pendant l'essentiel du conflit. En 1919, après avoir repris ses études, Paul Flamant est admis au certificat d'analyse supérieure, où selon Louis Sartre il se fait remarquer par Émile Picard qui le « félicite de façon remarquable »<sup>31</sup>. Reçu ensuite premier à l'agrégation de mathématiques, il est nommé agrégé-préparateur à l'École normale supérieure puis chargé de cours à la faculté des sciences de Strasbourg en 1921-1922 avant d'y soutenir une thèse. Il s'agit donc, ici aussi, d'un étudiant qui se distingue par la qualité de son parcours universitaire ainsi que par son expérience de la première guerre mondiale.

En outre, dans l'introduction de sa thèse, Paul Flamant évoque Émile Borel, l'un des « patrons »<sup>32</sup> des mathématiques françaises de l'époque qui l'« a incité à entre-

29. Il est affecté dès mars 1919 au Centre d'études de Strasbourg, comme mentionné ci-dessus.

30. Cf. l'introduction de la thèse de René Thiry, *Sur les solutions multiples des problèmes d'Hydrodynamique relatifs aux mouvements glissants*, 1921, p.5.

31. Cf. SARTRE 1948, p. 48.

32. Cf. LELOUP et GISPERT prévu pour 2009.



prendre un travail de recherche »<sup>33</sup>. Il cite également Georges Valiron, alors chargé de cours à Strasbourg, qui « a bien voulu suivre la présente étude avec le plus bienveillant intérêt »<sup>34</sup>, mais il semble s'agir seulement d'un remerciement pour la participation de ce dernier au jury de la thèse. En effet Paul Flamant étudie, dans le cadre de son doctorat, une équation différentielle fonctionnelle linéaire particulière<sup>35</sup> et il ne se réfère aucunement à des travaux de Valiron. Comme Lebesgue pour la thèse de Louis Antoine, Émile Borel, alors qu'il n'est pas professeur à Strasbourg mais professeur à la Sorbonne, préside le jury de la thèse de Paul Flamant.

Le quatrième doctorat à être soutenu à l'université de Strasbourg entre 1918 et 1930 est l'oeuvre d'un étudiant américain, Ben-Zion Linfield. En 1925, au moment de sa soutenance, ce dernier est déjà docteur de *Philosophy in Mathematics* de l'université d'Harvard où il a été dirigé par George Birkhoff<sup>36</sup> et il est également titulaire d'un poste de maître de conférences à l'université de Virginie<sup>37</sup>. Il présente dans son doctorat français une partie de la thèse qu'il a déjà soutenue à Harvard sur les espaces dicrets paramétriques et non paramétriques<sup>38</sup>. Selon Taylor<sup>39</sup>, lors de son arrivée en France, Linfield s'est tout d'abord adressé à Henri Lebesgue qui, après discussion avec Borel, l'a dirigé vers Maurice Fréchet. Ce dernier est alors considéré par les deux mathématiciens comme l'un des seuls spécialistes de l'époque sur la théorie des espaces abstraits à pouvoir juger du travail de Linfield, à pouvoir interpréter sa part axiomatique et à pouvoir lui donner quelques conseils en vue de l'élaboration d'une thèse française. Selon l'extrait de la lettre citée par Taylor dans TAYLOR 1985, p. 291, c'est en outre Maurice Fréchet qui est chargé de décider si la thèse se fera à Paris ou à Strasbourg. La soutenance se faisant à Strasbourg, on peut y voir la volonté de Fréchet de favoriser la venue d'étudiants étrangers à Strasbourg pour en faire une université de renommée internationale, tel qu'il l'a déjà affirmé en 1919-1920<sup>40</sup>. Promouvoir des liens internationaux semble avoir été un critère déterminant pour décider Fréchet à faire soutenir Linfield à Strasbourg. Ce critère apparaît complémentaire de l'excellence exigée pour les doctorats précédemment soutenus dans cette faculté. En effet, selon les propos de

---

33. Cf. FLAMANT 1924, p. 6.

34. Cf. FLAMANT 1924, p. 6.

35.  $f'(x) = a(x)f(\frac{x}{\sigma}) + b(x)$  où  $x$  est un complexe et  $a$  et  $b$  deux fonctions quelconques dans le plus général des cas.

36. Son Ph.D., *On the Theory of discrete varieties* a été soutenu en 1923, cf. TAYLOR 1985. Comme je l'ai déjà mentionné, la notion de direction de thèse est une notion très vague en France à l'époque. Je n'ai cependant pas pu savoir ce qu'il en ait dans le même temps aux États-Unis.

37. Ces indications figurent sur le manuscrit même de la thèse.

38. Il s'emploie dans sa thèse à les définir et à les étudier tout en redéfinissant certaines relations entre les ensembles.

39. Cf. TAYLOR 1985, p. 291.

40. Cf. SIEGMUND-SCHULTZE 2005, p. 187-188.

Lebesgue rapportés par Taylor, Lebesgue et Fréchet ne considèrent pas les recherches de Linfield comme « extraordinaires » et les juge seulement « acceptables »<sup>41</sup>.

Les quatre premiers doctorats soutenus après-guerre à Strasbourg apparaissent comme la marque de la volonté des mathématiciens français de faire de cette nouvelle université un lieu d'excellence de la recherche mathématique, capable de rivaliser avec les universités allemandes. Il n'est ainsi pas anodin que d'une part les trois doctorants soient des anciens combattants, prisonniers et blessés pendant le conflit et que d'autre part deux d'entre eux aient comme président de leur jury de thèse un professeur d'une institution parisienne. En outre, les sujets de ces trois premiers doctorats appartiennent à trois domaines différents des mathématiques, qui d'après l'analyse quantitative menée au précédent chapitre sont les plus abordés par les doctorants français de l'entre-deux-guerres : la géométrie (plus précisément l'Analysis situs), les mathématiques appliquées (plus précisément la mécanique des fluides<sup>42</sup>), ainsi que l'analyse, domaine traditionnel des mathématiques françaises. Le dernier doctorat soutenu à Strasbourg répond à la vocation internationale que les scientifiques français accordent à Strasbourg. Il est ainsi écrit par un étudiant américain.

La nouvelle université de Strasbourg apparaît ainsi dans la première partie de l'entre-deux-guerres comme le second pôle de la recherche, un écho de Paris, créé artificiellement par le milieu mathématique français avec une volonté politique qui s'inscrit dans le contexte de l'après première guerre mondiale<sup>43</sup>. Pendant tout l'entre-deux-guerres, aucun autre étudiant normalien ne présente son doctorat dans une faculté de province. Soutenir sa thèse à Strasbourg au début des années 1920 ne semble donc pas résulter du seul désir de Louis Antoine, René Thiry et Paul Flamant et porte la marque d'une volonté politique des scientifiques français. Le fait que Louis Antoine, dès 1922, quitte la faculté de Strasbourg renforce l'idée que le choix du lieu de soutenance n'est pas le sien mais provient d'une autorité supérieure. Certaines contreparties ont sans doute été promises en échange : contreparties de salaires ou contreparties de carrière. Françoise Olivier-Utard, dans OLIVIER-UTARD 2005, p. 142, évoque ainsi l'attrait financier que pouvait représenter dans l'immédiate après-guerre une carrière à Strasbourg. Une compensation salariale était promise aux Français de l'intérieur qui occupaient un poste à Strasbourg et elle mettait les salaires au même niveau que ceux que recevaient les membres de l'université parisienne. En outre, on peut remarquer

41. Cf. TAYLOR 1985, p. 291. Dans un contexte d'après-guerre où l'essentiel des étrangers qui viennent présenter une thèse en France ont pour origine les pays de l'Europe de l'Est et soutiennent à la Sorbonne, le choix de Fréchet de faire soutenir Liefield à Strasbourg apparaît d'autant plus révélateur de la vocation internationale qu'il entend donner à la faculté. Le fait que peu d'autres étudiants anglo-saxons ou américains viennent étudier à Strasbourg, d'après OLIVIER-UTARD 2005, p. 166, rend encore plus symbolique la soutenance de Liefield dans cette université particulière.

42. Selon René Thiry dans l'introduction de son mémoire en 1921, la mécanique des fluides a fait l'objet de travaux récents de mathématiciens français tels Léon Brillouin et Henri Villat.

43. Sur ce sujet, on peut également consulter OLIVIER-UTARD 2005, p. 154.

parmi les doctorants de province la faible proportion de ceux qui ont ensuite eu une carrière dans l'enseignement supérieur. Si on ne compte pas dans ce recensement les futurs astronomes, on ne peut ajouter à Louis Antoine, René Thiry et Paul Flamant que Charles-Antoine Galissot<sup>44</sup> et Marie Charpentier<sup>45</sup>.

Pendant toute la première partie de l'entre-deux-guerres et surtout pendant la première moitié des années 1920, la faculté des sciences de Strasbourg domine l'ensemble des autres facultés de sciences mathématiques de province du point de vue de la recherche mathématique. Mais la situation ne dure pas au-delà de la fin de cette décennie. Pendant les années 1930, l'université Strasbourg perd son statut de second pôle de la recherche mathématique française dans un contexte de crise économique et de difficultés financières<sup>46</sup>. Elle passe alors au second plan des universités de province<sup>47</sup>. La diminution de la proportion des thèses qui y sont soutenues en est un signe. Entre 1930 et 1945, sur les trente-deux doctorats soutenus en province, seulement quatre le sont à Strasbourg et, mis à part Laurent Schwartz en 1943, les trois autres étudiants sont de réputation bien moins grande qu'Antoine, Thiry et Flamant.

Des propos de Fréchet datant de 1928, rapportés par Siegmund-Schultze dans SIEGMUND-SCHULTZE 2005, p. 193, indiquent d'ailleurs que les scientifiques français sont, dès cette période, conscients des limites de Strasbourg comme nouveau pôle mathématique susceptible de faire écho à la faculté des sciences de la Sorbonne.

« Malheureusement, il est apparu peu à peu que la situation à Strasbourg n'était pas aussi favorable que je l'avais cru tout d'abord au développement de cet Institut. »

Denjoy, puis Fréchet, Villat et Esclangon sont depuis la fin des années 1920 titulaires d'une chaire à la faculté des sciences de la Sorbonne et ont été remplacés dans leur chaire par Georges Valiron, Georges Cerf, René Thiry et Paul Flamant, qui même s'ils ont produit des travaux brillants n'ont pas encore la même influence sur le milieu mathématique français, ni la même réputation que leurs prédécesseurs. Les thématiques abordées dans les trois doctorats des années 1930 ont également évolué. Il s'agit de sujets d'arithmétique, d'astronomie et d'analyse appliquée, qui ne sont pas retravaillés dans d'autres doctorats de l'époque et qui ne représentent pas les principaux domaines des sciences mathématiques françaises de l'époque<sup>48</sup>.

44. qui soutient une thèse à Lyon en 1922 et qui sera ensuite nommé à l'université de Lille.

45. qui soutient une thèse à l'université de Poitiers en 1931 et qui bénéficiera d'abord d'un poste attribué au début du CNRS puis sera nommée à l'université de Rennes.

46. Cf. OLIVIER-UTARD 2005, pp.168-169 et p.171.

47. Selon OLIVIER-UTARD 2005 et SIEGMUND-SCHULTZE 2005, l'université continue cependant à former de nombreux ingénieurs et étudiants, mais ces derniers ne continuent plus dans la recherche mathématique.

48. Marcel Courrier, en 1931, dans sa thèse, *Solutions entières des équations du genre 0*, cherche à trouver toutes les solutions entières d'une équation homogène,  $F(X, Y, Z) = 0$ , de degré  $n$ , de genre  $O$

On peut remarquer qu'on ne perçoit pas encore pendant l'entre-deux-guerres l'influence des premiers doctorants parisiens des années 1920 nommés par la suite maîtres de conférences ou professeurs à Strasbourg et qui sont devenus membres du groupe Bourbaki, tels Henri Cartan nommé dès 1931 à la faculté des sciences de Strasbourg puis Jean Dieudonné, André Weil, et Charles Ehresmann. Il faut en fait attendre la seconde guerre mondiale pour que des soutenances de doctorats d'État témoignent d'un renouveau de l'activité de la recherche mathématique à la faculté de Strasbourg, qui ne soit pas artificiellement le fait d'une volonté de mathématiciens parisiens. Ils portent alors la marque d'une influence des membres de Bourbaki<sup>49</sup>. La thèse de Laurent Schwartz soutenue en 1943 en est un exemple. En conclusion à l'introduction de sa thèse, *Étude des sommes d'exponentielles réelles*<sup>50</sup>, il remercie ainsi explicitement « N. Bourbaki dont la forte personnalité a influencé grandement [ses] recherches récentes »<sup>51</sup>. Un second doctorat aurait également dû être soutenu pendant le conflit à la faculté des sciences de Strasbourg<sup>52</sup> : celui de Feldbau, qui travaillait auprès de Charles Ehresmann sur les espaces fibrés<sup>53</sup>. Mais Feldbau est pris dans une rafle dans le courant de 1943 et meurt en camp de concentration<sup>54</sup>.

## 3.2 Les années 1930 : Poitiers

Au début des années 1930, les mathématiciens français cherchent à développer d'autres pôles mathématiques en province et à décentraliser davantage la recherche mathématique. C'est tout au moins ainsi que Birkhoff le ressent d'après Reinhard

---

à coefficients entiers en utilisant une représentation entière qu'admet cette courbe. Grouyitch, en 1933, originaire de Yougoslavie, travaille sur un sujet d'astronomie à partir de données sur la Lune, recueillies dans l'observatoire de Strasbourg (dans *Réduction et discussion des occultations d'Étoiles par la Lune observées à Strasbourg de 1925 à 1932*). Pierre Bergeot, en 1937, s'intéresse à l'intégration approchée suivant la méthode des « moindres carrés » et « des moments » de certaines équations différentielles ou intégrales couramment utilisées en physique mathématique.

49. Le groupe étant constitué depuis leur congrès fondateur de Besse en Chandesse en juillet 1935, cf. BEAULIEU 1990.

50. Il y étudie des questions concernant l'approximation de fonctions continues sur  $[0; +\infty]$  par des polynômes de Dirichlet de la forme  $P(X) = \sum a_n e^{-2\pi\lambda_n X}$  dans le cas où la série  $\sum_{n>0} \frac{1}{\lambda_n}$  converge. Il y regarde également des questions d'extrémalités de coefficients de polynômes de Dirichlet bornés sur  $[0; +\infty]$ . Laurent Schwartz résume lui-même dans sa biographie, SCHWARTZ 1997, p. 175, l'essentiel de son travail en ces termes : « une application pertinente de l'analyse fonctionnelle et des espaces vectoriels topologiques pour un problème classique d'analyse. »

51. Cf. SCHWARTZ 1943, p. 6. On peut également se référer à la biographie de Laurent Schwartz où le mathématicien évoque, p.174, l'« élan » que suscita Bourbaki dans son travail.

52. en fait à l'université de Clermont-Ferrand où elle est transférée pendant le conflit suite à l'invasion allemande.

53. Cf. AUDIN 2007, pp.12-16. Laurent Schwartz évoque également le cas d'un étudiant polonais, Alexandre Gorny qui étudie à cette époque à l'université de Clermont-Strasbourg et qui sera déporté. Ce dernier a en fait déjà soutenu une thèse à la Sorbonne en 1939-1940, *Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle*.

54. Cf. COUTY ET AL. 1995, SCHWARTZ 1997, WEIL 1991, p. 117, AUDIN 2007, p. 34.

Siegmund-Schultze<sup>55</sup> : « In 1931, the impending retirement of Goursat in Paris was a stimulus for discussions among French mathematicians on the future of provincial universities. French mathematicians, allegedly, “believed in decentralisation” and in the need to develop a “French Göttingen” ».

### 3.2.1 Poitiers : le Göttingen français ?

L’augmentation importante de la part des thèses soutenues en province et la multiplication des facultés où elles sont présentées pourraient être interprétées comme un signe de cette volonté de décentralisation que rapporte Birkhoff. Pendant les années 1930, Poitiers se distinguerait de l’ensemble des autres facultés de province et occuperait une position particulière, d’après les propos de Florin Vasilescu<sup>56</sup> :

« Vasilescu expressed doubt for it appears that many mathematicians believe in ‘decentralisation’ and would like to see Poitiers become a French ‘Göttingen’. »

Il semblerait donc que le souhait de certains mathématiciens français soit alors de faire de Poitiers un « Göttingen » français dans un essai de décentralisation de la recherche française inspirée par la structure des institutions académiques allemandes.

Aucune thèse de sciences mathématiques n’a été soutenue à Poitiers depuis le début du XX<sup>ème</sup> siècle avant 1930. Entre 1930 et 1939<sup>57</sup>, six les sont sur les vingt-trois doctorats présentés en province<sup>58</sup>. L’investissement qui est alors fait pour l’université de Poitiers par le milieu académique française et les professeurs d’institutions parisiennes dans les années 1930 peut se comparer à celui réalisé dix ans auparavant pour la faculté de Strasbourg.

Cet investissement se perçoit tout d’abord à l’étude des membres des jurys des thèses présentées à Poitiers. Parmi les jurys des trois premiers doctorats figurent ainsi des professeurs de la faculté des sciences de la Sorbonne. Le jury du premier doctorat, en 1931, est ainsi présidé par Paul Montel, alors titulaire de la chaire de mécanique rationnelle de Paris et l’un des « patrons » des mathématiques françaises<sup>59</sup>. René Garnier, alors maître de conférences à la faculté des sciences de Paris (en 1931) y participe comme examinateur<sup>60</sup>. Ce dernier préside ensuite le jury des deux doctorats suivants

55. Cf. SIEGMUND-SCHULTZE 2001, p. 72.

56. rapportés lors de l’interview de Markovich en septembre 1931, cf. SIEGMUND-SCHULTZE 2001, p. 72, lorsque Markovitch interroge ce dernier au sujet du remplacement d’Édouard Goursat, retraité de sa chaire d’analyse de la Sorbonne, par Georges Bouligand.

57. Poitiers étant en zone occupée pendant la seconde guerre mondiale, je n’inclus pas cette dernière période dans l’intervalle de temps où je compare Poitiers à d’autres universités de province, comme Lyon, qui est en zone libre.

58. Dans le même temps, 5 le seront à Lyon et quatre à Montpellier.

59. Dans le sens défini dans LELOUP et GISPERT prévu pour 2009.

60. Cf. CHARLE et TELKES 1989. Signalons d’ailleurs que de 1920 à 1927, René Garnier était professeur de calcul différentiel et intégral à la faculté des sciences de Poitiers, ce qui pourrait en

en 1933 et 1934, alors qu'il est devenu professeur sans chaire (depuis 1932) à la Sorbonne. Les autres membres de ces deux jurys sont des professeurs ou chargés de cours de la faculté de Poitiers : Georges Bouligand, Théophile Got et Henri Poncin<sup>61</sup>. Ce fait est d'autant plus significatif qu'hormis Henri Lebesgue et Émile Borel qui ont respectivement présidé les jurys des thèses de Louis Antoine en 1921 et de Paul Flamant en 1924 à Strasbourg, aucun autre professeur ou maître de conférence d'une institution parisienne ne participe au jury d'un doctorat soutenu dans une faculté de province.

En outre, les premiers doctorats soutenus à Poitiers dans les années 1930 répondent à la même exigence de qualité que ceux présentés à Strasbourg au début des années 1920. C'est au moins le cas, de façon certaine, pour le premier d'entre eux, celui de Marie Charpentier<sup>62</sup>. Markovitch, un membre officiel de l'International Education Board, évoque, lors de son entretien avec Florin Vasilescu en 1931<sup>63</sup>, la thèse de Marie Charpentier en des termes élogieux la qualifiant d'une des meilleures thèses de province. Il affirme que la soutenance de cette dernière à Poitiers découle alors de la volonté des scientifiques français de décentraliser la recherche mathématique en province, alors qu'il est d'usage de faire soutenir les travaux de qualité à Paris<sup>64</sup>. On peut d'ailleurs s'interroger sur le fait que Marie Charpentier soit une femme et, qui plus est, la première femme à soutenir une thèse en analyse, domaine à la pointe de la recherche en France<sup>65</sup>. Quelle en est la portée et dans quelle mesure les mathématiciens français ont-ils voulu en faire un symbole<sup>66</sup> ? Dans sa thèse, Marie Charpentier considère les

---

partie justifier de sa présence dans certains des jurys, le mathématicien ayant contribué à la formation scientifique des doctorants.

61. Les trois derniers doctorats soutenus à Poitiers en 1936, 1937 et 1938 ont le même jury, composé de Bouligand en tant que président, Got et Poncin en tant qu'examinateurs.

62. C'est en fait le seul des doctorats de Poitiers sur lequel j'ai pu trouver un jugement ou des informations autres que ceux fournis par les introductions des mémoires.

63. Cf. SIEGMUND-SCHULTZE 2001, p. 72.

64. La citation originale dans l'ouvrage SIEGMUND-SCHULTZE 2001, p. 72, est la suite du passage cité précédemment :

Vasilescu expressed doubt for it appears that many mathematicians believe in 'decentralisation' and would like to see Poitiers become a French 'Göttingen'. With this end of view, the thesis of M<sup>lle</sup> Charpentier was passed in Poitiers instead of Paris (this is quite a departure from the usual system of presenting the best provincial theses in the capital) and Professor Montel went for this purpose specially to Poitiers to preside the jury there. Here I remarked that it would probably take several decades before Poitiers groups a number of eminent mathematicians, that for the present there seemed to be only Bouligand, surrounded, it is true by a number of promising pupils and assistants.

65. Avant elle, seule une autre femme, Edmée Chandon, astronome adjoint de l'Observatoire de Paris depuis 1912 a soutenu une thèse d'État en sciences mathématiques, en mars 1930, *Recherches sur les marées de la mer rouge et du golfe de Suez*. Il s'agit d'une thèse d'astronomie/géodésie, domaine à la marge du milieu mathématique académique traditionnel.

66. Je n'ai cependant pas pu trouver trace de textes faisant écho de réactions suscitées par cette soutenance. Mentionnons seulement que Marie Charpentier a obtenu à la suite de sa thèse une bourse de la fondation Rockefeller pour aller étudier pendant un an aux États-Unis à l'université d'Harvard, auprès de Birkhoff, alors qu'aucun avenir immédiat de carrière dans la recherche en France ne lui était ouvert. En fait, il faut attendre la fin des années 1930 et la création du CNRS pour que Marie

points de Peano pour une équation différentielle linéaire du premier ordre<sup>67</sup>. Elle étudie la relation de dépendance qui existe entre ces points et le faisceau des solutions correspondantes. Elle utilise pour cela une approche qu'elle dit identique à celle de Paul Montel. En employant des notions et des outils mathématiques d'analyse fonctionnelle, de théorie des ensembles et de la théorie des fonctions discontinues de Baire, elle cherche à déterminer de façon précise l'ensemble des points de Peano de l'équation<sup>68</sup>. Selon Marie Charpentier, ces recherches ont été initiées par les travaux de Paul Montel. Ce dernier est d'ailleurs le premier mathématicien qu'elle remercie en conclusion de son introduction<sup>69</sup>.

Les cinq autres doctorats soutenus à Poitiers entre 1930 et 1939 semblent également répondre à l'exigence de qualité, même si je n'ai pu lire aucun jugement formulé par des mathématiciens de l'époque à leur sujet<sup>70</sup>. Tout d'abord, les cinq mémoires sont classés dans les domaines de l'analyse (3), de la théorie des ensembles (1) et de la géométrie (1)<sup>71</sup>, des domaines des mathématiques pures. Aucun d'entre eux n'aborde de sujets en mathématiques appliquées comme c'est le cas au même moment dans les autres facultés de province. De plus, certains résultats établis par Lucien Chamard dans le cadre de sa thèse sont présentés comme *Notes* devant l'Académie des Sciences de Paris par Élie Cartan et ils sont également présentés par Levi-Civita devant l'Académie dei Lincei<sup>72</sup>. Il en est de même pour tous ces autres doctorats : certains de leurs résultats sont publiés dans des journaux mathématiques et devant des sociétés savantes. Par exemple, certains résultats de Chow ont fait l'objet de communications dans le *Bulletin*

---

Charpentier, redevenue professeur de lycée dans l'intervalle, puisse bénéficier d'un financement pour faire de la recherche avant d'être nommée en 1943 à la faculté des sciences de Rennes. Cf. SIEGMUND-SCHULTZE 2001, p. 66, pp.124-125 et TATA INSTITUTE OF FUNDAMENTAL RESEARCH 1966.

67. c'est à dire les points  $P$  par lesquels passent une infinité de solutions de l'équation différentielle.

68. Cf. l'introduction de sa thèse, CHARPENTIER 1931, p. 4.

69. Cf. CHARPENTIER 1931, p. 5.

70. Les rapports sur ces thèses ne sont pas disponibles et je n'ai pas trouvé de sources secondaires les commentant. Plus généralement, je n'ai pu obtenir que peu de renseignements sur leurs auteurs. Parmi eux, on relève cependant la présence d'un doctorant chinois, Shao-Lien Chow, qui a bénéficié d'une bourse de recherche de la *China Foundation for the Promotion of Education and Culture*. De plus, le dernier d'entre eux, André Fouillade bénéficie également d'une bourse de la Caisse Nationale des Sciences, attribué par le Conseil de la Section de Mathématiques, cf. FOUILLADE 1937, p. 6. L'obtention de bourses témoigne ainsi d'une certaine qualité des doctorants de la faculté des sciences de Poitiers.

71. Selon la méthode de classement que j'ai exposé dans le deuxième chapitre de la présente thèse.

72. Cf. CHAMARD 1933, p. 11. Lucien Chamard publie en effet plusieurs notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* et aux *Rendiconti / Accademia Nazionale dei Lincei* de Rome avant la soutenance de sa thèse :

- « Sur certains points singuliers des ensembles isodistants d'un ensemble ponctuel », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 195, p.930-932. (1932)
- « Sur les points  $(\alpha)$ , au sens de M. Georges Durand », *Rendiconti / Accademia Nazionale dei Lincei*, Rome, (6) 16, p. 396-400. (1932)
- « Sur le paratingent d'un ensemble isodistant d'un ensemble ponctuel », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 196, p. 1352-1353. (1933).

des sciences mathématiques, dans le *Bulletin de la Société royale des sciences de Liège* et dans les *Comptes rendus du soixante-septième Congrès des Sociétés savantes*<sup>73</sup>.

Cette pratique de publications antérieures à la soutenance de la thèse est courante pour les doctorats présentés à Paris mais rare parmi l'ensemble des mémoires présentés en province. Elle apparaît alors comme un signe de la qualité des mémoires soutenus à Poitiers. On peut en voir un autre dans les relations entre les travaux des doctorants et ceux de certains mathématiciens français et étrangers. En outre, Fouillade et Pasqualini signalent dès leur avant-propos que leurs recherches ont retenu l'attention de savants français et étrangers dont Otto Haupt, professeur à l'université d'Erlangen pour Pasqualini<sup>74</sup>, Kolmogorov, de La Vallée Poussin et Fréchet pour Fouillade<sup>75</sup>.

### 3.2.2 Georges Bouligand à Poitiers

Rechercher les mathématiciens cités par les doctorants de Poitiers fait émerger un nom en particulier : celui de Georges Bouligand, commun à l'ensemble des mémoires. Il apparaît parmi les mathématiciens remerciés et également parmi les mathématiciens auxquels se réfèrent les étudiants pour leurs recherches.

Georges Bouligand est professeur à la faculté de Poitiers dans les années 1930. D'après Markovitch dont les propos sont rapportés par Reinhard Siegmund-Schultze

---

73. Cf. CHOW 1936, p. 7. Le *Jahrbuch* recense les publications suivantes de Shao-Lien Chow :

- « Sur certaines critères de divers ensembles discontinus dans l'espace euclidien à trois dimensions », *Bulletin des sciences mathématiques*, (2) 59, p. 263-273. (1935).
- « Sur certains ensembles plans punctiformes », *Bulletin de la Société des sciences de Liège*, 4, 57-61. (1935).
- « Sur certains ensembles finis », *Bulletin des sciences de l'École polytechnique de Timișoara*, 5, p. 150-151. (1934)
- « Sur le paratingent de certains ensembles ponctuels plans », *Comptes rendus du Congrès des Sociétés savantes*, Paris, p.31-34. (1934).

Il en est de même pour Pasqualini, cf. PASQUALINI 1938, p. 2 :

- « Sur les conditions de convexité d'une variété  $V_{p-1}$  à  $p-1$  dimensions plongée dans l'espace euclidien  $R_p$  à  $p$  dimensions », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, Paris, 204, p. 222-224. (1937).
- « Convexité d'une rondelle de surface  $z = f(x, y)$  projetée sur le plan  $xOy$  suivant une figure convexe  $K$  et dont le  $\text{ptg}_2$  (paratingent second) est vide, sauf un ensemble punctiforme », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, Paris, 204, p. 646-648. (1937).
- « Sur les conditions de convexité d'une variété  $V_{p-1}$  à  $p-1$  dimensions plongée dans l'espace euclidien  $R_p$  à  $p$  dimensions », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, Paris, 204, p. 1153-1155. (1937).
- « Sur les conditions de convexité d'une courbe plane ou d'une surface », *Bulletin de la Classe des sciences de l'Académie Royale de Belgique*, (5) 22, p.1050-1058. (1936).

Capoulade et Fouillade ont également déjà publié des mémoires et fait publier de nombreuses notes avant de soutenir. Ils le signalent dans leurs introductions en citant leur propre recherche. Le *Jahrbuch* recense ainsi six publications de Capoulade publiées avant sa thèse entre 1931 et 1934 et sept d'André Fouillade publiées entre 1931 et 1937 avant sa soutenance. Pour les deux doctorants figurent notamment des notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* et des publications aux *Rendiconti / Accademia Nazionale dei Lincei* (en 1932 pour Capoulade et en 1931-1933-1934-1935 pour Fouillade).

74. Cf. PASQUALINI 1938, p. 3.

75. Cf. FOUILLADE 1937, pp. 5 et 12.



dans SIEGMUND-SCHULTZE 2001, p. 72, Bouligand a un temps été évoqué comme possible remplaçant de Goursat à la faculté de Paris en 1931 à la retraite de ce dernier. Cependant, il aurait finalement été décidé de le maintenir à Poitiers afin de créer un nouveau pôle de recherche mathématique en province autour de sa personnalité et d'y faire émerger une recherche de qualité.

D'après la notice nécrologique qu'écrit Henri Poncin pour l'Association Amicale des anciens élèves de l'E.N.S.<sup>76</sup>, Georges Bouligand est un animateur de la vie mathématique de la faculté des sciences de Poitiers pendant le temps où il y est professeur. Il organise non seulement des séances de travail avec exposés et discussions sur certaines questions de géométrie, mais également des « enseignements de haut niveau » et surtout « un séminaire de recherche qui attir[e] à Poitiers de nombreux savants français, et aussi des étrangers renommés (Birkhoff, Kellog, Perkins, Wiener, etc.) »<sup>77</sup>.

Les introductions des doctorats soutenus à Poitiers parlent du rôle qu'a joué Georges Bouligand dans leur formation scientifique à la faculté des sciences. Marie Charpentier adresse ainsi sa reconnaissance au mathématicien pour la formation préalable qu'elle y a suivie<sup>78</sup>. Les avant-propos mettent également en évidence le rôle du mathématicien dans l'élaboration des mémoires. J'ai déjà évoqué combien la notion de direction de thèse est vague et indéfinie pendant l'entre-deux-guerres. On peut donc s'interroger sur la signification des propos d'Henri Poncin dans sa notice nécrologique de Bouligand. Il signale que ce dernier a « dirigé personnellement »<sup>79</sup> un certain nombre de chercheurs pour leur mémoire de doctorat.

Les propos que tiennent les cinq autres doctorants de Poitiers dans les introductions de leur mémoire montrent que ce dernier a « orienté » leur recherche<sup>80</sup>. Les remerciements que les doctorants adressent au mathématicien ne correspondent pas uniquement aux remerciements formels et attendus que l'on retrouve dans la majorité des autres doctorats d'État soutenus en France entre 1914 et 1945. Ils s'en distinguent par leur importance et mettent en valeur la relation particulière qu'ils entretiennent avec Georges Bouligand<sup>81</sup>.

---

76. Cf. PONCIN 1981.

77. Cf. PONCIN 1981, p. 35. On peut sans doute y voir l'explication des relations de certaines doctorants de Poitiers avec des mathématiciens étrangers.

78. Cf. CHARPENTIER 1931, p. 5 : « j'adresse à M. Bouligand l'expression de ma profonde reconnaissance pour la formation que je lui dois. »

79. Cf. PONCIN 1981, p. 36.

80. Cf. notamment CAPOULADE 1934, p. 3.

81. Il n'est en effet pas d'usage que des liens soient si clairement énoncés entre mathématiciens et doctorants. Ce n'est en général jamais le cas pour les thèses soutenues à la faculté des sciences de Paris. Je caractériserai plus précisément la fonction des remerciements dans les thèses dans le préambule du quatrième chapitre de la présente thèse.

Pour illustrer ce propos, on peut citer un extrait de l'introduction de la thèse de Jean Capoulade<sup>82</sup> :

« Je tiens à remercier M. Le Professeur Bouligand des utiles directions qu'il m'a données et qui m'ont permis d'aboutir dans ce travail ; mais je lui suis surtout reconnaissant de l'affectueuse sympathie avec laquelle il a encouragé mes efforts, de son rôle d'animateur toujours bienveillant. Je suis particulièrement fier d'être son Élève et d'avoir eu le plaisir et l'honneur de développer une question dont il avait le premier aperçu toute l'importance ».

À cette occasion, Jean Capoulade attribue également la paternité de sa recherche au mathématicien : « le présent travail est l'exposé de recherches entreprises à l'instigation de M. Bouligand. »<sup>83</sup>.

Le terme d'« élève » est ici employé par les doctorants eux-mêmes pour décrire leur relation avec Georges Bouligand. Cette utilisation est en elle-même assez rare et renforce l'importance de la relation. L'usage veut en effet que les doctorants ne se décrivent pas eux-mêmes mais appellent certains mathématiciens leurs « maîtres ». Le terme d'« élève » est en outre repris par certains mathématiciens de l'époque pour désigner des doctorants de Poitiers comme des élèves de Bouligand. Paul Lévy dans une lettre qu'il adresse à Maurice Fréchet en octobre 1949<sup>84</sup> écrit ainsi qu'en 1949, André Fouillade ne fait plus de sciences mais qu'en 1930, il était l'« élève » de Bouligand<sup>85</sup>. Maurice Fréchet, dans une lettre qu'il adresse à Hotsinsky le 17 février 1936, évoque les recherches de Fouillade, « un élève à Poitiers du mathématicien Georges Bouligand »<sup>86</sup>. Il semble donc que l'on puisse parler d'« élève » de Bouligand, voire de « disciple », pour reprendre le terme de Chow lorsqu'il évoque Lucien Chamard ou encore Jean Mirguet<sup>87</sup>.

---

82. Cf. CAPOULADE 1934, p. 3. Un extrait de l'introduction du doctorat de Pasqualini illustre également le lien particulier entre le mathématicien et le doctorant :

« Telle est la question [que] [...] m'a posée M. G. Bouligand, orientant ainsi mon travail parallèlement à des recherches qu'il avait déjà dirigées concernant la raréfaction des ensembles. »

Pasqualini évoque alors notamment les recherches de Shao-Lien Chow dans CHOW 1936 et de Brunhold dans BRUNHOLD 1934. De même Chow, CHOW 1936, p. 7, et Chamart, CHAMARD 1933, p. 11, écrivent que Bouligand les a orientés dans le sens de ses recherches.

83. Cf. CAPOULADE 1934, p. 1. André Fouillade signale également dans son introduction que l'« origine de ses recherches » se trouve dans une note de Bouligand parue aux *Comptes rendus de l'Académie de sciences* en 1927, cf. FOUILLADE 1937, p. 8.

84. Cf. Lettre 62 reproduite dans BARBUT ET AL. 2004, p. 222-223.

85. André Fouillade soutient sa thèse, *Recherches sur l'itération des substitutions fonctionnelles linéaires* en 1938.

86. Cf. Les archives de l'université Mazaryk de Brno où sont conservées les archives personnelles d'Hostinsky. Il lui indique que certains sujets d'étude de Fouillade (sur des espaces pour lesquels il n'y a pas de densité de probabilité) se rapprochent de ceux d'un étudiant d'Hostinsky, Pospisil.

87. Cf. CHOW 1936, p. 8.

Sur ce point, la comparaison entre la faculté de Poitiers des années 1930 et la faculté de Strasbourg des années 1920 ne tient pas. À Strasbourg, sont soutenus dans les années 1920 des travaux qui n'ont que peu de liens avec les thèmes de recherche des professeurs ou des chargés de conférences de la faculté (c'est le cas pour Louis Antoine et Paul Flamant). À Poitiers, l'un des professeurs, Georges Bouligand joue un rôle particulier. Il oriente les recherches de ses doctorants dans des domaines sur lequel lui-même travaille. Il ne semble pas s'être contenté de leur fournir des sujets et des encouragements.

L'étude plus précise des sujets travaillés par les doctorants de Poitiers que je vais présenter dans la prochaine sous-partie va montrer qu'il exerce une influence intellectuelle certaine sur les travaux des jeunes mathématiciens. Excepté la thèse de Marie Charpentier, les cinq autres doctorats de Poitiers sont tous en lien avec les recherches de Bouligand : soit ils trouvent leur origine dans ses travaux, soit ils reprennent et approfondissent certains de ses travaux, soit ils utilisent des notions que le mathématicien a précédemment introduites. Ce lien est mis en évidence par les références qui sont faites aux articles et ouvrages de Bouligand.

Bouligand apparaît donc comme le principal animateur de la vie scientifique de Poitiers dans les années 1930. Si d'autres professeurs, maîtres de conférences ou chargés de cours de mathématiques, Théophile Got puis Henri Poncin<sup>88</sup>, enseignent à Poitiers dans les années 1930, leur influence ne se perçoit pas à l'étude des thèses d'État soutenues à la faculté.

### 3.2.3 L'influence intellectuelle de Georges Bouligand : de Poitiers à Paris

Hormis le mémoire de Marie Charpentier, les thèses soutenues à Poitiers entre 1930 et 1939 ont donc été initiées par des travaux et des recherches de Bouligand. Parmi les cinq autres doctorats de Poitiers, on peut distinguer le travail d'André Fouillade. Ce dernier part effectivement d'une remarque du mathématicien formulée aux C.R.A.S. en 1927. Cependant, l'essentiel des recherches qu'il présente ne portent pas sur les thèmes principalement travaillés par Bouligand. Excepté la référence au résultat précis que contient cette note de Bouligand, Fouillade ne se réfère à aucune autre de ses recherches. Dans son mémoire *Recherches sur l'itération des substitutions fonctionnelles linéaires*, présenté en 1937, Fouillade s'intéresse surtout aux transformations fonctionnelles linéaires de la forme  $F_1(P) = \int_{\Omega} F(M) d_M K(P, e)$  qui conservent la continuité des fonctions<sup>89</sup>. En partant d'une certaine fonction  $F$ , il étudie la suite des itérées

88. Leur statut évoluant au cours des années 1930.

89. Dans la formule de l'intégrale,  $K(P, e)$  est une fonction d'ensemble,  $\Omega$  un domaine quelconque et  $F$  une fonction continue dans  $\Omega$  et sur la frontière  $\Sigma$  de  $\Omega$ . L'intégrale utilisée par Fouillade est celle de Stieltjes-Radon.

de la transformation et leur convergence. C'est sur ce sujet particulier que porte la note de Bouligand que Fouillade mentionne comme point de départ à ses recherches. Le mathématicien montrait la convergence de ces itérées dans le cas de substitutions fonctionnelles linéaires qui conservent non seulement la continuité de la fonction dans le domaine et sur sa frontière, mais qui conservent également les valeurs à la frontière, la fonction unité, et qui majorent les polynômes à coefficients positifs dans la région des coordonnées positives du domaine. Fouillade se place dans un cadre plus général. Il considère plusieurs fonctions d'ensemble  $K(P, e)$  vérifiant certaines propriétés particulière et il étudie notamment le cas où la fonction est une fonction positive d'ensemble. Les références principales utilisées par le doctorant sont les travaux de de La Vallée Poussin et de Riesz pour les questions de convergence. Il cite également Richard von Misès et reprend sa notion d'*ensemble indécomposable*<sup>90</sup> à laquelle il fait jouer un rôle particulier dans ses recherches sur la convergence des itérées.

Même si les autres mémoires sont référencés dans des domaines mathématiques différents, on trouve dans chacun d'entre eux la considération d'ensembles particuliers ainsi que l'utilisation de nouvelles notions mathématiques empruntées à la théorie des ensembles et à la géométrie infinitésimale et introduites par Bouligand à la fin des années 1920. Bouligand reprend d'ailleurs l'ensemble de ces notions et les récapitule dans son ouvrage *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, BOULIGAND 1932, qu'il publie au début des années 1930. Cet ouvrage est ainsi cité à de nombreuses reprises dans chacun des quatre mémoires.

Tout d'abord, dans sa thèse de 1934, *Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique à coefficients singuliers*, Jean Capoulade étudie des problèmes sur les classes d'*ensembles impropres* des frontières qui interviennent dans la résolution des équations différentielles<sup>91</sup>. D'après Jean Capoulade, la notion d'*ensemble impropre* a été introduite par Bouligand et c'est sur cette notion qu'il centre son travail.

Si on excepte les citations de ses propres publications, Jean Capoulade se réfère exclusivement dans son doctorat aux publications de Georges Bouligand. Ces références occupent une place importante de l'introduction du mémoire. Elles reviennent en outre régulièrement dans le manuscrit. Capoulade évoque et expose des travaux et publications contemporaines de Bouligand qui concernent ses propres domaines de recherche. Ainsi, « le Chapitre II expose les résultats [que Bouligand] a obtenus en 1931 » sur les ensembles propres et impropres<sup>92</sup>. La recherche de Capoulade durant l'élaboration de

---

90. Cf. FOUILLADE 1937, p. 14.

91. Il s'agit d'ensembles de points de la frontière qui interviennent dans le problème de Dirichlet. Ils sont impropres à porter des données et ne permettent pas de trouver une solution classique à une équation différentielle, cf. CAPOULADE 1934, p. 5.

92. Cf. CAPOULADE 1934, p. 2 : « un ensemble propre dans les conditions ordinaires peut devenir anormalement impropre au contraire un ensemble habituellement impropre peut devenir anormalement propre. »

son doctorat semble donc s'être faite dans une étroite collaboration avec Bouligand. C'est d'ailleurs à ce dernier que l'étudiant attribue la paternité de son travail, de façon insistante comme je l'ai indiqué dans la sous-partie précédente.

Les trois autres doctorants font également référence aux travaux du mathématicien de façon aussi importante et fréquente que l'a fait Jean Capoulade.

Dans sa thèse, *Sur les propriétés de la distance à un ensemble ponctuel*, soutenue en 1933 et classée dans le domaine de la théorie des ensembles, Lucien Chamard cherche à « approfondir l'étude des ensembles Cantor-Minkowski, au-delà des résultats obtenus par M. Georges Bouligand et M. Georges Durand » dans la considération de figures convexes<sup>93</sup>. Dans son travail, Lucien Chamard part de notions et de résultats obtenus par ces deux mathématiciens. Il se réfère exclusivement à leurs travaux qui portent sur les notions de distance d'un point à un ensemble, à ceux qui introduisent des notions relatives aux ensembles convexes et aux frontières des ensembles de Cantor-Minkowski et à ceux qui évoquent les notions de contingent et de paratingent d'un ensemble<sup>94</sup>. L'essentiel de ces notions a d'abord été introduit par Georges Bouligand. D'ailleurs, l'ouvrage cité le plus grand nombre de fois par Lucien Chamard au cours de son mémoire est l'*Introduction à la géométrie infinitésimale directe* de Georges Bouligand, BOULIGAND 1932, dans lequel ce dernier reprend le contenu de précédentes publications. Lucien Chamard se réfère également fréquemment à la thèse de Georges Durand, *Sur une généralisation des surfaces convexes*. Cette dernière thèse est soutenue à la faculté des sciences de Paris en 1931. Cependant, son origine se trouve dans les travaux de Bouligand. En outre, d'après l'introduction du mémoire de Durand, Bouligand a

---

93. Cf. CHAMARD 1933, p. 4. Selon Lucien Chamard qui reprend en fait la définition que donne Georges Bouligand dans BOULIGAND 1932, p. 34, déjà reprise par Georges Durand dans DURAND 1931, la construction de Cantor-Minkowski définit un ensemble  $E_\rho$ , obtenu par la réunion de toutes les sphères de rayon  $\rho$  centrées sur chaque point d'un ensemble  $E$  ponctuel borné. La frontière  $F_\rho$  de cet ensemble est alors un ensemble Cantor-Minkowski, incluant certaines portions de surfaces vérifiant une propriété qui les apparente à des surfaces convexes : par tout point de l'ensemble on peut faire passer une sphère de rayon  $\rho$  n'enfermant intérieurement aucun point de cet ensemble.

94. Ces deux dernières notions ont été introduites par Georges Bouligand à la fin les années 1920. L'ouvrage de référence de Bouligand, celui qu'il écrit après la parution de nombreux articles dans des périodiques, est BOULIGAND 1932. Les définitions précises de ces deux notions qu'il donne dans cet ouvrage, pp. 66 et 72, sont les suivantes (la définition du contingent dépendant de la notion de demi-tangente, je donne également la définition de cette notion).

On considère  $E$  un ensemble ponctuel.  $O$  un point d'accumulation de  $E$ .

- Une demi-droite  $OT$ , issue du point d'accumulation  $O$  de l'ensemble  $E$  est une *demi-tangente* au point  $O$ , à l'ensemble  $E$ , si tout cône droit à base circulaire, de sommet  $O$  et d'axe  $OT$ , contient (si faibles en soient la hauteur et l'angle au sommet) un point de l'ensemble  $E$  distinct du point  $O$ .
- L'ensemble de toutes les demi-tangentes à l'ensemble  $E$  en un même point d'accumulation est appelé le *contingent* de l'ensemble  $E$  au point  $O$ .
- Une droite  $RS$  passant par  $O$  appartient au *paringent* de  $E$  en  $O$ , ou encore est une *paringente* de  $E$  en ce point, si l'on peut trouver une suite de segments  $P_iQ_i$  dont les extrémités appartiennent à  $E$  tendent vers  $O$  et dont les droites supports tendent vers la droite  $RS$  ou bien coïncident avec elles.

également joué un rôle dans l'élaboration de ce travail<sup>95</sup>. Bouligand et Durand sont donc les deux seuls mathématiciens dont le doctorant reconnaît l'influence<sup>96</sup>. Il situe sa propre recherche dans la suite logique des travaux de Durand, travaux qui eux-mêmes continuaient ceux de Bouligand.

Enfin, les deux autres doctorats soutenus à Poitiers, celui de Shao-Lien Chow, *Problèmes de raréfaction et de localisation d'ensembles*, en 1936, et celui de Pasqualini, *Sur les conditions de convexité d'une variété*, en 1938, abordent tous deux des questions de raréfaction d'ensembles.

Shao-Lien Chow s'intéresse à l'application de problèmes de raréfaction et de localisation d'ensembles à l'analyse mathématique et notamment à la théorie des fonctions<sup>97</sup>. Chow poursuit ainsi l'étude de la raréfaction des ensembles dans une voie déjà initiée par Charles Brunhold à la suite de Bouligand. Il prolonge également l'étude des théorèmes de localisation de certains ensembles mathématiques d'Arnaud Denjoy.

D'après l'introduction de sa thèse, l'ouvrage de Bouligand, BOULIGAND 1932, constitue l'origine de ses recherches, comme cela a été le cas pour Lucien Chamard<sup>98</sup>. Il adopte les notions et les notations utilisées par Bouligand, notamment dans cet ouvrage, et revendique l'influence du mathématicien sur son travail<sup>99</sup>. Il évoque également l'influence des « disciples » du mathématicien tel qu'il les nomme<sup>100</sup> : Charles Brunhold, mais surtout Lucien Chamard et Jean Mirguet. Il se réfère enfin à plusieurs travaux de Denjoy dans l'application de ses recherches en analyse.

Quant à Louis Pasqualini, il part du résultat qu'un point d'une variété  $V_{p-1}$  de l'espace  $\mathbb{R}_p$  entourée de points ayant leurs environs sur  $V_{p-1}$  convexes a lui-même ses environs convexes. Il résout alors dans sa thèse la question suivante posée par Bouligand<sup>101</sup> : sur quel ensemble de points d'une surface  $z = f(x, y)$  peut-être omise l'hypothèse d'avoir ses environs convexes pour que le projeté d'une rondelle de cette surface sur le plan  $xOy$  suivant une figure convexe reste convexe ? D'après Pasqualini, sa

95. Cf. DURAND 1931, p. 9. « Je suis heureux aussi d'exprimer mon affectueuse reconnaissance à M. G. Bouligand qui m'a prodigué ses conseils et ses encouragements : son oeuvre est le point de départ de mon travail. » Pour évoquer cette thèse, je ne me réfère qu'au manuscrit en lui-même et à l'introduction écrite par Durand. Le rapport de ce doctorat est déclaré manquant aux Archives nationales.

96. Cf. CHAMARD 1933, p. 11.

97. C'est notamment ce qui peut expliquer le classement que fait le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* de ce mémoire en analyse. Les ensembles de points considérés doivent alors vérifier certaines propriétés dépendantes des domaines d'applications des résultats.

98. Cf. CHOW 1936, p. 5 : « M. Bouligand a fondé une nouvelle géométrie différentielle « *Géométrie infinitésimale directe* » où il s'est attaché à étudier les propriétés des ensembles, au nombre desquelles on remarque les lemmes d'univocité qui posent de nouveaux problèmes de localisation, qui constituent le point de départ de mes recherches. »

99. Cf. CHOW 1936, p. 7. Selon Chow, c'est Bouligand qui l'a orienté dans le choix du présent travail.

100. Cf. CHOW 1936, p. 7.

101. tel qu'il le reconnaît lui-même dans l'introduction du mémoire, PASQUALINI 1938, p. 2. On pourra également relire la citation retranscrite dans la sous partie précédente à la note n°82.

recherche est principalement influencée par les travaux de Bouligand. Il situe en outre son mémoire dans la continuité des recherches déjà entreprises par Shao-Lien Chow et Charles Brunhold.

Mise à part la thèse de Marie Charpentier, Bouligand apparaît comme le dénominateur commun à tous les doctorats soutenus à Poitiers. Cette étude révèle en outre le rôle d'organisateur de la recherche joué par Bouligand. Il impose et fait travailler ses propres thématiques de recherche aux étudiants de Poitiers. De plus, cette influence dépasse le cadre de la seule faculté de Poitiers.

L'étude des références citées par les doctorants met en effet en évidence certains mathématiciens qui soutiennent leur thèse de sciences mathématiques dans une autre faculté que celle de Poitiers et qui travaillent sur des résultats et des notions introduites par Georges Bouligand<sup>102</sup>.

Lucien Chamard se réfère ainsi Georges Durand, qui a soutenu une thèse à Paris en 1931, *Sur une généralisation des surfaces convexes* et Charles Brunhold qui a présenté son doctorat *Contribution à l'étude de quelques catégories d'ensembles totalement discontinu définis par des conditions géométriques* en 1934 à Toulouse. Tous deux affirment dans les avant-propos de leur mémoire l'influence de Bouligand sur leur recherche ainsi que sur l'élaboration même de leur travail<sup>103</sup>. De plus, Shao-Lien Chow cite des travaux de Jean Mirguet et notamment sa thèse, *Nouvelles recherches sur les notions infinitésimales directes du premier ordre*, soutenue en 1934 à Paris.

Aux trois thèses de Durand, Brunhold et Mirguet, il faut également rajouter le doctorat de Gaston Rabaté, *Sur les notions originelles de la Géométrie infinitésimale directe*, soutenu à Toulouse en 1931 et celui d'Eugène Blanc *Les espaces métriques quasi-convexes*, soutenu à Paris en 1938<sup>104</sup>. Bouligand met en valeur le travail de Rabaté dans

---

102. Les noms qui sont apparus à partir des thèses de Poitiers et des mémoires qui y sont cités mettent en évidence un ensemble de doctorats en rapport avec les travaux du mathématicien. L'étude des rapports et des avant-propos des autres thèses soutenues à Paris, ainsi que l'analyse des introductions des autres thèses de province montrent que ce sont les seuls.

103. L'insistance et la place qu'occupent les remerciements de Brunhold envers le mathématicien est d'ailleurs à signaler. Ils traduisent l'investissement de Bouligand dans les recherches du doctorant, cf. BRUNHOLD 1934, p. 7 :

Je n'aurais pas osé m'[engager dans mes recherches] sans l'intérêt exceptionnellement bienveillant et amical et sans les encouragements et l'aide effective de celui à qui je dois d'avoir pu franchir cette étape, dans l'évolution que je me suis fixée. Au seuil de ce travail, entrepris sur les conseils de M. G. Bouligand, et qui se rattache étroitement à ses recherches personnelles, je suis heureux d'exprimer mon affectueuse reconnaissance à celui dont je suis fier d'avoir été l'élève.

104. Autant la soutenance des doctorats de Georges Durand, de Jean Mirguet et d'Eugène Blanc peuvent s'expliquer par l'usage qui veut que les meilleurs travaux soient présentés à la Sorbonne, autant je n'ai pu trouver de raison à la soutenance des mémoires de Brunhold et surtout de Rabaté à Toulouse. En ce qui concerne Rabaté, comme nous informe la première page de son manuscrit, au moment de la soutenance de sa thèse, il est chargé de cours à la faculté des sciences de Poitiers. Dans quelle mesure la soutenance de ces mémoires à la faculté des sciences de Toulouse pourtant qualifiée de

l'ouvrage BOULIGAND 1932 auquel se réfèrent au moins trois doctorants de Poitiers. Il y évoque notamment sa « sympathie spontanée à ses idées »<sup>105</sup>. De plus, Jean Mirguet fonde une partie de son travail sur les résultats obtenus par ce dernier dans la théorie de la géométrie infinitésimale directe<sup>106</sup>. Les travaux d'Eugène Blanc sont également cités dès 1934 par Jean Mirguet dans sa thèse même si ce dernier ne soutient son doctorat qu'en 1938.

L'ensemble de ces mémoires se rapportent à des thématiques que Bouligand travaille toujours pendant les années 1930.

Ainsi, Gaston Rabaté, Jean Mirguet et Charles Brunhold reprennent et développent dans leurs travaux respectifs les nouvelles méthodes de géométrie infinitésimale directe dont Bouligand est « l'initiateur »<sup>107</sup>. Cette théorie est en partie fondée sur la théorie des ensembles. Ce rapport est d'ailleurs confirmé par le classement en « théorie des ensembles » des trois thèses de Rabaté, Mirguet et Brunhold et de celles de Durand et Chamard qui portaient également sur la géométrie infinitésimale directe. Or seuls huit doctorats d'État sont classés dans ce domaine de la théorie des ensembles pour l'ensemble de la période entre 1914 à 1945<sup>108</sup>. La recherche française en théorie des ensembles apparaît donc pour l'essentiel portée par le mathématicien Georges Bouligand et par ses travaux sur la géométrie infinitésimale directe.

Dans sa thèse, *Sur les notions originelles de la géométrie infinitésimale directe*, Gaston Rabaté consacre toute une partie de son mémoire à rappeler les principales notions introduites par Bouligand à la fin des années 1920 et notamment celles de contingent et de paratingent. Il présente les premières applications simples qu'en a faites Bouligand. Il expose ensuite les nouvelles applications qu'il a lui-même obtenues en théorie des courbes (planes et gauches), sous les conseils de Bouligand. On peut d'ailleurs remarquer que ce doctorat est soutenu en 1931, alors que la synthèse de Bouligand, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, ne paraît qu'un an plus tard, en 1932.

Charles Brunhold et Jean Mirguet, en 1934, commencent également leur mémoire en rappelant ces notions du mathématicien avant d'approfondir et d'étendre les notions ainsi que le résultats obtenus par Bouligand.

---

« désert scientifique » par Henri Cartan, selon Laurent Schwartz SCHWARTZ 1997, p. 156, résulte-t-il d'une volonté de certains mathématiciens de décentraliser la recherche française ?

105. Cf. BOULIGAND 1932, p. 3.

106. C'est d'ailleurs sur ces mots qu'il débute l'introduction de son mémoire : « Le présent Mémoire s'ajoute aux travaux déjà consacrés par MM. G. Bouligand et G. Rabaté aux notions originelles de la Géométrie infinitésimale directe. », qu'il reprend dans l'article correspondant à sa thèse et publié aux *Annales de l'École normale supérieure*, cf. MIRGUET 1934a, p. 201 ou MIRGUET 1934b, p. 3.

107. Pour reprendre les termes qu'emploie Élie Cartan dans le rapport sur la thèse de Jean Mirguet, p.1.

108. Les trois autres de ce domaine sont soutenues à Paris et sont les oeuvres de Samuel Cholenko, *Sur la mesure des ensembles*, 1930, de Georges Kurepa, *Ensembles ordonnés et ramifiés*, 1935, et de Ky Fan, *Sur quelques notions fondamentales de l'Analyse générale*, 1941.



Dans son mémoire, Jean Mirguet s'intéresse aux notions « originelles » de la géométrie infinitésimale directe<sup>109</sup>. Dans un premier temps, il en rappelle les notions fondamentales et donne certains résultats relatifs au paratingent d'un ensemble et au paratingent mutuel de deux ensembles. C'est à cette occasion qu'il signale certaines applications de cette dernière notion que fait Eugène Blanc en 1933<sup>110</sup>. Il propose ensuite une approche originale fondée sur le recours systématique à la considération de triplets de points. Il se distingue en cela de Bouligand qui, dans cette théorie, travaille davantage avec les doublets de points, notamment dans son utilisation des notions de contingent et de paratingent<sup>111</sup>. D'après Élie Cartan, rapporteur sur la thèse de Mirguet, la considération des triplets de points par Miguet lui permet de répondre à certaines questions posées par Bouligand, comme celle relative à la planéité du contingent pour les surfaces dont le paratingent ne présente pas d'élément intérieur. Elle lui permet également de créer de nouvelles notions telles que le *biparatingent* et le *biparatingent réduit* qui généralisent les plans osculateurs<sup>112</sup>.

Quant à Charles Brunhold, il répond dans sa thèse à une question posée par Bouligand à la fin de son ouvrage BOULIGAND 1932, p. 221<sup>113</sup>. Il s'agit en fait de trouver des critères géométriques relatifs à un ensemble  $E$  permettant d'affirmer que cet ensemble est « punctiforme sans plus ». Le but est également d'établir ainsi une classification des ensembles ponctuels, au point de vue de leur structure<sup>114</sup>.

Georges Durand en 1931 puis Eugène Blanc en 1938 s'intéressent plus précisément aux notions de convexités des ensembles. Comme Lucien Chamard, ils reprennent les travaux de Bouligand sur la construction Cantor-Minkowski et les ensembles Cantor-Minkowski.

Georges Durand s'occupe ainsi d'une généralisation des surfaces convexes<sup>115</sup>. Il s'intéresse plus particulièrement à la frontière des ensembles de Cantor-Minkowski. Il

109. Cf. MIRGUET 1934a, p. 201.

110. Cf. MIRGUET 1934a, p. 203.

111. Les définitions de ces deux notions sont rappelées dans la note n°94.

112. Cartan rapproche cette généralisation de celle permise par les notions de contingent et de paratingent. Le contingent et le paratingent généralisent en effet les notions de tangentes. Le biparatingent est l'ensemble d'accumulation des plans des triplets non alignés dont les sommets tendent simultanément vers le point d'accumulation. Le biparatingent réduit est l'ensemble d'accumulation des plans des triplets non alignés dont les sommets tendent simultanément vers le point d'accumulation et ne tendent pas à devenir trois plans alignés, cf. MIRGUET 1934b, p. 4.

113. Il en reprend l'énoncé exact : « Essayer de généraliser, dans le plan par exemple, le théorème de Denjoy-Durand par une loi de raréfaction d'un ensemble soumis à l'hypothèse suivante : en chaque point  $M$  de l'ensemble, on peut trouver deux directions  $Mx$  et  $My$  et un secteur limité par la courbe  $y = \lambda|x|^{1+\theta}$  (avec  $0 < \theta < 1$ ) et par un segment rectiligne parallèle à l'axe des  $x$  de manière que tous les points de l'ensemble suffisamment voisins de  $M$  soient contenus à l'intérieur de ce secteur. »

114. Les critères géométriques trouvés sont des critères mettant en oeuvre la notion de paratingent.

115. Il part de la définition suivante des lignes ou surfaces convexes : en chaque point de la ligne ou de la surface il existe un demi-plan ou un demi-espace non pénétré par cette ligne ou cette surface DURAND 1931, p. 2. Il la généralise en remplaçant dans la définition précédente demi-plan et demi-espace par l'intérieur d'un cercle et l'intérieur d'une sphère de rayon constant pour tous les points de l'espace DURAND 1931, p. 3.

opère alors une classification des points-frontières, sur laquelle s'appuiera ensuite Eugène Blanc dans sa thèse. Cette classification amène enfin Georges Durand à reprendre et à redéfinir « à un point de vue nouveau la théorie des enveloppes »<sup>116</sup>.

Dans l'introduction de son mémoire, Durand mentionne la recherche parallèle et récente réalisée par Bouligand sur les mêmes sujets que lui-même travaille. Durand note ainsi l'utilisation que fait Bouligand de la construction de Cantor-Minkowski afin d'obtenir des propriétés dimensionnelles vérifiées par des ensembles fermés et applicables à certaines questions posées par le problème de Dirichlet<sup>117</sup>. Il mentionne également l'utilisation que fait ensuite le mathématicien de la théorie des enveloppes que lui-même a redéfinie. Bouligand applique cette théorie au domaine du calcul variationnel afin d'obtenir certains minima absolus<sup>118</sup>.

Comme le montrent les références à des articles d'Eugène Blanc citées par Jean Mirguet et par Eugène Blanc lui-même, ce dernier a commencé à travailler sur des questions liées à la géométrie infinitésimale depuis 1933, cinq ans avant la soutenance de son doctorat. Dans son mémoire, il considère les ensembles de Cantor-Minkowski, comme l'a fait Georges Durand. Il montre notamment qu'une suite convergente d'ensembles de Cantor-Minkowski de rayon  $\alpha$  ne converge pas forcément dans un espace métrique quelconque vers un ensemble de Cantor-Minkowski de même rayon. Ce résultat l'amène à considérer les conditions de « quasi-convexité » à imposer à la métrique de l'espace pour que la limite d'une telle suite soit encore un ensemble de Cantor-Minkowski de rayon  $\alpha$ . Il étudie ensuite les propriétés des sphères de l'espace muni de cette nouvelle métrique. Il montre que les sphéroïdes généralisées se comportent globalement comme dans le cas de la géométrie euclidienne, contrairement au cas d'un espace critique quelconque, où la considération des points-frontière des sphères l'a amené à établir certaines anomalies présentées par les sphères.

Paul Montel, rapporteur de ce mémoire, souligne l'« excellence » du travail réalisé par Eugène Blanc. Il insiste sur l'« originalité » de la notion de quasi-convexité que ce dernier introduit. Il prédit le « rôle utile » que cette notion sera « amenée à jouer dans l'étude des métriques des espaces ». La thèse d'Eugène Blanc obtient d'ailleurs

---

116. Cf. DURAND 1931, p. 5.

117. Cf. DURAND 1931, pp. 4 et 8. Durand cite alors la publication suivante de Bouligand : G. Bouligand, *Ensembles impropres et nombre dimensionnel*, Bulletin des sciences mathématiques, 2<sup>e</sup> série, t.52, septembre et octobre 1928.

118. Durand cite la publication suivante : G. Bouligand, *Problèmes connexes de la notion d'enveloppe de M. G. Durand*, Comptes rendus de l'Académie des sciences, 189, p.446. (1929). On peut également souligner que dans la synthèse que publie Bouligand en 1932, BOULIGAND 1932, ce dernier évoque des résultats de Durand qui ne figurent pas dans sa thèse. Cela montre que Durand continue à travailler sur des sujets de géométrie infinitésimale directe : il a ainsi rédigé le raisonnement établissant la dénombrabilité d'un ensemble pontuel dont le contingent en chaque point est contenu dans un demi-cône de révolution ayant pour sommet ce point, ce qui a permis de généraliser un résultat d'Arnaud Denjoy appelé par la suite théorème de Denjoy-Durand. Chow et Pasquellini utiliseront d'ailleurs ce théorème dans leur thèse.

la mention très honorable. La reconnaissance de la qualité du travail de Blanc par la communauté mathématique, représentée par le jury de la thèse, traduit plus largement la reconnaissance de l'oeuvre de Bouligand. Elle pourrait également indiquer le statut de sa théorie de la géométrie infinitésimale directe, maintenant connue et reconnue par le milieu mathématique.

L'étude de ces doctorats révèle ainsi l'existence d'une dynamique qui a pour origine Georges Bouligand et ses travaux définissant la géométrie infinitésimale directe<sup>119</sup>.

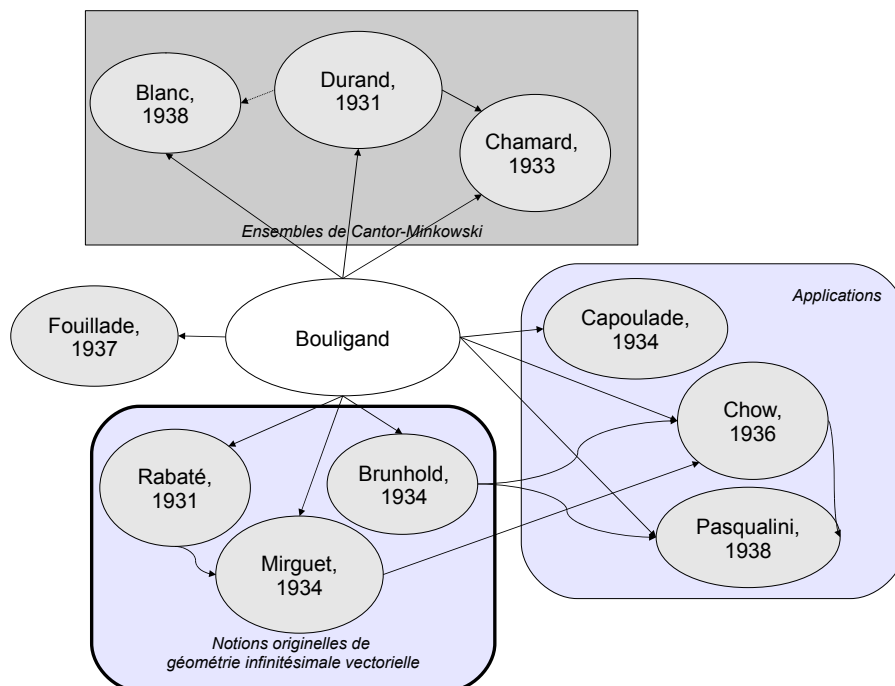


FIGURE 3.1 – Dynamique de recherche à l'origine de Georges Bouligand

Plusieurs tendances de recherches, liées entre elles, composent cette dynamique qui se développe dans les années 1930. On peut distinguer une première tendance de recherche en regroupant les travaux de Lucien Chamard, Georges Durand et Eugène Blanc, qui portent davantage sur l'étude des ensembles de Cantor-Minkowski. Les questions successivement abordées concernent les ensembles convexes, les notions de distance et de métrique d'espace.

Une deuxième tendance se dessine autour des travaux de Rabaté, Mirguet, Brunhold qui se concentrent surtout sur l'étude et l'approfondissement des notions originelles qui permettent de définir et de construire la géométrie infinitésimale directe. Capoulade, Chow et Pasqualini déclinent ensuite cette tendance dans une direction plus tournée vers les applications : applications à l'analyse pour Capoulade et Chow, application à un problème de géométrie pour Pasqualini.

119. On peut la voir schématisée dans la figure ci-dessous.

La dynamique de recherche qui est ainsi révélée traduit comment les notions introduites par Georges Bouligand s'affirment peu à peu dans le milieu de la recherche mathématique française. Pour reprendre les propos d'Élie Cartan, auteur de la préface de la synthèse de Georges Bouligand, BOULIGAND 1932, elles répercutent en géométrie « le développement qu'ont pris, spécialement en France, la théorie des ensembles et la théorie des fonctions de variables réelles » et « servent d'introduction à une nouvelle géométrie différentielle libérée des restrictions artificielles que l'ancienne s'imposait par raison de commodité »<sup>120</sup>. L'importance de cette nouvelle géométrie a ainsi grandi au cours des années 1930 au point qu'en 1938, un étudiant normalien, Eugène Blanc, soutient une thèse qui s'inspire des travaux du mathématicien. On peut interpréter cette soutenance comme un signe du succès des recherches entreprises et dirigées par Bouligand<sup>121</sup>. En effet, à l'époque, l'élite mathématique de la scène universitaire est presque composée uniquement de mathématiciens issus de l'École normale. Un autre signe du succès de cette théorie peut être vu dans le départ de Bouligand de la faculté de Poitiers à la fin des années 1930. Comme Fréchet à la fin des années 1920 qui quitte la faculté de Strasbourg, Bouligand rejoint finalement l'université parisienne en 1939. Plus aucun doctorat n'est alors soutenu à Poitiers pendant la seconde guerre-mondiale<sup>122</sup>. Ce départ semble alors remettre en partie en cause la volonté de décentralisation de la recherche mathématique et l'effort investi à Poitiers dont parlait Vasilesco en 1931.

### 3.3 D'autres pôles en province

À côté des facultés des sciences de Strasbourg et de Poitiers, les facultés de Lyon, Montpellier et Toulouse se distinguent : un certain nombre de doctorats y est soutenu pendant l'entre-deux-guerres (respectivement 10, 7 et 5). À Caen, Lille et Nancy ne sont soutenus qu'un seul doctorat<sup>123</sup>.

Sur les thèses soutenues à Toulouse, peu de remarques semblent pouvoir être formulées : deux se rapportent, comme nous l'avons vu, aux travaux de Bouligand, deux autres sont des thèses de géométrie différentielle sur des sujets différents et la dernière

120. Cf. BOULIGAND 1932, préface.

121. C'est ce dernier qui donne l'élan initial aux recherches d'Eugène Blanc, cf. BLANC 1938, p. 3.

122. Le départ de Bouligand n'est sans doute pas l'unique raison de la fin des soutenances de thèses de sciences mathématiques à Poitiers : dès 1940, la ville est en effet occupée.

123. La thèse soutenue à Lille par Ratib Berker (*Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, 1936) est le résultat de la venue du doctorant à l'institut de mécanique des fluides de Lille (qui avait été créé par Châtelet au début des années 1930). Il y a travaillé en collaboration avec Kampé de Fériet. Il y étudie des équations de Navier-Stokes relatives au mouvement d'un fluide visqueux incompressibles et en cherche certaines intégrales. Ce thème d'étude n'est pas alors repris dans les thèses de mécanique des fluides soutenues à la même période à la faculté des sciences de Paris. Ces dernières se rapportent davantage à la théorie des sillages d'Henri Villat. On peut cependant évoquer la thèse d'Albert Gay, *Mouvement lent varié d'un solide en liquide visqueux indéfini et incompressible*, soutenue en 1930, dans laquelle Gay étudie, six ans avant Ratib Berker, des problèmes similaires.

est en physique mathématique sur les champs scalaires centrés et leurs ondes associées. Aucune de ces dernières thèses ne fait référence à des travaux des professeurs de la faculté de Toulouse de l'époque : Buhl, Deltheil, Cosserat et Paloque<sup>124</sup>.

### 3.3.1 Lyon

La faculté des sciences de Lyon est la faculté de province où le plus de doctorats sont soutenus pendant l'entre-deux-guerres et ceci de façon constante pendant toute la période<sup>125</sup>. Il n'y a pas non plus de rupture avec la période entre 1900 et 1914<sup>126</sup>. La faculté des sciences de Lyon ne semble pas avoir été un nouveau pôle de recherche mathématique créé par les mathématiciens français pendant l'entre-deux-guerres. Il n'y a pas d'augmentation brusque des nombres de doctorats soutenus, comme cela a été le cas successivement à Strasbourg et à Poitiers.

La faculté des sciences de Lyon présente des spécificités qu'il s'agit de déterminer. L'analyse des sujets des doctorats qui sont présentés à Lyon montre l'importance des mathématiques appliquées parmi les thèmes abordés, première différence d'avec Strasbourg et Poitiers. Seuls deux mémoires appartiennent au domaine de l'analyse : celui de Rambaud en 1931<sup>127</sup>, et celui de Fayet en 1937<sup>128</sup>. Ils se rapportent à l'étude de certaines équations différentielles.

Il peut être intéressant de comparer rapidement les travaux de Rambaud, ancien élève de l'école Polytechnique<sup>129</sup>, et ceux de Marie Charpentier qui au même moment, en 1930, soutient également une thèse d'analyse sur l'étude des points de Peano d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. Rambaud se réfère à des travaux de Briot et Bouquet ainsi qu'à des articles de Horn parus dans le journal de Crelle<sup>130</sup> qui datent du XIX<sup>ème</sup> siècle<sup>131</sup>. L'article le plus récent qu'il mentionne est un mémoire de Watanabe<sup>132</sup> datant de 1915. Rambaud utilise en outre dans son mémoire des mé-

124. Buhl et Deltheil sont respectivement pendant l'entre-deux-guerres titulaires des chaires de calcul différentiel et intégral et mathématiques générales. Paloque est astronome, chargé de conférences en astronomie, et il remplace Cosserat à cette fonction.

125. Entre 1914 et 1930, la part des thèses soutenues à Lyon représente en effet 30% des thèses soutenues en province pendant la même période (2 sur 7) et entre 1930 et 1945, cette part est encore de 25% (8 sur 32).

126. Pendant le premier quart de siècle, 25% des thèses soutenues en province le sont à Lyon (3 sur 12).

127. *Étude des points singuliers pour une équation linéaire du premier ordre.*

128. *Invariants de quelques équations différentielles et réduction de celles-ci à des équations à coefficients constants.*

129. Je n'ai pu trouver d'autres renseignements que celui-ci sur Rambaud. On peut penser qu'Henri Dulac alors professeur titulaire de la chaire de Calcul différentiel et intégral de la faculté de Lyon mais également examinateur d'analyse à l'École polytechnique pourrait avoir fait venir soutenir Rambaud à Lyon.

130. RAMBAUD 1931, pp. 7-9.

131. Ses références sont imprécises contrairement à celles du mémoire de Marie Charpentier, aucun ouvrage mathématique précis n'est ainsi cité et aucune bibliographie n'est présente dans le mémoire.

132. dans le « Tokohu mathematical journal » (vol. VII, 1915), cf. RAMBAUD 1931, p. 8.

thodes fondées sur l'étude de séries entières et il ne mentionne aucun emploi de théories mathématiques plus récentes. Marie Charpentier, au contraire, s'inspire de la théorie des ensembles telle qu'elle est travaillée par Fréchet et de la théorie des fonctions de la variable réelle de René Baire. Les références citées par les deux doctorants sont des premiers indicateurs de la différence de portée mathématique entre ces deux travaux, pourtant soutenus à la même période. En outre, la thèse de Marie Charpentier est remarquée par des mathématiciens français éminents tels Paul Montel et Émile Picard qui la recommandent ensuite pour une bourse Rockefeller. Je n'ai pu trouver aucune mention de travaux mathématiques de Rambaud dans les répertoires bibliographiques de l'époque tels que le *Jahrbuch*, ou encore dans l'historiographie de l'époque en analyse. On peut interpréter en partie cette différence de réception de ces travaux, pourtant relatifs à un même domaine des mathématiques pures, comme un indice des places intellectuelles respectives occupées par les facultés de Poitiers et de Lyon. Celle de Lyon apparaît alors au second plan du milieu de la recherche en mathématiques pures.

Les huit autres thèses qui sont soutenues à la faculté de Lyon appartiennent toutes au domaine des mathématiques appliquées : deux d'entre elles sont en mécanique et les six autres traitent de sujets d'astronomie.

Les deux mémoires de mécanique portent sur deux sujets distincts. Celle de Jean Mandel<sup>133</sup> est en mécanique des fluides. Elle traite d'un sujet qui concerne la théorie de la plasticité, théorie des problèmes relatifs à l'écoulement des corps solides soumis à des forces progressivement croissantes. Ce type de sujet n'est étudié pendant toute l'entre-deux-guerres que dans un seul autre mémoire de doctorat : celui d'Édouard Callandreau soutenu à Paris en 1931<sup>134</sup>. Celle de Marie-Auguste Morel en 1919 se rapporte à un sujet de mécanique appliquée, de balistique plus précisément : *Contribution à l'étude balistique des canons de gros calibre et à très longues portées*. Il s'agit de l'unique thèse d'État française dont le sujet est directement influencé par la première guerre mondiale. Dans MOREL 1919, p. 6, Marie-Auguste Morel mentionne ainsi que « les canons de très gros calibres qui ont été créés en France durant cette guerre affreuse sont encore sans tables de tir ». Le but de son travail est alors de « montrer les avantages et les inconvénients de ces canons géants et d'indiquer [...] leur emploi judicieux. » Il décrit d'ailleurs son mémoire « si modeste que soit le travail présenté » comme « utile à l'artillerie moderne »<sup>135</sup>. Se trouve ainsi formulée dès l'introduction du mémoire une application d'une thèse de sciences mathématiques à un domaine des sciences militaires, l'artillerie. Ce cas est unique parmi tous les doctorats de l'entre-deux-guerres.

133. *Sur les équilibres par tranches planes des corps solides à la limite de l'écoulement.*

134. *Sur l'application et l'extension des méthodes de Boussinesq à la détermination des coefficients de poussée dans les massifs pulvérulents à talus inclinés.*

135. Cf. MOREL 1919, avant-propos, p. XII.

Mis à part la thèse de Charles Caillate, présentée en 1944<sup>136</sup>, les six doctorats d'astronomie ont tous été élaborés en relation avec l'Observatoire de Lyon. Ces thèses ont comme sujet commun la photométrie stellaire<sup>137</sup>. Les doctorants étudient des questions relatives à la diffusion et à l'absorption de la lumière dans l'espace. La photométrie stellaire est étudiée comme technique astronomique<sup>138</sup>. Elle est également appliquée à l'étude particulière de certains astres (leur densité ou leur spectre)<sup>139</sup>. Pendant l'entre-deux-guerres, ces thématiques ne sont reprises dans aucune autre thèse de sciences mathématiques, classées en mathématiques appliquées et en astronomie. Si on regarde les dates auxquelles sont soutenus ces doctorats d'astronomie, on remarque une concentration des travaux entre 1935 et 1940, quatre sur six étant soutenus ces années-là<sup>140</sup>. Notons de plus que trois de ces doctorants sont chinois : Ssu-Pin Liao, Wang Shih-Ky et Tcheng Mao-Lin. Leur venue est sans doute une conséquence des liens particuliers qui existent entre la faculté des sciences de Lyon et certaines universités chinoises telle que l'université de Canton<sup>141</sup>.

On peut s'interroger sur le rôle que joue Jean Dufay, entré à l'observatoire de Lyon en 1929 et nommé directeur en 1933<sup>142</sup>, dans l'élaboration des thèses soutenues à la faculté de Lyon, dans le choix des sujets. Les doctorants expriment tous des remerciements, au moins formels, envers Jean Dufay. L'influence intellectuelle de ce dernier sur leurs travaux n'est cependant pas aussi manifeste que celle de Bouligand sur les thèses soutenues à Poitiers. Elle est explicite uniquement dans le travail de Wang Shih-Ky, *Recherches sur la diffusion de la lumière dans la voie lactée*, présenté 1936. Ce dernier se réfère à des recherches antérieures de Jean Dufay<sup>143</sup>. Le premier chapitre de sa thèse est consacré à un résumé « des résultats qu'il a obtenus en collaboration avec M. Dufay sur le rôle des étoiles faibles dans la lumière du ciel ». Enfin, un autre de ses chapitres développent des calculs « exposés très sommairement » par l'astronome<sup>144</sup>. Les autres doctorants ne mentionnent pas de publications de Jean Dufay.

On peut cependant penser que ce dernier exerce une certaine influence, au moins indirecte. En effet, dans OBSERVATOIRE DE LYON 2002, p. 9, les auteurs de cette

---

136. *Sur la figure des planètes*.

137. Selon, Gallissot dans GALLISSOT 1922, p. 7, « la photométrie stellaire a pour objet la détermination du rayonnement des astres ».

138. comme dans par exemple le mémoire de Gallissot.

139. comme les étoiles variables Go et X Cygni dans la thèse de Ssu-pin Liao ou Gamma Cassiopeiae dans la thèse de Tcheng Mao-Lin.

140. Les deux autres sont soutenus en 1922 (celui de Charles Gallissot) et en 1944 (celui de Charles Caillate).

141. Cf. NYE 1986, p. 163. Mary Jo Nye évoquant des archives de l'université de Lyon mentionne des accords passés entre les deux universités à la suite d'une entente entre les gouvernements français et chinois, accords notamment concrétisés par la venue en 1926 de 67 étudiants chinois à Lyon.

142. Cf. KOPAL 1968.

143. sur la luminosité du ciel nocturne et sur la liaison entre la diffusion et l'absorption interstellaire, cf. SHIH-KY 1936, pp.7-8.

144. Cf. SHIH-KY 1936, p. 8.

brochure signalent comme fait marquant de l'histoire de l'observatoire de Lyon, l'arrivée en 1929 de Jean Dufay et sa nomination comme directeur en 1933 : « associé à H. Grouiller<sup>145</sup>, il va introduire en quelques années la spectroscopie et la photométrie modernes à l'Observatoire de Lyon ». Or ces deux techniques sont développées et appliquées à l'étude de certaines questions dans les thèses soutenues dans les années 1930 à Lyon. Certains des mémoires sont fondés sur des observations. Les techniques et les appareils mis à disposition à l'observatoire de Lyon influencent alors ses travaux.

L'étude des doctorats soutenus à la faculté de Lyon met en valeur le rôle de l'université de Lyon comme un lieu davantage concentré sur les recherches appliquées des sciences mathématiques, une faculté où les mathématiques pures sont au second plan de la recherche qui est développée. En outre, la majorité des thèses portent sur un sujet d'astronomie, domaine à la marge des sciences mathématiques pendant l'entre-deux-guerres. On peut alors penser que la faculté des sciences de Lyon, malgré le nombre important de doctorats qui y sont soutenus, est à la marge du milieu de la recherche mathématique.

### 3.3.2 Montpellier

Aucune thèse n'est soutenue à la faculté des sciences de Montpellier jusqu'en 1934<sup>146</sup>. Par la suite, six doctorats sont consécutivement présentés entre 1938 et 1945. Parmi ces six doctorats, quatre se distinguent particulièrement par le domaine très appliqué de leur recherche, ceux de :

- Abolghassem Ahmad-Vaziri, *Sur quelques courbes liées au mouvement d'une courbe plane dans son plan*, 1938 ;
- Hourfar (Taghi)' Bodagh, *Exposition de recherches de M. E. Turrière sur la théorie des virages dans les routes modernes et étude générale des radioïdes*, 1939 ;
- Sisowath Youtévang, *Essai de normalisation des courbes d'intrados de voutes en berceau*, 1941 ;
- Lamson Jean, *Contribution géométrique à l'étude de l'action du vent*, 1942<sup>147</sup>.

Tout d'abord, on peut observer que, parmi ces docteurs, deux sont iraniens, diplômés et anciens élèves de l'École normale supérieure de Téhéran : Abolghassem et

<sup>145</sup>. Astronome adjoint de l'observatoire de Lyon, c'est à ce titre qu'il soutiendra son doctorat en 1939.

<sup>146</sup>. date à laquelle une première thèse y est soutenue par Louis Poli, *Sur les propriétés infinitésimales des mouvements à deux paramètres*.

<sup>147</sup>. Les trois autres doctorats soutenus à la faculté de Montpellier portent sur trois domaines différents dont aucun ne se rapproche de celui abordé par les quatre doctorants cités précédemment. Le premier, celui de Louis Poli, concerne en 1934 une question de géométrie différentielle. Dans le second, Oudin aborde en 1938 l'étude des calendriers. Le dernier doctorat, soutenu par Baranoff en 1941, appartient au domaine de l'analyse. Baranoff étudie les fonctions de Mathieu, solutions périodiques d'une équation différentielle :  $\frac{d^2\Omega}{d\omega^2} + (u - 2z \cos 2\omega)\Omega = 0$ .



Hourfar. Un autre, Sisowath est cambodgien<sup>148</sup>. On peut s'interroger sur la raison de leur présence à la faculté de Montpellier et se demander pourquoi ils y soutiennent une thèse. Cependant, j'ai n'ai pu pour l'instant trouver trace de liens particuliers existant entre la faculté des sciences de Montpellier et l'École normale supérieure de Téhéran ou avec le Cambodge, ni de raison à la venue de ces étudiants dans cette université française particulière<sup>149</sup>. La nationalité et l'origine des doctorants n'est cependant pas l'argument principal qui permet de regrouper ces quatre mémoires. Ils ont en effet une thématique commune. Les quatre doctorats sont consacrés à l'étude de courbes algébriques, de courbes ou surfaces géométriques particulières telles que la roulette, la glissette, les développoides, les courbes de Mannheim<sup>150</sup>, ou encore les radioïdes<sup>151</sup>, les courbes de Ribaucour<sup>152</sup>.

Hormis Abolghassem, les trois autres doctorants réalisent leur étude mathématique des différentes courbes en vue d'applications techniques. Ainsi, Hourfar étudie et discute des courbes les mieux adaptées à représenter des éléments des routes ou des voies ferrées telles que les virages ou les raccordements de pente, Sisowath celles les plus adaptées à la réalisation de l'équilibre d'une masse de matériaux, pour appliquer ses résultats à la construction de ponts. Enfin, Lamson s'intéresse aux déformations sous l'action du vent de courbes intervenant dans la construction d'édifices et recherche la meilleure forme de surface à adopter pour résister aux pressions du vent. Il étudie notamment les hangars d'aviation et leur voûte cylindrique ainsi que les dômes et les coupôles et leur voûte de révolution.

Les quatre doctorats ont surtout en commun un lien particulier avec Emile Turrière et ses recherches. Ce dernier est alors professeur titulaire de la chaire de mécanique rationnelle à la faculté des sciences de Montpellier<sup>153</sup>. Il exerce tout d'abord pour les quatre thèses un rôle institutionnel particulier. Non seulement il préside le jury des quatre thèses, mais chacun des manuscrits commence par la même dédicace :

« À mon maître, Monsieur le professeur Émile Turrière,  
Hommage de ma respectueuse reconnaissance. »,

---

148. Selon l'indication figurant sur le manuscrit de la thèse, il s'agirait même d'un prince.

149. Aucun autre étudiant cambodgien ne viendra soutenir une thèse d'État en France pendant l'entre-deux-guerres. Seuls deux autres étudiants iraniens présenteront un doctorat ès sciences mathématiques : Mohsen Hatchroudi, à Paris, en 1937, *Les espaces à connexion projective normale*, et Mohammed-Ali Modjtahédi, à Paris également, en 1938, *Quelques problèmes concernant le mouvement des fluides visqueux*, exactement à la même période qu'Abolghassem et Hourfar, ce qui est sans doute significatif, mais je n'ai pu trouver de sources m'expliquant ce phénomène.

150. dans la thèse d'Abolghassem.

151. dans la thèse d'Hourfar.

152. notamment dans les doctorats de Sisowath et Lamson.

153. depuis 1921, cf. DULIEU 1981, p. 92.

De plus, Pierre Humbert, alors professeur titulaire de la chaire de calcul différentiel et intégral et astronomie<sup>154</sup> ne participe pas au jury de ces quatre doctorats alors qu'il préside celui des trois autres thèses soutenues à Montpellier : celle de Poli (en 1934)<sup>155</sup> et celles d'Oudin (en 1938) et de Baranoff (en 1941)<sup>156</sup>.

Le lien d'Émile Turrière avec les quatre doctorats est également intellectuel. En effet, les publications qui sont les plus citées par chacun des quatre doctorants sont les articles et ouvrages du mathématicien. Ils s'y réfèrent dans le cours du texte et aussi dans la bibliographie des mémoires. Les publications de Turrière y occupent la plus grande place. Dans certains avant-propos, les doctorants reconnaissent même explicitement qu'ils reprennent les recherches de leur professeur. Ainsi, Taghi Hourfar se propose « de fondre en un seul travail d'exposition avec développements, les divers résultats contenus dans les articles ou mémoires de M. Turrière » et de compléter ce « travail de coordination [...] par quelques recherches personnelles » sur des sujets « qui n'avaient été indiqués qu'incidemment par M. Turrière »<sup>157</sup>. Il en est de même pour Youtévong. La partie centrale de son travail est consacrée à l'étude des courbes intrados de voûte en berceau. Dans son avant-propos, il mentionne tout d'abord que cette étude a été entreprise en 1938 par Émile Turrière et que ce dernier a alors écrit et publié un mémoire<sup>158</sup>. Youtévong explique ensuite qu'il a repris les recherches du mathématicien et que l'objectif essentiel de son doctorat est de les présenter<sup>159</sup> :

« Mais à la guerre, M. Turrière fut appelé à assumer une lourde charge et, de ce fait, dut suspendre provisoirement ses recherches. Il nous confia, dans ces conditions, le soin de les poursuivre sous sa direction. La présente thèse est le résultat de ce travail de refonte et de mise au point des recherches de notre Professeur. »

Abolghassem et Lamson ne reconnaissent pas aussi explicitement l'influence intellectuelle exercée par Émile Turrière sur leurs travaux. On peut cependant supposer qu'elle est tout aussi importante par les références qu'ils font aux recherches du mathématicien.

Enfin, Émile Turrière semble avoir exercé un rôle réel dans l'élaboration du travail ainsi que dans l'orientation des recherches. Les termes de « directeur », de « direction de recherche » sont employés dans les avant-propos des quatre mémoires de la même manière qu'ils étaient utilisés pour décrire le rôle de Bouligand dans les thèses soute-

154. depuis 1921, cf. DULIEU 1981, p. 91.

155. où il est examinateur alors que Turrière est président.

156. Les autres membres des jurys des quatre thèses présidées par Émile Turrière sont Jacques Soula pour toutes les quatre, Vasilescu pour trois d'entre elles et Gustave Malécot à la place de Vasilescu pour la thèse de Lamson.

157. Cf. HOURFAR 1939, p. 5.

158. Cf. SISOWATH 1941, p. 11.

159. Cf. SISOWATH 1941, p. 11.

nues à Poitiers. En outre, de telles mentions ne figurent pas dans les autres doctorats soutenus à Montpellier : ceux de Poli, Oudin et Baranoff dont les thèmes étudiés ne se rapportent pas aux recherches de Turrière<sup>160</sup>.

Ces quatre mémoires occupent un statut particulier parmi l'ensemble du corpus des thèses d'État en sciences mathématiques soutenues en France dans l'entre-deux-guerres. Les recherches mathématiques qui y sont présentées semblent avoir une application technique immédiate. Ils sont en liaison étroite avec l'ingénierie. Joseph Bize, ingénieur des Ponts et Chaussées du Vaucluse est d'ailleurs membre du jury de deux de ces quatre thèses (celles de Sisowath et d'Hourfar). Ce dernier fait distinguer également ces thèses du corpus : ce sont les seules thèses qui ont un ingénieur parmi les membres de leur jury. De plus, ces quatre thèses ne sont pas le fruit d'une recherche mathématique personnelle et originale. Certains constituent essentiellement un ouvrage d'exposition de recherches qu'ils n'ont pas eux-mêmes réalisées mais qu'ils reprennent pour en faire une synthèse. Cette situation n'est pas courante parmi les thèses de sciences mathématiques de l'entre-deux-guerres. On ne la retrouve que dans certains doctorats soutenus au XIX<sup>ème</sup> siècle, avant que la thèse mathématique ne soit considérée comme un ouvrage de recherche de haute qualité<sup>161</sup>. Elle révèle le type particulier de mathématiques qui sont travaillées à la faculté de Montpellier ainsi que le rôle de Turrière. Ce dernier apparaît comme un animateur d'une recherche particulièrement appliquée à la fin des années 1930.

L'analyse des introductions des doctorats soutenus en province révèle la vie des différentes facultés de province, le type de mathématiques et le type de recherche qui s'y fait.

La faculté de Strasbourg se distingue pendant les années 1920. L'investissement qui y est fait correspond à une revanche à prendre sur les Allemands après la première guerre mondiale et à une volonté politique. Cette université, nouvellement française, a ainsi pour vocation de concurrencer les universités allemandes et d'être un modèle de l'excellence française. Des thèses de qualité y sont soutenues avec la participation de professeurs parisiens dans les jurys. Elle apparaît comme un écho de Paris en province.

---

160. Non seulement Sisowath, dans la citation précédente utilise le terme de « direction », mais il précise également à un autre endroit de son avant-propos, les conditions de réalisation de son mémoire, SISOWATH 1941, p. 12 :

« Dans cette tâche, il nous guide et nous aide de toute son expérience et de toute sa lumière malgré ses propres occupations, contrôle et critique nos résultats avec une bonté et une patience sans réserve. »

De même Hourfar « remercie affectueusement [son] professeur de [l'] avoir autorisé à prendre ce sujet de travail et d [l']avoir encouragé et dirigé dans [ses] propres travaux. », cf. HOURFAR 1939, p. 5.

161. Selon Hélène Gispert dans GISPERT 1991, p. 82, ce type de thèse disparaît pratiquement dans les années 1890.

Dans les années 1930, l'augmentation du nombre de doctorats soutenus en province traduit une dynamique institutionnelle de développement de la recherche en province.

L'investissement de la faculté de Poitiers, à partir des années 1930, répondrait ainsi à une volonté de décentralisation des mathématiques françaises. Des mathématiciens brillants n'y sont pas artificiellement nommés comme à Strasbourg. Il est seulement décidé de maintenir en place un mathématicien qui y occupe déjà une chaire, Georges Bouligand. Ce dernier anime et organise une vie scientifique à la faculté de Poitiers pendant toute la décennie. Ses travaux sont à l'origine d'une dynamique de recherche qui dépasse les frontières de Poitiers et s'étend jusqu'à Paris.

Une dynamique locale, centrée sur les travaux d'un mathématicien, Émile Turrière, se développe à la fin des années 1930 à Montpellier. Cependant Turrière n'est pas Bouligand, et ses travaux à l'origine de cette dynamique sont des travaux de géométrie, appliqués à l'industrie et à la marge des sujets parisiens.

Enfin les thèses soutenues à la faculté de Lyon, tout au long de l'entre-deux-guerres, sont révélateurs d'une dynamique provinciale, enracinée depuis l'avant-première guerre mondiale dans les institutions locales, comme l'Observatoire, avec des théories locales, en astronomie essentiellement.



## Chapitre 4

# Les thèses en arithmétique/algèbre et en géométrie : le deuxième niveau de l'analyse

### Sommaire

4.1	Un point de méthode . . . . .	142
4.2	L'arithmétique et l'algèbre . . . . .	152
4.3	La géométrie . . . . .	169
4.4	Conclusion générale . . . . .	223

Le premier niveau de l'analyse du corpus des thèses d'État en sciences mathématiques a mis en évidence le rôle de la faculté des sciences de Paris. Les thèses qui y sont soutenues sont représentatives de l'ensemble des doctorats du corpus. Dans les facultés de province, au contraire, comme l'a montré le chapitre précédent, les thèses sont le plus souvent organisées autour d'un thème précis ou d'une personne spécifique. Dans ce qui suit, je me bornerai désormais aux thèses parisiennes.

Le premier niveau de l'analyse a aussi permis d'étudier les équilibres entre les domaines des sciences mathématiques que sont l'« arithmétique et l'algèbre », la « géométrie », l'« analyse », les « mathématiques appliquées », le « calcul des probabilités » et la « théorie des ensembles ». Il s'agit maintenant de considérer certains de ces domaines. Pour chacun d'entre eux, l'axe de l'analyse est centré sur le domaine et l'échelle d'observation augmentée.

Pour étudier le corpus à ce deuxième niveau de l'analyse, je considère les rapports des thèses classées dans le domaine considéré, ainsi que les introductions ou avant-propos des mémoires. Le premier type de document est écrit par un chargé de cours ou professeur de la faculté des sciences de la Sorbonne, le second par le doctorant lui-même. Les deux types de documents ont comme premier objet la description globale du

contenu mathématique. Les auteurs (des rapports ou des thèses) précisent parfois dans quel contexte mathématique est écrit le mémoire et mentionnent quels sont les travaux mathématiques et quels sont les mathématiciens qui sont à l'origine du mémoire ou auxquels ils se réfèrent. À ce titre, les avants-propos et les rapports comportent de nombreuses ressemblances. Ils permettent une première connaissance du contenu mathématique des thèses<sup>1</sup>. Les différences principales entre les deux documents tiennent d'une part au jugement que formule le rapporteur, qu'on ne peut trouver émis par le doctorant. Elles se trouvent d'autre part dans les références parfois explicites que fait le doctorant. Il arrive également que ce dernier explique l'origine de son travail et explicite les influences particulières de mathématiciens sur sa recherche. Il est rare que les rapports de thèses fournissent de telles informations.

Un deuxième niveau de l'analyse est appliqué dans la présente thèse à plusieurs domaines. Le bref bilan de l'historiographie de l'entre-deux-guerres, tel que je l'ai rappelé dans mon introduction, a mis en évidence comment l'historiographie des mathématiques pures s'est constituée à partir de la « mémoire collective » d'un groupe d'acteurs de cette période : les membres de Bourbaki. J'ai aussi indiqué que la reconstruction des souvenirs soulève certains problèmes quant à l'image ainsi produite de la période. L'idée est ici de réévaluer cette image en l'étudiant à l'aide d'un corpus qui ne dépend pas du témoignage des acteurs.

Dans cette historiographie, le domaine de l'« arithmétique et l'algèbre » a un statut particulier : il est décrit comme inexistant avant sa création par les membres de Bourbaki. Quant à la « géométrie », elle est peu, voire nullement, évoquée : elle apparaît comme un domaine absent. Le quatrième chapitre de la présente thèse est ainsi consacré à l'analyse au deuxième niveau des thèses classées dans ces deux domaines.

Avant d'exposer les résultats de cette analyse, il s'agit de préciser quelques points de la méthode utilisée pour étudier le corpus à cette deuxième échelle<sup>2</sup>.

## 4.1 Un point de méthode

L'étude des corpus des rapports de thèses et des introductions des mémoires se déroule en plusieurs étapes.

Je considère tout d'abord l'ensemble du corpus relatif à un domaine de premier niveau de mot-clé. Si un deuxième niveau de mot-clé existe pour ces domaines, je regroupe, dans un premier temps, les mémoires suivant leur classement dans les domaines de deuxième niveau de mot-clé. Comme je l'ai déjà expliqué dans le deuxième

1. Par ailleurs, on peut signaler qu'ils sont en général d'une taille à peu près comparable. Les rapports sont en moyenne de deux ou trois pages. Les introductions ont une taille légèrement supérieure, la moyenne étant autour de quatre pages.

2. Cette méthode peut être appliquée à l'ensemble des domaines des sciences mathématiques, et non uniquement à ceux que je considère dans cette présente thèse.

chapitre, la construction de ces sous-domaines et le classement des mémoires sont fondés principalement sur la structure du répertoire bibliographique, le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, ainsi que sur le recensement qu'il fait des thèses<sup>3</sup>.

Dans le cadre de cette partie, je considère ainsi un ensemble de 14 mémoires en « arithmétique et en algèbre ».

Pour les thèses de « géométrie », je réparties les 41 mémoires dans les sections suivantes : « géométrie différentielle » (23), « géométrie algébrique » (9), « topologie » (6) et « géométrie analytique » (3)<sup>4</sup>. Parmi ces 41 mémoires, 10 ne sont pas directement référencés par le *Jahrbuch*. Suivant la méthode de classement décrite dans la partie n°2.3.2, 7 ont été classées dans la rubrique « géométrie différentielle », deux dans la rubrique « géométrie algébrique » et un dans la rubrique « géométrie analytique ».

Je considère ensuite les rapports et les introductions thèse par thèse. L'étude de ce corpus repose sur la grille de questions suivantes : quelle est la thématique principale du mémoire, quels sont les sujets travaillés et quels problèmes sont étudiés ? Quels sont les objets et les notions mathématiques que manipulent et qu'étudient les doctorants, quelles sont les théories et les méthodes qu'ils utilisent, quels principaux résultats essaient-ils de démontrer ? Quels sont les travaux de mathématiciens et les mathématiciens qui sont cités ? Quels sont les travaux qui sont évoqués par les étudiants comme essentiels pour l'élaboration de leur travail ? Quelles sont les publications qui sont à l'origine de leur recherche ? Quels sont donc les mathématiciens qui ont pu exercer une influence sur les travaux présentés dans la thèse ?

Une fois les rapports et les avant-propos analysés, je mets en perspective l'ensemble des réponses obtenues à cette liste de questions. Je regarde l'évolution des thèmes, des sujets, des méthodes et des références mathématiques parmi les doctorats de l'entre-deux-guerres. D'après les introductions et les rapports, quels sujets apparaissent, disparaissent ? Quelles méthodes paraissent s'imposer parmi les doctorants ? Peut-on remarquer des évolutions brusques de ces thèmes ? Peut-on constater des évolutions similaires parmi les méthodes utilisées, parmi les citations d'ouvrages mathématiques que font les doctorants dans leur avant-propos ? Ces évolutions concernent-elles un nombre important de mémoires ? Des sujets particuliers et des influences spécifiques paraissent-elles se dégager ? Certains thèmes sont-ils repris et retravaillés successivement dans plusieurs thèses ? Observe-t-on des réseaux de citations communs à plusieurs mémoires ?

L'objectif est ainsi de saisir certaines dynamiques de recherches mathématiques : des dynamiques entre thèses mais également des dynamiques révélées par les interactions réciproques entre les thèses et l'ensemble du milieu mathématique.

---

3. Cf. la partie n°2.3.2, p. 89.

4. Les chiffres entre parenthèses désignent le nombre de mémoires classés dans les sections.



Il ne s'agit pas uniquement de regarder les dynamiques internes à des sous-domaines des sciences mathématiques. L'étude des notions mathématiques utilisées, des théories employées, des références citées par les doctorants révèle les interactions entre les domaines et sous-domaines des sciences mathématiques. Dans le cas de la géométrie, par exemple, il est intéressant d'étudier les interactions possibles entre les différents domaines tels ceux entre la géométrie différentielle et la géométrie algébrique, la géométrie différentielle et la topologie, la géométrie algébrique et l'algèbre, la géométrie différentielle et l'analyse, etc.

En même temps, il n'est pas question d'écrire une histoire des différents domaines considérés à partir de cette seule analyse au deuxième niveau, seulement d'examiner comment ces différents domaines sont abordés dans les thèses d'État françaises. Mais cette étude permet néanmoins de mettre en évidence certaines dynamiques de recherche à partir des doctorats, comme nous le verrons.

Le corpus des rapports de thèses permet également de connaître la composition exacte des jurys de thèses et notamment les mathématiciens qui occupent les fonctions de présidents et de rapporteurs. Parallèlement à l'analyse des contenus, il est alors intéressant de comparer l'ensemble des présidents et des rapporteurs de thèses à l'ensemble des mathématiciens cités par les doctorants. Dans quelle mesure l'existence ou non de liens entre les jurys et les thèses elles-mêmes est-elle significative d'une interaction intellectuelle entre les doctorants et le personnel de l'enseignement supérieur de la faculté de la Sorbonne ? Que peut-on alors en déduire sur le poids institutionnel et intellectuel des mathématiciens membres de jurys de thèses ?

### Quelques biais engendrés par le corpus

La grille de lecture et les réponses aux questions posées sont fournies par un corpus particulier, celui des rapports et des avant-propos de thèses. Ce corpus particulier a certaines caractéristiques importantes dont il faut avoir conscience pour interpréter les résultats fournis par son analyse<sup>5</sup>.

En effet, les rapports de thèses constituent des comptes-rendus informés du travail mathématique effectué par le doctorant. Le niveau des informations fournies dépend de l'auteur du rapport. Suivant la compréhension qu'a celui-ci du contenu du mémoire, suivant sa volonté d'en rendre compte plus ou moins précisément, suivant la vision qu'il a du domaine mathématique auquel appartient le doctorat, les informations qu'il fournit peuvent différer. En outre, les jugements que le rapporteur formule sur la qualité

---

5. Les biais que je présente ici relativement à l'utilisation du corpus des avant-propos et des rapports restent encore valables au troisième niveau de mon analyse. Ils s'appliquent ainsi dans le cadre de cette présente thèse aux doctorats de théorie des fonctions et de théorie des probabilités. Les exemples que je prendrai pour discuter notamment de la question des remerciements sont ainsi inspirés par ces différents corpus.

du mémoire et sur l'importance de ses résultats dépendent de la connaissance du rapporteur et de sa capacité à mettre en perspective le travail du doctorant par rapport à l'ensemble des recherches mathématiques au moment de la soutenance. Chaque rapporteur a ainsi son propre style. Des mathématiciens comme René Garnier, Élie Cartan, Claude Guichard, Georges Valiron et Arnaud Denjoy feront ainsi les rapports les plus détaillés sur les résultats présentés par les doctorants. Ils les décrivent très précisément en ne formulant que peu de jugements. Dans la plupart des cas, ils exposent même les contenus de chaque chapitre et chaque partie du mémoire. D'autres, tels Paul Montel, Maurice Fréchet, Georges Darmon, Ernest Vessiot feront également des rapports très détaillés tout en étant un peu moins précis et en décrivant moins chaque résultat mathématique obtenu. Certains, comme Émile Picard ou Émile Borel, présenteront enfin les travaux de façon plus ramassée en indiquant plus généralement le ou les principaux résultats obtenus par le doctorant et à quelle(s) question(s) mathématique(s) leur travail se rapporte.

Pour les domaines que je considère dans le cadre de cette quatrième partie, l'ensemble des rapports des thèses constitue cependant, pour chaque domaine considéré, un bloc relativement homogène. En effet, comme je le montrerai, peu de mathématiciens sont impliqués dans l'écriture des rapports de thèses en arithmétique et en algèbre<sup>6</sup>. C'est encore plus vrai en géométrie où Élie Cartan écrit au moins 20 des 41 rapports de ce domaine<sup>7</sup>. Pour les deux domaines, les filtres de lecture identifiés seront donc ceux de René Garnier en arithmétique et en algèbre et ceux de Guichard et Cartan en géométrie. C'est selon leur vision que sont révélés les résultats importants obtenus par les doctorants.

Savoir quels sont les travaux mathématiques qui ont influencé l'auteur d'une thèse dépend de la manière dont le doctorant a écrit son introduction et de la volonté de ce dernier à citer et à reconnaître les influences diverses dont il s'est inspiré. Le corpus des avant-propos que j'ai ici réuni est à cet égard très hétérogène : entre les différents doctorants d'arithmétique et d'algèbre et ceux de géométrie, certains citent précisément les ouvrages auxquels ils se réfèrent, ceux qui sont à l'origine de leur travail et fournissent

---

6. À part René Garnier (6), tous les autres ne rapportent que sur un seul ou sur deux mémoires : Émile Picard (2), Georges Humbert (1), Élie Cartan (1), Paul Montel (1), Arnaud Denjoy (1), Georges Valiron (1), Albert Châtelet (1).

7. Élie Cartan écrit donc 20 rapports (13 en géométrie différentielle, 6 en géométrie algébrique, 1 en topologie). Viennent ensuite Claude Guichard (7 rapports dont 6 en géométrie différentielle et 1 en géométrie analytique et synthétique), Ernest Vessiot (1 rapport en géométrie différentielle), René Garnier (2 : 1 en géométrie différentielle et 1 en géométrie algébrique), Denjoy (1 en géométrie différentielle), Picard (1 en géométrie analytique et synthétique), Henri Cartan (1 en géométrie algébrique), Georges Bouligand (1 en géométrie analytique et synthétique), Émile Borel (1 en Topologie), Maurice Fréchet (1 en Topologie) et Paul Montel (1 en Topologie). Comme je l'ai déjà expliqué précédemment la différence entre le nombre de rapports et le nombre de mémoires provient de l'absence de certains rapports, déclarés manquants, aux Archives nationales. Comme je l'indiquerai dans les deux derniers chapitres de la thèse, l'homogénéité des rapports se retrouve globalement pour les thèses de théorie des fonctions et également pour les thèses en calcul des probabilités.

parfois une bibliographie. On peut citer par exemple Robert Potier, *Sur certaines questions de géométrie conforme*, 1940, ou encore un étudiant normalien, Octave Galvani, *Sur la réalisation des espaces ponctuels à torsion en géométrie euclidienne*. D'autres doctorants ne citent que peu, voire pas du tout d'ouvrages mathématiques : c'est le cas par exemple de Pierre Boos, lui aussi normalien, *Propriétés de courbes et de surfaces*, 1936.

### La question des remerciements

Les citations de mathématiciens que font les doctorants dans leur introduction n'ont pas toutes les mêmes rôles. Il y a tout d'abord les références à des publications. Le doctorant cite alors explicitement certains résultats, certaines théories du mathématicien qu'il utilise.

Il faut ensuite distinguer les mathématiciens auxquels le doctorant adresse divers remerciements à la fin de son introduction<sup>8</sup>.

Ces remerciements prennent différentes formes. Suivant le public concerné par l'expression de « gratitude » et les formulations de ces remerciements, leur interprétation peut varier. Ils fournissent ainsi une information dont il est difficile de saisir la portée.

Il y a tout d'abord les remerciements formels, ceux qui sont adressés presque systématiquement au rapporteur de la thèse dans tous les mémoires contenant une introduction. Signalons que l'expression de gratitude envers le président du jury ou les autres examinateurs du jury n'est, elle, en général pas systématique. Ces remerciements sont formulés à peu près de la même façon dans tous les manuscrits. On peut citer par exemple les remerciements qu'adresse Henri Cartan à Paul Montel à la fin de l'introduction de son doctorat, CARTAN 1928, p. 4 :

« Qu'il me soit permis de remercier Paul Montel de l'intérêt qu'il m'a toujours témoigné ; j'espère avoir tiré profit, dans la rédaction de ce travail, de ses conseils et de ses critiques amicales, et je lui exprime ici toute ma respectueuse reconnaissance ».

Pourtant comme je le montrerai dans la partie suivante (Chapitre 5), les travaux de Paul Montel ne constituent pas le coeur du travail d'Henri Cartan. S'il les évoque, c'est pour rappeler ce qui a été fait avant lui, alors qu'il fonde ses recherches sur les travaux de Nevanlinna et d'André Bloch.

---

8. La présence de tels remerciements n'est cependant pas systématique. Certains des mémoires n'ont qu'une introduction purement mathématique ou débute directement par un premier chapitre. On peut ainsi citer par exemple certains mémoires de géométrie, notamment ceux qui sont soutenus au début de la période, tels par exemple ceux de Besserve, *Le cercle et les surfaces cerclées en géométrie conforme*, 1915, et d'Agnell, *Géométrie infinitésimale vectorielle*, 1919.

Parmi les thèses de géométrie on peut également citer les remerciements qu'adresse Pierre Boos à la fin de son introduction à divers mathématiciens dont René Garnier le rapporteur du mémoire, cf. BOOS 1936, p. 5 :

« En terminant cette introduction, je tiens à exprimer ma très vive reconnaissance à M. Julia qui a bien voulu présenter à l'Académie les principaux résultats contenus dans ce travail, à tous les Maîtres qui m'ont formé pendant mon passage à l'École normale et tout spécialement à M. Garnier qui a encouragé, conseillé et vérifié ces recherches. J'adresse des remerciements très sincères à M. Picard pour la grande joie qu'il me fait d'accueillir ce Mémoire aux *Annales de l'École normale*, ainsi qu'à M. Valiron qui veut bien se joindre à M. Julia et à M. Garnier pour constituer le jury ».

Quand le rapporteur n'a pas d'intérêts de recherches proches de ceux du doctorant, on ne peut rien conclure quant au rôle joué par le mathématicien remercié. Le cas n'est pas isolé, comme le montrent les exemples d'Henri Cartan ou de Pierre Boos évoqués ci-dessus. On peut également citer le cas d'André Weil. René Garnier ne travaille pas sur les sujets abordés par Weil dans sa thèse, l'« arithmétique sur les courbes algébriques ». Pourtant le doctorant conclut son introduction en lui adressant une certaine reconnaissance : « j'ai reçu de MM. Garnier, Siegel, van der Waerden, des avis précieux au cours de la rédaction de ce travail : qu'il me soit permis de les remercier ici. », WEIL 1928, p. 6. De plus certains témoignages viennent à l'encontre de ce qui est affirmé dans les remerciements<sup>9</sup>. Ainsi Szolem Mandelbrojt écrit : MANDELBROJT 1923, p. 5 :

« Mais je suis surtout reconnaissant à mon cher maître, M. Paul Montel, qui s'est intéressé très vivement à mes recherches, m'a donné des conseils très précieux et m'a consacré beaucoup d'heures pour suivre mes démonstrations et faire des remarques très utiles. »

Les souvenirs rapportés par son neveu en 1970<sup>10</sup> mettent en doute l'importance de cette reconnaissance. En effet, Szolem Mandelbrojt y donne comme raison à sa rencontre avec Paul Montel le poste de « directeur des recherches scientifiques » que ce dernier occupait au sein de la faculté des sciences de Paris au moins au début des années 1920 (je n'ai d'ailleurs trouvé nulle part ailleurs mention de l'existence d'une telle charge). L'étudiant qu'est Szolem Mandelbrojt rencontre à deux reprises Paul Montel pour lui exposer les résultats de ses recherches. Paul Montel lui affirme alors qu'il a suffisamment de résultats pour présenter une thèse et quelques notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* et la soutenance est entendue.

9. Ceci s'applique d'ailleurs pour le cas de Weil et de Garnier, voir WEIL 1991, p. 58 : « il ne remarqua pas quelques lacunes dans les démonstrations, mais me donna d'utiles conseils pour les virgules ».

10. Cf. MANDELBROJT 1985, p. 12-13.

Ces remerciements formels concernent également dans certains doctorats les autres membres du jury. Ils traduisent en fait l'appartenance du doctorat à une institution, la faculté des sciences de Paris<sup>11</sup>, ainsi que leur appartenance à une branche disciplinaire de cette institution. En effet, parmi les mathématiciens remerciés se trouvent en règle générale des spécialistes d'un même domaine des mathématiques<sup>12</sup>. Si on prend l'exemple des thèses de théorie des fonctions, les mathématiciens remerciés dans ce cadre par les doctorants peuvent tous être considérés comme des analystes. C'est également le cas pour une partie des thèses en arithmétique et en algèbre, ainsi que pour celles en géométrie. Sont également remerciés dans les introductions des mathématiciens au poids institutionnel fort à la faculté des sciences et dans le milieu mathématique. Dans les thèses classées dans les deux domaines de l'arithmétique et de l'algèbre, on remarque que la part des remerciements institutionnels est plus importante. Émile Picard occupe fréquemment la fonction de président de jury des thèses de ces domaines et se trouve ainsi formellement remercié de sa présence à ce poste par les doctorants. Sa présence apparaît ainsi significative du peu de forces mathématiques françaises engagées dans ces domaines, ce qui nécessite un recours aux mathématiciens institutionnellement reconnus pour composer un jury.

Une deuxième forme de remerciements est plus difficilement interprétable. Il s'agit de remerciements touchant un public plus vaste que celui des membres de jury et plus vaste également que l'ensemble du corps professoral de la faculté de la Sorbonne. Certains mathématiciens étrangers auprès desquels les étudiants ont collaboré se trouvent ainsi remerciés. Par exemple, Jean Favard remercie Harald Bohr auprès duquel il vient de passer une année à l'université de Copenhague grâce à une bourse Rockefeller<sup>13</sup>. De même, René de Possel pour sa thèse sur des questions de représentation conforme adresse des remerciements uniquement à Constantin Carathéodory auprès de qui il vient de passer quelque temps grâce à une bourse Rockefeller attribuée par la Natural Science Division, SIEGMUND-SCHULTZE 2001, p. 289-301<sup>14</sup>. Rauch, quant à lui, adresse à Valiron des remerciements plus poussés que ceux habituellement destinés au rapporteur d'une thèse pour son mémoire de théorie des fonctions de la variable complexe<sup>15</sup>.

---

11. Voir à ses règles de politesse.

12. Même si les limites de ce dernier ne sont pas toujours déterminées.

13. « Je ne saurais terminer cette Introduction sans adresser mes remerciements à M. le professeur Harald Bohr pour l'intérêt qu'il a voulu porter à mes recherches, l'aide bienveillante et les nombreux conseils qu'il m'a toujours donnés. », cf. FAVARD 1927, p. 16.

14. Cf. DE POSSEL 1932, p. 2 :

« Qu'il me soit permis de remercier tout simplement M. C. Caratheodory, pour ses conseils si précieux et pour la bonne grâce avec laquelle il m'a constamment guidé dans l'accomplissement de ce travail. »

15. Cf. RAUCH 1933, p. 7 :

On peut également rajouter l'exemple de Dubourdieu qui à la fin de son introduction remercie « M. Blaschke pour l'amabilité avec laquelle il a dirigé [ses] recherches »<sup>16</sup>.

Dans ces différents cas, la formulation n'est plus aussi formelle que celle énoncée précédemment, même quand elle concerne des membres de jurys. Il faut cependant s'interroger sur l'interprétation qu'elle permet du milieu et du réseau d'influences, propres à chaque doctorant. L'exemple de Jacqueline Ferrand<sup>17</sup> apporte un démenti à toute conclusion hâtive qu'on pourrait formuler à la lecture de ces remerciements. Cette dernière adresse à la fin de l'introduction de son doctorat des remerciements assez poussés à Arnaud Denjoy<sup>18</sup>. Pourtant lors de l'entretien qu'elle m'a accordé en novembre 2006, cette dernière restreint l'importance du rôle joué par Arnaud Denjoy dans ses recherches sur des problèmes de représentation conforme au voisinage des frontières du domaine. Elle l'aurait vu avant de commencer son doctorat. Il se serait alors simplement contenté de lui communiquer plusieurs tirés à part, sur lesquels elle s'est ensuite fondée pour élaborer, seule, son mémoire.

Si on ne peut généraliser le statut de ces remerciements, ils sont cependant la marque de l'appartenance à un réseau de mathématiciens dans lequel s'inscrit le doctorant. Pour reprendre le cas de Jacqueline Ferrand, sa citation fait apparaître Arnaud Denjoy comme l'un des mathématiciens français spécialistes des questions de représentation conforme. C'est lui qui lui fournit un sujet d'étude en lui indiquant des ouvrages à consulter. Il joue le rôle de filtre aux principaux travaux cités par la doctorante, même s'il n'est l'auteur d'aucun d'entre eux comme je le montrerai. La recherche de Jacqueline Ferrand s'inscrit alors dans les travaux travaillés par un réseau de mathématiciens auquel appartient également Arnaud Denjoy.

Plus généralement, les deux formes de remerciements explicitées ci-dessus traduisent une volonté de la part des doctorants de se placer sous le patronage de mathématiciens plus confirmés. On peut alors formuler certaines hypothèses sur les raisons de tels remerciements. Ils seraient la marque effective d'un rôle réel exercé par le mathématicien dans l'élaboration du travail de thèse. Ils seraient également les marques du processus de sociabilisation du doctorant envers le milieu qu'il cherche à intégrer. Leur

---

« Qu'il me soit permis pour terminer cette introduction d'exprimer ici-même toute ma reconnaissance à M. Valiron qui a inspiré et dirigé ce travail et auprès de qui j'ai trouvé une aide constante. »

16. Cf. DUBOURDIEU 1929, p. 3. Précisons que Dubourdieu est comme René de Possel ou Jean Favard un boursier de la fondation Rockfeller. Il a au cours de l'année 1927-1928 bénéficié d'une bourse de l'IEB (International Educational Board de la Fondation Rockefeller) et a passé 10 mois à Hambourg auprès de Blaschke, cf. SIEGMUND-SCHULTZE 2001, p. 288-301.

17. Et il n'est pas le seul.

18. Cf. FERRAND 1942a, p. 6 :

« Je dois remercier très spécialement M. Denjoy qui m'a suggéré le sujet de cette étude et n'a cessé de m'encourager. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma gratitude. »

visée serait enfin stratégique : se placer sous le patronage de mathématiciens reconnus par le milieu mathématique et à fort poids institutionnel faciliterait l'obtention future de postes dans l'enseignement supérieur.

Une troisième forme de remerciements est liée à l'histoire personnelle des étudiants. Elle fournit quelques renseignements sur les doctorants, renseignements que j'ai comparés avec d'autres sources quand cela était possible. Ces renseignements permettent d'une part d'obtenir des informations sur le doctorant. D'autre part, ils permettent de mieux saisir le contexte dans lequel s'élaborent certains doctorats : le contexte social et institutionnel, ce qui donne des indications sur le milieu mathématique de l'époque.

On distingue différents cas.

Il y a tout d'abord le cas de certains étudiants étrangers. Ceux-ci adressent souvent des remerciements aux personnes qui les ont aidés pendant leur séjour en France ou avec qui ils ont été en contact lors de cours ou de séminaire. C'est le cas notamment de King-Lai Hiong, étudiant de nationalité chinoise venu étudier et soutenir un doctorat à Paris avant de repartir enseigner en Chine. Ce dernier remercie à la fin de son introduction Henri Villat et Pierre Humbert alors que ceux-ci travaillent essentiellement sur des sujets de mécanique des fluides (dans le cas d'Henri Villat) ou d'astronomie (pour Pierre Humbert)<sup>19</sup>. Ces remerciements semblent correspondre à l'expression d'une reconnaissance pour l'aide matérielle qu'ils lui ont apportée ou qu'ils ont contribué à lui obtenir pour effectuer son séjour en France. La taille de tels remerciements varient suivant les mémoires. De quelques phrases à la fin d'une introduction, ils peuvent constituer un avant-propos dans le cas de la thèse de Lucien Hibbert en 1937, HIBBERT 1937. Ce dernier y remercie un certain nombre de mathématiciens alors que les travaux de plusieurs d'entre-eux, comme les travaux de Darmon, n'ont rien en commun avec sa thèse qui porte sur l'univalence et l'automorphie de certaines fonctions de la variable complexe<sup>20</sup>.

---

19. Même si ce dernier a également publié quelques travaux sur les fonctions elliptiques, les fonctions de Lamé et les fonctions elliptiques, cf. [http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Humbert\\_Pierre.html](http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Humbert_Pierre.html).

20. Lucien Hibbert écrit notamment, HIBBERT 1937, Avant-propos :

« Et comment dire tout ce que je dois à Monsieur Georges Darmon dans le domaine de la statistique mathématique et la connaissance du milieu français dans la finesse de sa culture. »

« Monsieur Arnaud Denjoy, dont la chaude amitié a rendu moins amère pour moi la pénible nécessité de vivre loin des miens, outre tout ce que l'extension de mes connaissances mathématiques doit à sa conversation de savant extrêmement original et si profond, s'est attaché à me faire connaître la vraie figure, solide, cultivée, modeste, toute de finesse et de nuance, d'intelligence et de capacité de la France intellectuelle. Je l'en remercie du plus profond de moi-même. »

On ne trouve cependant pas de tels exemples parmi les doctorants en géométrie ou en arithmétique et algèbre : la part d'étudiants étrangers y est plus faible et ils ne donnent aucun témoignage en ce sens.

Il y a également le cas d'étudiants ayant eu un parcours universitaire particulier, à la suite des conséquences de la première guerre mondiale ou d'autres conflits, tels que la révolution russe<sup>21</sup>. Le cas d'Henri Milloux illustre cet exemple. Ce dernier a fait toute sa scolarité à l'université de Lille, notamment pendant l'occupation allemande de la première guerre mondiale. Les remerciements qu'il écrit à la fin de l'introduction de sa thèse et la dédicace qu'il adresse à la mémoire du professeur Gustave Demartres, témoignent de l'importance du dévouement du personnel des facultés pendant le conflit. Ils mettent en évidence la reconnaissance que continue à vouer le milieu mathématique à ses membres qui se sont dévoués pendant la première guerre mondiale, même six ans après la fin du conflit. Henri Milloux écrit ainsi à la fin de l'introduction de sa thèse, MILLOUX 1924a, p. 3 :

« Qu'il me soit permis d'exprimer toute la reconnaissance que j'ai contractée envers MM. les professeurs de l'université de Lille, pendant et après la dure occupation allemande, et envers MM. les professeurs de l'université de Paris, qui, en réservant une bourse à un étudiant venu d'une autre université, lui ont permis de réaliser son but. »

Les informations apportées par ce remerciement sont confirmées par d'autres sources. Borel lors de la soutenance du doctorat d'Henri Milloux, le 28 novembre 1924, rappelle ses conditions d'études à Lille et le dévouement du corps professoral et notamment celui de Demartres. En témoigne en outre une lettre écrite peu après par Jean Chazy, alors professeur de calcul différentiel et intégral à la faculté des sciences de Lille<sup>22</sup>.

21. C'est le cas par exemple de Riabouchinski pour sa thèse en mécanique des fluides.

22. Cf. POURPRIX 2000?, Chapitre 3 :

« Lille, le 4 Décembre 1924.

Mon cher Doyen,

Le 28 Novembre dernier, M. Henri Milloux, qui cette année supplée M. Chapelon parmi nous, a soutenu sa thèse en Sorbonne, et a été reçu docteur avec la mention très honorable. En souvenir du dévouement que M. Milloux a rencontré chez les professeurs de notre faculté pendant l'occupation allemande et surtout chez notre regretté collègue Demartres, le jury parisien, présidé par M. Borel, m'a fait l'honneur de m'inviter à siéger à côté de lui pendant cette soutenance de thèse. Nous savons tous comment pendant la guerre Demartres n'a pas continué ses cours habituels d'analyse et de géométrie qui auraient eu trop peu d'auditeurs, et en l'absence de Clairin mobilisé et d'ailleurs tué dès les premiers jours de la guerre, comment Demartres a pris la charge d'un enseignement plus élémentaire de mathématiques générales et de mathématiques spéciales qui pût s'adresser au plus grand nombre possible d'étudiants et d'étudiantes. Cet enseignement a permis notamment à un certain nombre de jeunes gens d'entrer presque de suite à la libération à l'École polytechnique, à l'École navale, à l'École des postes et télégraphes, et a permis à Milloux, qui avait quinze ans en 1914 de posséder en 1919 les certificats de la licence de mathématiques. Même en faisant abstraction de l'effet moral d'un bel exemple d'énergie en ces tristes circonstances, l'on peut dire que, sans l'effort d'enseignement réalisé par Demartres, la carrière et la vie de Milloux et de tous ces jeunes gens, auraient été changées, retardées, presque sûrement diminuées. M. Borel, qui lui-même était ici maître de conférences de mathématiques il y a trente années, alors que Demartres était



Les rapports et les introductions ont ainsi pour caractéristique commune d’être écrits par des acteurs de l’époque (rapporteurs et doctorants). Ces auteurs imposent leur propre filtrage sur la vision des sciences mathématiques qu’ils décrivent, sur les résultats qu’ils estiment importants, sur les liens entre différentes théories qu’ils mettent en valeur. De même ce filtrage s’applique sur les informations qu’ils communiquent au sujet du déroulement du doctorat, des influences diverses que le doctorant a suivies, de son insertion dans le milieu mathématique de l’époque. L’analyse des rapports et des introductions est donc dépendante des filtres de connaissance et des filtres d’écriture des auteurs de ces documents.

Ces filtrages sont inhérents au corpus étudié. La mise en perspective de l’ensemble du corpus d’un domaine permet en partie d’atténuer les effets individuels des filtrages. En effet, l’analyse ne se réduit pas à l’étude d’une seule thèse. Pour chaque domaine considéré, elle est réalisée de façon systématique pour l’ensemble des doctorats classés dans ce domaine. Cette analyse et la mise en perspective des réponses à la grille de questions permet alors de mettre en évidence certaines influences, communes à plusieurs mémoires, certains sujets fréquemment abordés et ainsi certaines dynamiques de recherche.

## 4.2 L’arithmétique et l’algèbre

L’étude des rapports et des avant-propos des doctorats référencés en arithmétique et algèbre met en valeur deux dynamiques de recherche distinctes parmi les sujets abordés dans ce domaine.

L’étude des références utilisées par les doctorants révèle tout d’abord une influence de travaux français et allemands (Hermite, Poincaré, Humbert, ainsi que Fricke et Klein) pour un premier ensemble de quatre mémoires. Ce premier ensemble se caractérise en outre par un thème commun, l’étude des formes. Soutenues entre 1914 et 1926, ces quatre thèses sont les seules du domaine de l’« arithmétique et de l’algèbre » à être soutenues dans cet intervalle.

Un second groupe de sept doctorats se constituent autour de références à des mathématiciens allemands tels Emmy Noether, Van der Waerden, etc. Ce second groupe

---

déjà professeur de calcul différentiel et intégral, a rappelé publiquement à la soutenance de thèse de Milloux que notre ancien collègue a fait pendant la guerre à l’égard des étudiants plus que son devoir. J’ai été fier d’être associé comme représentant la faculté des sciences de Lille à cet hommage rendu à la mémoire du professeur dont j’ai été le dernier maître de conférences et dont je suis le successeur aujourd’hui. Mais l’hommage qui m’a été fait ne s’attache pas à ma personne : il va à chacun de mes collègues, et surtout à ceux qui, pendant les jours sombres de l’occupation aux côtés de Demartres et du doyen Damien, ont été animés du même dévouement.

Chazy »

se caractérise par l'utilisation du formalisme et de la terminologie empruntée à ces mathématiciens. Les thèmes abordés concernent exclusivement la théorie des idéaux. Plus aucune référence n'est faite aux travaux français sur l'étude des formes. Aucun mémoire n'aborde plus ce sujet. Les doctorats de ce second ensemble sont soutenus entre 1928 et 1944, c'est-à-dire pendant une période disjointe de la période de soutenance du premier ensemble.

Les deux dynamiques de recherche qui sont révélées par l'étude des thèses correspondent donc à deux périodes distinctes et consécutives entre 1914 et 1945. L'année 1928, marquée par la soutenance de la thèse d'André Weil, premier mémoire du second ensemble, apparaît alors comme une année de rupture pour les thématiques abordées dans les thèses d'arithmétique et d'algèbre.

À côté de ces onze travaux se trouvent trois autres doctorats qui n'appartiennent pas aux dynamiques mises en valeur précédemment. Deux doctorats ont des sujets qui se rapprochent davantage de thématiques de l'analyse. Un dernier doctorat, celui de Benneton, soutenu en 1943, ne se rapporte à aucun sujet précédemment traité. Il se distingue par l'ancienneté des travaux mathématiques auxquels il se réfère.

### 4.2.1 L'étude des formes

Les quatre premiers doctorats référencés en arithmétique et en algèbre se rapportent tous à des thématiques centrées autour de l'étude des formes et se réfèrent à un même ensemble de travaux français et allemands rédigés par Hermite, Poincaré, Humbert, Fricke et Klein.

Les trois premiers sont soutenus presque simultanément pendant la première guerre mondiale. En 1914, Got<sup>23</sup> étudie plus précisément certaines formes quadratiques ternaires à coefficients entiers et les groupes fuchsien arithmétiques. La même année, Chapelon<sup>24</sup> présente un travail sur des fonctions se rattachant à la théorie des formes quadratiques binaires. En 1917, Julia<sup>25</sup> étudie des formes binaires non quadratiques à indéterminées réelles ou complexes en leur associant des formes quadratiques positives<sup>26</sup>. Neuf années plus tard, en 1926, Le Corbeiller soutient une thèse intitulée *Contribution à l'étude des formes quadratiques à indéterminées conjuguées* où il s'intéresse notamment à l'étude des formes d'Hermite et de Dirichlet<sup>27</sup> dans différents corps.

Ces quatre premiers doctorats ont également comme caractéristique commune la présence de Picard comme président de leur jury. De plus, un lien particulier existe

---

23. Cf. GOT 1914.

24. Cf. CHAPELON 1914.

25. Cf. JULIA 1917.

26. à la suite d'Hermite, comme j'en reparlerai ultérieurement.

27. dont les définitions sont données dans LE CORBEILLER 1926, p. 7 et p. 8.

entre chacun des doctorants et Georges Humbert : un lien à la fois institutionnel et intellectuel.

Humbert est professeur au Collège de France jusqu'à l'année de sa mort, en 1921<sup>28</sup>. Il ne fait donc pas partie du corps professoral de l'université de la Sorbonne. Même si dans les décrets universitaires, rien n'interdit qu'un professeur extérieur à la faculté des sciences participe au jury en tant qu'examineur, l'usage n'en fait pas une pratique habituelle. Pourtant, Georges Humbert est membre du jury pour les trois premiers travaux, les seuls qui soient soutenus de son vivant. S'il n'est que simple examinateur pour les thèses de Got et Chapelon, il écrit le rapport de celle de Julia<sup>29</sup>. De plus Got, comme Chapelon, puis Le Corbeiller, en 1926, lui adressent une dédicace, au début de leur mémoire. Chapelon et Le Corbeiller vont jusqu'à utiliser le terme « maître » pour désigner le mathématicien<sup>30</sup>. Got se contente d'une dédicace plus formelle qu'il adresse à la fois à Picard et à Humbert. Mais l'influence d'Humbert sur le travail de l'étudiant est cependant clairement revendiquée à la fin de l'introduction<sup>31</sup>. En fait, seul Julia se distingue en n'exprimant pas explicitement de reconnaissance à Humbert<sup>32</sup>. Cependant, il a assisté à certains des cours de Humbert au Collège de France à partir de 1913<sup>33</sup> et a donc été en relation avec le mathématicien. De plus, dans son travail, il se réfère aux mêmes travaux mathématiques que les trois autres doctorants et travaille les mêmes notions et les mêmes outils mathématiques.

---

28. Cf. CHARLE et TELKES 1988.

29. Il s'agit en fait d'un rapport qu'écrit Georges Humbert pour l'Académie des Sciences à la suite de l'envoi par Julia de son travail au concours de 1917 pour le prix Bordin dont le sujet était le suivant : « Perfectionner en quelque point important la théorie arithmétique des formes non quadratiques », cf. JULIA 1917, p. 293. Julia l'obtiendra d'ailleurs deux jours avant la soutenance de son doctorat si l'on se réfère au rapport de soutenance écrit par Picard. Je ne suis cependant pas certaine de la fonction exacte occupée par Humbert pour le jury de la thèse de Julia. Si le rapport sur le mémoire est explicitement celui d'Humbert, Picard le reprend et signe à la suite de ce rapport, comme si, pour l'université, il était le rapporteur de la thèse.

30. Les citations sont respectivement les suivantes :

- « À mon maître Monsieur Georges Humbert, Hommage respectueux de son élève reconnaissant » pour Chapelon
- « À la mémoire de mon maître Georges Humbert » pour Le Corbeiller.

31. Got y écrit notamment qu'il lui doit « l'idée première de [son] travail », cf. GOT 1914, p. 4. Catherine Goldstein dans GOLDSTEIN à paraître affirme également que Got se situe dans l'« orbite directe » de Georges Humbert : il a participé avec lui à la traduction du rapport de Hilbert sur la théorie des corps de nombres algébriques paru en 1897 à l'intention de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung.

32. Julia écrit en fait une dédicace différente, qui diffère de celles généralement présentes en début de mémoire. Il l'adresse « à la mémoire de mes camarades de l'École normale supérieure tués à l'ennemi ». Cette différence peut s'expliquer par le contexte pendant lequel ce dernier élabore son travail : à l'hôpital, suite à la grave blessure qui l'a défiguré (cf. notamment DESFORGE 1979, p. 61). En outre il soutient sa thèse en 1917 alors que la première guerre mondiale n'est pas encore terminée.

33. Plus précisément, il a assisté à ces cours de 1913 à 1920, sauf en 1915 lorsqu'il est au front, comme le montre une liste de cours venant de Julia qui figure dans la notice nécrologique de Humbert ainsi qu'une présentation plus détaillée de Julia de ces cours dans le Fonds Borel de l'Institut Henri Poincaré, cf. GOLDSTEIN à paraître.

Charles Hermite est le mathématicien dont certains des travaux, même retravaillés depuis leur parution par d'autres, constituent la référence systématique des quatre doctorats. Got suppose ainsi connus les principaux résultats d'Hermite sur les formes quadratiques ternaires indéfinies et sur les substitutions semblables<sup>34</sup>. Le travail de Chapelon est exclusivement consacré à l'établissement de formules<sup>35</sup> suivant les méthodes initialement créées par Charles Hermite en 1861-62<sup>36</sup>. Quant à Julia, dès le premier paragraphe de son travail, il cite l'« admirable Mémoire » d'Hermite, *Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres* et évoque l'inspiration de ses propres recherches<sup>37</sup> :

« C'est de la lecture attentive de ce dernier Mémoire qu'est né le Mémoire actuel, et son objet peut être ainsi résumé : mettre en lumière et étendre la belle méthode de réduction continue créée par Hermite pour l'étude arithmétique des formes. »

Enfin, Le Corbeiller se réfère non seulement aux « formes d'Hermite »<sup>38</sup> mais également à ses travaux sur les « transformations homographiques conservant l'absolu »<sup>39</sup>.

Deux autres mathématiciens français sont cités, mais de façon moins systématique : Émile Picard et Henri Poincaré. Julia et Le Corbeiller se réfèrent à quelques-uns des travaux de Picard en théorie des groupes, sur les transformations de formes<sup>40</sup>. Got et Le Corbeiller mentionnent les travaux de Poincaré sur les substitutions<sup>41</sup>. Comme l'a montré Catherine Goldstein dans GOLDSTEIN 1994 et GOLDSTEIN 1999, ces différents travaux appartiennent en fait à un même réseau de textes mathématiques en théorie

34. Cf. GOT 1914, p. 1-2. Got y précise d'ailleurs que « les formules du tome LXXVIII du *Journal de Crelle*, relatives aux substitutions de période deux, [lui] ont servi constamment ». De plus, selon le rapport de Picard, il « reprend la méthode de la réduction continue d'Hermite, sous la forme que lui a donné Selling ».

35. Les formules qu'il cherche à établir sont relatives à  $\sum F(N - \sigma^2)$  où  $F(N')$  représente le nombre des classes de formes quadratiques binaires  $(ax^2 + 2bx + cy^2)$  à coefficients entiers, positives où  $a$  et  $b$  ne sont pas pairs à la fois et où  $N' = ac - b^2$  est le discriminant de la forme. Dans la formule,  $N$  représente un entier positif et la somme se fait sur tous les  $\sigma$ , tels que  $N - \sigma^2$  est positif, les  $\sigma$  étant tous congrus (mod  $p$ ).

36. Pour les références, cf. CHAPELON 1914, p. 4.

37. Cf. JULIA 1917, p. 1.

38. Le Corbeiller désigne par « forme d'Hermite », cf. LE CORBEILLER 1926, p. 7, une forme quadratique à indéterminées conjuguées, du type :

$$f = axx_0 + bx_0y + b_0xy_0 + cyy_0$$

où  $x$  et  $y$  sont les variables, ou indéterminées, complexes,  $x_0$  et  $y_0$  leurs conjuguées,  $a$ ,  $c$  deux réels et  $b$  complexe,  $b_0$ , son conjugué.

39. Cf. LE CORBEILLER 1926, p. 6, il s'agit du mémoire, « Sur la théorie des formes quadratiques, premier mémoire », *Journal de Crelle*, 1853.

40. Le Corbeiller se réfère en fait davantage au travail d'Humbert sur les domaines fondamentaux des groupes modulaires de certains corps quadratiques dont Picard est le précurseur.

41. Got cite également le mémoire de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes, POINCARÉ 1887, cf. GOT 1914, p. 1.

des nombres datant d'avant la première guerre mondiale et où la théorie des formes est travaillée plus particulièrement <sup>42</sup>.

On trouve en outre dans ces quatre mémoires une référence fréquente aux travaux de certains mathématiciens allemands dont les plus fréquemment cités sont Fricke et Klein. Les travaux auxquels se réfèrent les quatre étudiants portent sur leur théorie des groupes fuchsien qu'ils exposent dans *Traité des fonctions automorphes*, FRICKE et KLEIN 1897-1912. Got cite ce dernier ouvrage explicitement. Chapelon se réfère également à leurs travaux sur les formes et sur la détermination du nombre de classes de certaines formes qu'ils présentent dans leur FRICKE et KLEIN 1890-1892. Gaston Julia ne se réfère qu'à Klein et à son interprétation de la théorie algébrique des covariants, JULIA 1917, p. 4. Enfin, Le Corbeiller cite les travaux de Klein en géométrie et notamment sa publication « Sur la Géométrie dite non-euclidienne », *Mathematische Annalen*, 1871. Il évoque également l'ouvrage de Fricke et Klein, FRICKE et KLEIN 1897-1912, comme source pour interpréter des formes d'Hermite et de Dirichlet dans l'espace Cayleyien hyperbolique. Ici aussi, ces travaux appartiennent au même réseau d'articles en théorie des nombres que précédemment <sup>43</sup>. On peut cependant s'interroger sur le rôle qu'a pu jouer la première guerre mondiale dans l'utilisation des références allemandes ou étrangères par les doctorants. En effet, suivant la date de soutenance du doctorat, la part accordée à ces références varie. Ainsi, Got et Chapelon, qui soutiennent en 1914, juste avant la déclaration de guerre, fondent une partie de leur recherche sur les travaux de mathématiciens allemands. En revanche, Julia, qui soutient sa thèse pendant le conflit, en 1917, cite exclusivement les travaux d'Hermite et peu d'autres influences sont évoquées. Quant à Le Corbeiller, il présente son mémoire en 1926, huit ans après la fin du conflit. On observe alors la place qu'il accorde aux références de travaux allemands, supérieure à celle accordée par Julia et à peu près égale à celle donnée par Got et Chapelon.

---

42. Dans GOLDSTEIN 1994 et GOLDSTEIN 1999, Catherine Goldstein identifie en effet essentiellement trois réseaux d'articles de théorie des nombres en étudiant les publications parues entre 1870 et 1914 non seulement dans les notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (pour GOLDSTEIN 1994), et également dans différents journaux mathématiques, et repérées pour une part au moyen du *Jahrbuch*. La constitution en réseaux est fondée sur des liens par les références utilisées par les auteurs dans leurs articles. D'après GOLDSTEIN 1999, p. 205, le réseau auquel appartiennent les travaux de Picard et Poincaré cités précédemment est le réseau qui est le plus thématique parmi les trois identifiés. Il « concerne la classification arithmétique des formes de différents degrés à plusieurs variables et la représentation des nombres entiers par de telles formes. La référence commune standard est [...] le travail d'Hermite, mais certains articles de Kronecker sur les connexions entre formes et fonctions elliptiques ou modulaires sont aussi cités fréquemment ». Ce réseau se recoupe avec la « troisième catégorie » identifiée à partir des notes aux *Comptes rendus* et qui est consacrée à « l'étude des formes de degré  $n$  à  $m$  variables, à l'étude de leurs classifications et de la représentation des nombres par des telles formes », cf. GOLDSTEIN 1994, p. 145. Catherine Goldstein a en outre montré que certains mathématiciens n'apparaissent que dans un seul des réseaux qu'elle identifie. Dans le réseau que j'évoque ici figurent alors Humbert, Poincaré, Châtelet, Picard, etc. On retrouve ainsi les noms des mathématiciens qui sont cités par les doctorants.

43. Cf. GOLDSTEIN 1994.

En ce qui concerne des interactions entre différents domaines mathématiques, on peut remarquer la part importante de notions et outils mathématiques empruntés à la géométrie dont l'utilisation est mentionnée dans les rapports et les introductions. Ils sont évoqués autour de questions relatives à, par exemple, la recherche de domaines fondamentaux, la représentation des formes. Ils interviennent dans l'interprétation géométrique de méthodes de réductions continues. Les rapports et les introductions font état du lien qui existe entre certaines géométries et la théorie des formes ; lien, qui est exploité dans certains mémoires<sup>44</sup>. Les rapports et les introductions des travaux de Got et Chapelon révèlent également comment les doctorants utilisent certaines théories analytiques relatives à l'étude de fonctions fuchsiennes et de fonctions elliptiques. Le recours à des théories analytiques semble cependant moins présent dans les travaux de Julia et le Corbeiller.

L'analyse des rapports et des introductions révèle ainsi une première dynamique de recherche autour de l'étude des formes, influencée par Georges Humbert dans une tradition hermitienne. Il se trouve en outre que les doctorats qui appartiennent à cette dynamique sont les premiers d'arithmétique et d'algèbre à être soutenus entre 1914 et 1945 : trois mémoires sont soutenus presque simultanément entre 1914 et 1917 et le dernier est présenté 9 ans plus tard en 1926.

L'étude des références citées par les doctorants montre comment ces mémoires se fondent sur un réseau d'articles mathématiques écrits dans le premier quart du XX<sup>ème</sup> siècle. La guerre apparaît ici comme un point singulier dont on ne perçoit pas directement les effets. Les doctorats considérés reprennent en effet des théories d'avant guerre sans marque de rupture.

D'après Catherine Goldstein dans GOLDSTEIN à paraître<sup>45</sup>, ces quatre premières thèses s'inscrivent dans un petit élan qui semblait se dessiner avant-guerre en France sur des thèmes arithmétiques et algébriques, élan qui est stoppé au début des années 1920. Les trois premiers doctorats soutenus pendant le conflit y appartiennent entièrement. Le dernier doctorat, soutenu en 1926, en serait un écho<sup>46</sup>.

---

44. La première partie du travail de le Corbeiller est ainsi intitulée « Géométrie », et selon Élie Cartan, le rapporteur de la thèse, « l'auteur y donne un exposé d'ensemble très complet et très clair des relations les plus importantes qui existent entre la Géométrie non euclidienne hyperbolique et la théorie des formes de Dirichlet et des formes d'Hermite binaires ».

45. Catherine Goldstein y étudie la théorie des nombres en France dans l'entre-deux-guerres à partir de plusieurs indicateurs tels que les thèses, les notes publiées aux CRAS ou les articles d'autres journaux, les résumés des articles recensés dans le *Jahrbuch* les exposés aux Congrès internationaux. Elle montre alors que les images fournies par ces différents indicateurs sont cohérentes.

46. On peut également ajouter une dernière thèse qui participerait à cet élan : la thèse de Georges Giraud, *Sur la classe de groupes discontinus de transformations birationnelles quadratiques et sur les fonctions de trois variables indépendantes restant invariables par ces transformations*, soutenue en 1916 et classée par ma méthode et par le *Jahrbuch* en théorie des fonctions. Le sujet concerne les groupes discontinus associés à des transformations birationnelles et aux formes automorphes. Il

### 4.2.2 La théorie des idéaux comme nouvelle théorie de référence

L'étude des références citées par les doctorants met en valeur une seconde dynamique de recherche, elle aussi thématique, qui se développe autour de la théorie des idéaux. Elle est révélée par sept doctorats, soutenus entre 1928 et 1944, dont les auteurs sont André Weil<sup>47</sup>, Paul Dubreil<sup>48</sup>, Claude Chevalley<sup>49</sup>, Marc Krasner<sup>50</sup>, Claude Chabauty<sup>51</sup>, Jean Kuntzmann<sup>52</sup> et François Châtelet<sup>53</sup>. Il s'agit donc d'une période disjointe de la précédente, qui correspond à une seconde partie de l'entre-deux-guerres.

Parmi ces sept thèses, celle d'André Weil a un rôle particulier. En effet, soutenue en 1928 avant les six autres, elle marque une rupture avec l'étude des formes et donc avec un élan de recherche d'avant guerre. Les références changent profondément et elles ont une autre base. Humbert n'est plus cité et les recherches de Weil ne se rapportent plus à ce mathématicien. Contrairement aux précédents doctorants, Weil n'a d'ailleurs ni entretenu de relations avec Georges Humbert, ni suivi ses cours au Collège de France. Humbert meurt en effet en 1921 alors que Weil entre à l'École normale en 1922. La rupture avec les mémoires précédents n'est donc pas seulement thématique mais également générationnelle. Cependant, André Weil apparaît également comme une figure de transition. Tout d'abord, il est le seul parmi les sept étudiants à utiliser dans son mémoire la théorie des fonctions abéliennes. Or, cette théorie est plus largement employée dans les travaux précédents sur l'étude des formes. Il fait, en outre, référence à certains travaux de Poincaré, ce qui ne se produit que dans un seul des sept autres doctorats, celui de François Châtelet en 1944.

En fait, aucun autre mathématicien français de cette génération n'est cité dans les introductions ou les rapports à part dans les remerciements formels adressés en fin d'avant-propos aux membres de jury.

La composition des jurys de ces sept doctorats est un autre indicateur du regroupement qui peut être fait de ces mémoires. René Garnier est ainsi le rapporteur pour six d'entre eux<sup>54</sup>. Si on se réfère au témoignage d'André Weil dans WEIL 1991, p. 58,

---

y étudie certaines transformations conservant des formes quadratiques ternaires ou quaternaires. Je renvoie ici à la partie correspondante du chapitre 5 de ma thèse « Théorie des fonctions ».

47. *L'arithmétique sur les courbes algébriques*, WEIL 1928.

48. *Recherches sur la valeur des exposants des composantes primaires des idéaux de polynômes*, DUBREIL 1930.

49. *Sur la théorie des corps de classes dans les corps finis et les corps locaux*, CHEVALLEY 1934.

50. *Sur la théorie de la ramification des idéaux de corps non-galoisiens de nombres algébriques*, KRASNER 1938.

51. *Sur les équations diophantiennes liées aux unités d'un corps de nombres algébriques fini*, CHABAUTY 1938.

52. *Contribution à l'étude des systèmes multiformes*, KUNTZMANN 1939.

53. *Variations sur un thème d'H. Poincaré*, CHÂTELET 1944.

54. Seule la thèse de Kuntzmann est rapportée par un autre mathématicien français, Valiron. De plus, si le rapport pour la thèse de Dubreil n'est pas disponible aux Archives Nationales, les

le lien intellectuel entre les recherches de Garnier et celles présentées dans les différents mémoires est inexistant<sup>55</sup>. L'unité qui apparaît à l'étude des jurys est donc seulement de nature institutionnelle.

Plus aucun mathématicien français contemporain ne semble exercer une influence intellectuelle comparable à celle d'Humbert pour les thèses précédentes. Les remerciements qui sont adressés aux membres des universités françaises de l'entre-deux-guerres par les étudiants restent purement formels et ne se retrouvent pas parmi les références utilisées par ces mêmes étudiants pour élaborer leur travail. Plus aucune dédicace à des patrons des mathématiques françaises de l'époque ne figure non plus en entame du mémoire<sup>56</sup>.

Les travaux auxquels se réfèrent les sept doctorants appartiennent à une tradition à laquelle les Français ne participent que peu à la fin des années 1920<sup>57</sup>. Les recherches présentées sont en effet très marquées par l'algèbre allemande. André Weil l'a découverte lors de son séjour en Allemagne en 1926-1927<sup>58</sup>. Sa thèse est la première en arithmétique et algèbre à citer de façon aussi importante les travaux et les méthodes de mathématiciens allemands tels qu'Emmy Noether, Siegel, Van der Waerden ou encore Hilbert<sup>59</sup>. L'appropriation dans un doctorat français de méthodes allemandes récentes et non pas de celles datant de l'époque de Klein ou Fricke est un fait nouveau dans la thèse de Weil, ce que ne manque pas de signaler Émile Picard à la fin de son rapport. La thèse de Dubreil, en 1930, viendra confirmer cette tendance puisque ce dernier ne cite aucun mathématicien français et utilise des méthodes qu'il présente comme celles d'Emmy Noether (principalement en théorie des idéaux), Van der Waerden et Hil-

---

remerciements formels que Dubreil adresse à la fin de son introduction permettent de penser que Garnier en est également rapporteur, puisque Vessiot préside le jury, cf. DUBREIL 1930, p. 5 :

« Qu'il me soit permis enfin d'exprimer à M. Vessiot ma respectueuse reconnaissance pour les conseils et les encouragement qu'il m'a donnés au cours de mon travail. Je remercie aussi vivement M. Garnier du bienveillant intérêt qu'il m'a témoigné. »

55. André Weil rapporte ainsi qu'il « eut donc un rapporteur consciencieux autant que bienveillant ; [qui] ne remarqua pas quelques lacunes dans les démonstrations mais [lui] donna d'utiles conseils sur les virgules. Cet épisode fit de lui le rapporteur attiré de toutes les thèses d'algèbre et d'arithmétique. »

56. Cette autonomie des jeunes doctorants par rapport aux professeurs de mathématiques en poste dans les universités françaises ou au Collège de France est évoquée par André Weil dans WEIL 1991. On en trouve également mention dans la notice écrite à la mort de Chevalley, DIEUDONNÉ 1986, p. 84 où Dieudonné, parlant d'Herbrand et de Chevalley écrit :

« C'est donc surtout par la lecture d'ouvrages originaux qu'ils s'intruisirent par eux-mêmes, et purent très tôt manifester leurs dons exceptionnels d'assimilation et de puissance créatrice. »

57. Cf. GOLDSTEIN à paraître pour davantage de détails. Catherine Goldstein montre en effet que certains mathématiciens français, comme Châtelet ont un discours de continuité par rapport à cette tradition de recherche.

58. Cf. WEIL 1991, p. 50-56.

59. Selon Garnier dans le rapport de la thèse de Weil, ce dernier ne cite d'ailleurs pas suffisamment ces mathématiciens et leurs recherches pour la plupart encore inédites.



bert<sup>60</sup>. Le constat en est d'ailleurs fait par Emmy Noether elle-même, quand Dubreil, en séjour à Francfort-sur-le-Main, présente les recherches de sa thèse à son séminaire de recherche. À la suite de l'exposé de Dubreil, elle souligne même que Dubreil a « traité un problème du père avec les méthodes de la fille », cf. DUBREIL 1983, p. 66<sup>61</sup>. Les références à des travaux et des méthodes allemandes se poursuit dans les autres doctorats. Les méthodes d'Emmy Noether, d'Hilbert s'y trouvent citées<sup>62</sup>, ainsi que des publications de Hasse<sup>63</sup>.

L'algèbre allemande n'est pas l'unique source des travaux des doctorants. Ces derniers se réfèrent également à certains mathématiciens anglo-saxons. André Weil utilise certains résultats de Mordell en 1928. Les mémoires soutenus à la fin de l'entre-deux-guerres font référence à des mathématiciens américains. Krasner en 1938 et Kuntzmann en 1942 mentionnent ainsi les travaux de Öre<sup>64</sup>.

Cette évolution intervient dix ans après la fin de la première guerre mondiale alors que l'ostracisme envers la science allemande pratiquée au début de l'entre-deux-guerres marque le pas en France comme dans les autres pays<sup>65</sup> et que les communications scientifiques internationales sont normalisées. Elle correspond surtout aux premiers effets intellectuels en France des voyages à l'étranger que permettent notamment les bourses de l'International Education Board, financées par la fondation Rockefeller. C'est en effet grâce à une telle bourse que Weil a pu partir en Allemagne<sup>66</sup>. Il n'est pas le seul parmi les doctorants français en arithmétique et en algèbre à en bénéficier. Paul Dubreil bénéficiera également d'un financement de l'I.E.B pour partir d'octobre 1929 à janvier 1931 à Hambourg, Groningen, Göttingen, Francfort et enfin Rome auprès

60. Dubreil fonde en effet certains de ses résultats sur la théorie des formes algébriques d'Hilbert.

61. Le travail de Dubreil concerne en effet la détermination de la « multiplicité de Noether », de Max Noether, cf. DUBREIL 1983, p. 65. Paul Dubreil interprète la théorie des polynômes en utilisant la théorie des faisceaux.

62. Par exemple, Krasner fonde ses recherches sur la théorie de Hilbert pour les idéaux non ramifiés des corps galoisiens, cf. notamment KRASNER 1938, p. 3-5, p. 7. Il veut en effet construire une théorie de la ramification des idéaux, analogue à celle de M. Hilbert mais pour les corps non-galoisiens de nombres algébriques, KRASNER 1938, p. 4-5.

63. Krasner reprend ainsi certains de ses travaux en théorie des groupes, comme il le présente par exemple dans KRASNER 1938, p. 20.

64. Cf. respectivement KRASNER 1938, p. 4 et KUNTZMANN 1939, p. 1. Dans le rapport de la thèse de Kuntzmann, Valiron souligne d'ailleurs comment les conceptions de Kuntzmann sur les opérations multiformes se rapprochent de celles des « mathématiciens américains de l'École de M. Öre ».

65. Notamment au niveau des Congrès Internationaux de Mathématiciens.

66. Cf. WEIL 1991 et SIEGMUND-SCHULTZE 2001. On peut également se référer à la thèse de Liliane Beaulieu, BEAULIEU 1990, p. 65-105, où cette dernière retrace les différents voyages à l'étranger des premiers membres de Bourbaki, notamment Weil, Dubreil et Chevalley. Liliane Beaulieu y évoque plus généralement les bourses Rockefeller ainsi que les différentes situations mathématiques rencontrées par les boursiers à l'étranger, notamment en Italie et en Allemagne.

d'Emil Artin, Emmy Noether puis Enriques<sup>67</sup>. Chevalley étudiera en Allemagne de 1931 à 1933<sup>68</sup> et Chabauty séjournera deux années à Princeton de 1934 à 1936<sup>69</sup>.

Si l'ensemble de ces sept doctorats ne se rapportent pas à l'étude d'un même sujet<sup>70</sup>, on remarque cependant qu'ils se caractérisent tous par un même changement profond des méthodes et des notions étudiées et utilisées par les doctorants. Les recherches s'articulent essentiellement autour des notions de structures et les étudiants ont systématiquement recours à la théorie des groupes ou à la théorie des idéaux, ou à la théorie des corps (corps de nombres algébriques, corps de classes...), etc.

Les structures qu'ils considèrent ne sont pas héritées d'une longue tradition française de recherche mathématique. Elles ont été définies ou redéfinies dans des recherches récentes réalisées, pour l'essentiel, à l'étranger. On peut citer la théorie des idéaux d'Emmy Noether, notamment utilisée par Dubreil dans sa thèse<sup>71</sup>. Chevalley utilise également cette théorie allemande des idéaux dans CHEVALLEY 1934. Il se réfère alors davantage aux travaux d'Artin pour élaborer ses résultats sur la théorie des corps de classes dans les corps finis et les corps locaux. La théorie des idéaux est également au

67. Le séjour de Dubreil à Rome auprès d'Enriques se déroulera pendant le semestre de l'hiver 1930/1931, après la soutenance de thèse de ce dernier, cf. SIEGMUND-SCHULTZE 2001, DUBREIL 1983 et LESIEUR 1995.

68. Cf. DIEUDONNÉ 1986, p. 84.

69. Cf. PAYAN 1991, p. 346. Il semble légèrement exagéré de n'attribuer l'apparition de nouvelles méthodes dans les thèses qu'à ces seuls voyages. Selon Dubreil, dans DUBREIL 1983, p. 62, ce dernier avait déjà travaillé à Paris avant son départ pour Hambourg en 1929 les principaux mémoires d'Emmy Noether, Krull et van der Waerden. On peut alors s'interroger sur le cadre dans lequel il a été mis en contact avec ces recherches. Il pourrait les avoir lues à titre personnel, ou à la suite de discussions avec d'autres mathématiciens. Certaines conférences données dans le cadre du séminaire Hadamard, seul séminaire de cette époque, pourraient également l'avoir initié à ces recherches. L'*Annuaire du Collège de France*, 29<sup>e</sup> année, Paris, Vuibert, 1929, p.20-21, indique ainsi qu'en 1928-1929, certains sujets tels que la logique mathématique, la théorie des corps algébriques ont fait l'objet de quelques séances.

Cependant on ne peut nier l'influence que de tels séjours dans les universités étrangères ont pu avoir. Dieudonné rapporte ainsi dans la notice qu'il écrit sur Chevalley, DIEUDONNÉ 1986, p. 84 :

« C'est [en Allemagne] que Chevalley prépara sa thèse sur la théorie du corps de classes qui était alors le couronnement de la théorie des nombres algébriques. Les théorèmes fondamentaux de la théorie, qui avaient été conjecturés par Hilbert au début du siècle, venaient d'être prouvés par le mathématicien japonais Takagi et par E. Artin, dont Chevalley suivit les cours à Hambourg... »

70. En fait, le seul rapprochement qui peut être effectué en première étude de ces sept mémoires est celui entre les thèses d'André Weil et de François Châtelet. André Weil s'intéresse à l'arithmétique sur les courbes algébriques, en se référant notamment à Mordell, tandis que François Châtelet, sans aucune référence à Mordell, s'intéresse à l'arithmétique sur les variétés algébriques en utilisant une toute autre méthode fondée sur l'utilisation de procédés galoisiens. Les relations entre les travaux de Mordell et la théorie que présente André Weil dans sa thèse ne sont cependant pas très importantes et pas réciproques. En effet, d'après Sébastien Gauthier qui a étudié la correspondance reçue par Mordell à Manchester et notamment celle écrite par Weil, GAUTHIER 1944, p. 374, Mordell se serait en fait peu intéressé à la généralisation de son théorème sur les points rationnels des courbes elliptiques sur laquelle travaillait Weil pour sa thèse.

71. Dans DUBREIL 1983, p. 67, ce dernier relate également comment Van der Waerden lui communique les chapitres de son ouvrage *Modern Algebra*, alors que l'étudiant séjourne à Francfort grâce à sa bourse Rockefeller et que l'ouvrage n'est pas encore publié par Springer.

centre de la thèse de Krasner consacrée à la ramification des idéaux dans des extensions de corps de nombres. Dans le rapport sur la thèse de Claude Chabauty, René Garnier évoque l'ensemble des « théories fort diverses » qui ont permis à Chabauty d'obtenir ses résultats concernant les unités d'un corps de nombres algébriques fini. Il désigne notamment parmi ces théories celles des idéaux abstraits, des nombres  $p$ -adiques, des groupes de Galois, ainsi que la représentation des variétés algébriques. Enfin, François Châtelet, en 1944, étudie certains problèmes d'équivalence en théorie des algèbres et se réfère à certains travaux de Van der Waerden et Deuring<sup>72</sup>. Enfin, Krasner et Kuntzmann utilisent, parmi d'autres, la notion d'« hypergroupe », introduite par un mathématicien français, Frédéric Marty, en 1934, pour généraliser la notion de groupe<sup>73</sup>. Il s'agit de la seule référence à une notion introduite par des mathématiciens français.

Les recherches auxquelles se réfèrent les sept doctorants sont ainsi essentiellement des travaux récents. Une partie d'entre eux concernent même des théories créées pendant l'entre-deux-guerres. Les doctorants se sont auto-formés à ces nouveaux intérêts de recherches, qui pendant l'entre-deux-guerres ne sont pas, en France, des sujets classiques. L'autoformation des doctorants est, à l'époque, encouragée et reconnue par le milieu mathématique. Elle est cependant, ici, vécue différemment dans le sens où elle concerne des sujets peu développés et travaillés en France.

De tels sujets sont parvenus à la connaissance des étudiants tout d'abord grâce aux voyages que ces derniers ont faits à l'étranger, grâce notamment aux bourses de la fondation Rockefeller. Certains doctorants les reprennent encore à la fin de l'entre-deux-guerres, à une période où de tels voyages sont impossibles.

On peut alors y voir un rôle des premiers thésards, qui initieraient les jeunes doctorants à ces recherches récentes. Chevalley<sup>74</sup> paraît ainsi exercer une certaine influence<sup>75</sup>. Il est notamment remercié à la fin d'introductions de certains travaux comme par exemple celui de Krasner, KRASNER 1938, p. 22. C'est le seul mathématicien que ce dernier remercie :

---

72. Respectivement *Algebra* et *Algebren*. Plus précisément, François Châtelet étudie la généralisation de la « théorie de Lagrange, Gauss, Noether et Poincaré » en arithmétique sur les variétés algébriques à certaines variétés, qu'il appelle « variétés de Brauer », cf. CHÂTELET 1944, p. 2.

73. Ainsi, Krasner dans sa thèse, KRASNER 1938, p. 5, réintroduit dès l'introduction de son mémoire la définition de l'hypergroupe donnée par Marty et annonce qu'il va développer la théorie de ce dernier dans le cas particulier des hypergroupes de classes. Quant à Kuntzmann, comme l'évoque Valiron dans le rapport sur la thèse et comme Kuntzmann le signale dès l'introduction de son mémoire, cf. KUNTZMANN 1939, p. 1, il fonde l'origine de ses recherches sur les opérations multiformes dans l'édification de Marty de sa théorie des hypergroupes. Ainsi, selon Valiron, « M. Kuntzmann s'est proposé d'analyser complètement les diverses notions qu'il a été amené à introduire en vue de généraliser la notion de groupe. »

74. lui-même docteur ès sciences mathématiques depuis 1934 après la soutenance d'une thèse d'arithmétique et d'algèbre.

75. dont je ne mesure cependant pas l'exacte étendue.

« M. Chevalley a bien voulu s'intéresser à ce travail et m'a apporté une aide très précieuse en m'indiquant plusieurs simplifications importantes de notations et de démonstrations. Je lui adresse ici mes sincères remerciements. »

Certains mémoires font également référence aux travaux de Jacques Herbrand en arithmétique et en théorie des groupes, recherches qu'il a effectuées pendant son séjour en Allemagne en 1930-1931<sup>76</sup> et qui ne concernent pas directement le sujet de sa thèse sur la théorie de la démonstration<sup>77</sup>. Chevalley en 1934, puis Krasner, en 1938, font ainsi référence à ses travaux en théories des groupes<sup>78</sup>. La thèse de François Châtelet illustre également le rôle qu'a pu jouer la génération des jeunes docteurs pendant l'entre-deux-guerres. Ce dernier se réfère ainsi à des exposés sur la théorie des Algèbres de la *Collection des Conférences au Séminaire des mathématiques dirigé par G. Julia (1932-1933)*, donnés par Dubreil, Chevalley et Dieudonné. Il cite également le premier tome des ouvrages du groupe Bourbaki, *Éléments de mathématiques*<sup>79</sup>.

### 4.2.3 Quelques doctorats difficiles à classer

À côté de ces onze premiers doctorats se distinguent deux thèses, qui classées en arithmétique et en algèbre, utilisent pourtant principalement des méthodes d'analyse. Le contenu de ces deux mémoires, et notamment celui de Biernacki, remettent ainsi en question le classement que le *Jahrbuch* a pu faire de ces mémoires.

En effet, le doctorat de Mieczysław Biernacki, *Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires* soutenu en 1928 est classé par le *Jahrbuch* dans le chapitre « Arithmétique et algèbre » et la section « Théorie des équations algébriques et polynômes ». Ce mémoire se distingue des thèses précédentes par son sujet, par les auteurs auquel se réfère Biernacki et par la composition du jury de la thèse. Les membres du jury ne sont pas ceux qu'on pourrait attendre dans le jury d'une thèse d'arithmétique et d'algèbre. Alors que Picard a présidé tous les jurys des thèses précédentes et des thèses suivantes, jusqu'à son départ à la retraite en 1931, Montel, en 1928, est le président du jury de Biernacki. Il en est également le rapporteur et il n'occupera cette fonction

76. où il a pu bénéficier d'une bourse Rockefeller, cf. CHEVALLEY et LAUTMAN 1932, p. 66 et 67.

77. Jacques Herbrand est en effet l'auteur d'une thèse de logique, *Recherches sur la théorie de la démonstration*, soutenue en 1930, où il s'intéresse à la théorie de la démonstration et à ses applications à la théorie de l'arithmétique, cf. HERBRAND 1930. Précisons qu'il trouve la mort à l'été 1931. L'influence qu'il a pu exercer est donc seulement intellectuelle (par ses travaux) et non pas directe (par des discussions avec les étudiants ou d'autres mathématiciens).

78. Selon les rapports des thèses et les introductions des mémoires, Chevalley comme Krasner font ainsi référence à un lemme d'Herbrand, un lemme général sur les groupes qui porte sur le rapport entre les groupes et les idéaux premiers de certains corps, cf. CHEVALLEY 1934, p. 369 et KRASNER 1938, p. 4. Chevalley évoque également un travail élaboré conjointement avec Herbrand en 1931 sur la démonstration du théorème d'existence en théorie du corps de classes et qui a fait l'objet d'une « note » à l'Académie des sciences en 1931, cf. CHEVALLEY 1934, p. 369.

79. Cf. CHÂTELET 1944, p. 26. Châtelet cite précisément le chapitre I du livre II sur les structures algébriques.

pour aucune autre thèse de ce domaine. Biernacki lui adresse également une dédicace au début de son mémoire<sup>80</sup>.

Paul Montel participe non seulement au jury de cette thèse mais ses travaux sont à l'origine des recherches du doctorant. C'est à eux que se réfère essentiellement Biernacki. L'influence du mathématicien est revendiquée dans le rapport par Montel lui-même et dans l'introduction du mémoire. Biernacki écrit ainsi<sup>81</sup> :

« Le premier Chapitre a été incrit sous l'influence de la lecture du mémoire déjà cité de M. Montel<sup>82</sup> et se trouve en liaison étroite avec ce travail. »

et exprime une reconnaissance certaine à Montel qu'il distingue des autres mathématiciens auquel il adresse des remerciements beaucoup plus formels<sup>83</sup>.

Biernacki s'intéresse à la majoration des modules de racines de polynômes, à la multivalence de polynômes, à la localisation de zéros de dérivées polynômes ou de fractions rationnelles. Il fonde sa recherche sur le mémoire de Montel évoqué précédemment, sur des travaux deakeya relatifs à l'univalence d'un polynôme vérifiant certaines conditions et à la localisation de zéros de la dérivée d'un polynôme ainsi que sur les travaux de Walsh sur la localisation des racines de la dérivée de fractions rationnelles. Montel,akeya et Walsh ne sont cités dans aucun autre doctorat d'arithmétique et d'algèbre pendant la période.

De plus, les liens entre ce travail et l'analyse et plus particulièrement les liens avec la théorie des fonctions sont mentionnés explicitement dès la première page du mémoire<sup>84</sup>. Montel précise à la fois au début et la fin de son rapport que le travail de Biernacki utilise « les progrès récents de l'Analyse » et que « l'ensemble repose sur des connaissances très étendues d'algèbre et d'analyse ». Enfin, on peut rajouter que certains des résultats de Biernacki, notamment ceux relatifs à la majoration des modules des racines d'un certain polynôme, vont être repris dans une thèse d'analyse, celle de

---

80.

« À Paul Montel  
Professeur à la Sorbonne  
Hommage de profonde admiration »

81. Montel écrit également à la première page du rapport : « La première partie de ces recherches est liée aux travaux de Montel sur les équations du type... », cf. BERNACKI 1928, p. 2.

82. Il s'agit de MONTEL 1923.

83. tels qu'Hadamard et Lebesgue pour la présentation de notes de l'auteur à l'Académie. Biernacki conclut ainsi son introduction par ses mots, cf. BERNACKI 1928, p. 5 :

« Mais je tiens surtout à exprimer à mon cher maître, M. Paul Montel, ma profonde gratitude pour tout ce que je lui dois et, en particulier, pour les conseils très précieux qu'il m'a prodigués et l'effort qu'il n'a pas hésité à me consacrer. »

84. Cf. BERNACKI 1928, p. 1.

Jean Dieudonné, en 1931, *Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe*<sup>85</sup>.

Classé en arithmétique et en algèbre, un second mémoire utilise également de façon importante des méthodes empruntées à l'analyse pour les appliquer à un sujet de nature algébrique : celui de Charles Pisot, *La répartition modulo un et les nombres algébriques*, soutenu en 1938. Montel fait également partie du jury, en tant que simple examinateur. Arnaud Denjoy en est le rapporteur et c'est l'unique fois qu'il occupe cette fonction pour une thèse classée en arithmétique et en algèbre. Denjoy occupe certes une place moins importante que Montel parmi les membres de jury<sup>86</sup>. Cependant, toutes les thèses sur lesquelles il rapporte<sup>87</sup> sont liées à la théorie des séries de fonctions. C'est d'ailleurs encore le cas, d'un certain point de vue, pour celle de Pisot. Dans l'entretien que Charles Pisot accorde à Jacques Nimier dans NIMIER 1989, p. 67-80, ce dernier évoque d'ailleurs sa thèse comme un mémoire de théorie des nombres où il utilise la théorie des fonctions complexes.

Comme les thèses d'arithmétique et d'algèbre centrées sur la théorie des idéaux, le mémoire de Pisot se caractérise par l'absence de références à des travaux de mathématiciens français quels qu'ils soient. Comme Krasner à la fin de l'introduction de sa thèse, Pisot remercie d'ailleurs Chevalley pour les « conseils de rédaction [qui lui] ont été très utiles »<sup>88</sup>.

Cependant le travail de Pisot se distingue de cet ensemble de thèses par son sujet, par les références utilisées et par les techniques employées. Pisot étudie en effet principalement des suites  $S$  du type  $\lambda\alpha^n$  et cherche à caractériser l'ensemble des valeurs des paramètres  $\alpha, \lambda$  pour lesquels la suite  $S$  n'est pas équirépartie modulo 1. Il fonde ses recherches sur les travaux de Weyl, Koksma, Hardy, Littlewood, qui lient la répartition modulo 1 de telles suites  $S$  à la convergence de séries de termes construits à partir de  $S$ . Pisot part notamment du théorème de Weyl-Kosma affirmant qu'à  $\lambda$  fixé l'ensemble des valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles la suite  $S$  n'est pas équirépartie (mod 1) forme un ensemble de mesure nulle au sens de Borel-Lebesgue<sup>89</sup>. De ses études, il déduit certains critères d'algébricité et de transcendance relativement aux paramètres  $\alpha$  et  $\lambda$ . C'est là, sans doute, l'un des seuls points à thématique algébrique du mémoire.

Enfin, à ces treize travaux, il faut rajouter le mémoire de Benneton, qui se distingue à plusieurs titres de tous les autres.

---

85. Je renvoie ici au chapitre suivant « Théorie des fonctions » où j'évoque plus précisément le travail de Jean Dieudonné et ses liens avec les travaux de Paul Montel.

86. Pendant l'entre-deux-guerres, Denjoy ne préside le jury d'aucune thèse (Montel, 22), ne rapporte que sur sept thèses (Montel, 17) et ne participe en tout qu'à 31 jurys (Montel, 64).

87. À part celle de Frédéric Roger, en 1938, *Les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points*.

88. Cf. PISOT 1938, p. 4.

89. Cf. PISOT 1938, p. 2.

Tout d'abord, la thèse de Benneton est soutenue tardivement, en 1943. Pourtant, l'auteur se réfère exclusivement à des travaux parus au siècle précédent, dont certains sont parus avant les travaux cités dans les doctorats de Got et Chapelon soutenus en 1914<sup>90</sup>. Benneton semble accorder une importance particulière aux travaux d'Hurwitz<sup>91</sup> et aux énoncés de Jacobi<sup>92</sup>.

Le travail se distingue également par son sujet : « l'arithmétique des quaternions et des biquaternions »<sup>93</sup>. Ce sujet n'est repris dans aucun autre doctorat soutenu dans l'entre-deux-guerres en France. Cependant, d'après FENSTER 1998, l'arithmétique des quaternions est reprise et travaillée après les travaux d'Hurwitz et de Lipschitz par plusieurs mathématiciens : tout d'abord du Pasquier au début du XX<sup>ème</sup> siècle puis Dickson dans les années 1920. Benneton ne semble cependant pas faire référence à ces travaux plus récents.

Enfin, la thèse se distingue par son jury : Montel le préside et Albert Châtelet en est le rapporteur. Ce dernier n'écrit aucun autre rapport de thèse entre 1914 et 1945. Son influence sur le milieu mathématique de l'entre-deux-guerres est en fait davantage celle d'un administrateur à l'université de Lille que celle d'un chercheur sur le front de la recherche<sup>94</sup>.

Enfin, même si Benneton obtient la mention « très honorable » pour son doctorat, cette mention, comme l'autorisation d'impression du travail lui sont attribués au regard de « la valeur propre de ce travail, ainsi que [de] celle des travaux antérieurs de M. Benneton et en outre pour leur possibilité d'extension, notamment aux formes quadratiques quaternaires »<sup>95</sup>. On observe une telle précision dans aucun autre rapport de thèse. Il semblerait que « la valeur propre » de sa thèse ne suffise pas à Benneton pour obtenir le grade de docteur. Les membres du jury doivent prendre en compte ses travaux antérieurs pour lui accorder ce grade. Benneton est normalien de la promotion 1930. Mis à part son handicap<sup>96</sup>, il n'est pas atypique parmi la population des doctorants. L'explication se trouve dans le contexte de deuxième guerre mondiale dans lequel est soutenue la thèse. Le contexte de la soutenance, en 1943, pourrait alors expliquer qu'il obtienne le grade de docteur, même si son mémoire ne remplit pas à lui

---

90. Benneton a en effet établi des « Notes bibliographiques », BENNETON 1943, p. 2 qui permettent de connaître précisément les références de l'auteur.

91. HURWITZ 1896.

92. datant de 1829, selon la référence aux oeuvres de Jacobi que donne Benneton, BENNETON 1943, p. 2. Il cherche ainsi à en retrouver des semblables pour, par exemple, la « représentation des nombres entiers par une somme de huit carrés », cf. BENNETON 1943, p. 2.

93. D'après le rapport de Châtelet sur la thèse, Benneton définit une arithmétique différente de celle introduite par Hurwitz. Il change la caractérisation des quaternions premiers.

94. comme peut en témoigner l'hommage rendu à Châtelet dans MEMBRES DU COMITÉ D'ORGANISATION DE L'INAUGURATION DU CENTRE UNIVERSITAIRE ALBERT CHÂTELET 1963. Cf. également l'article de Sébastien Gauthier sur Albert Châtelet dans GOLDSTEIN et MAZLIAK à paraître en 2010.

95. Cf. le rapport écrit par Châtelet.

96. Une polyémye, contractée en 1938, l'a laissé infirme et paralysé de la moitié d'une jambe et d'un bras pour le restant de sa vie, cf. REY 1997, p. 38.

seul les exigences de qualité des membres de son jury. Le caractère relativement ancien des questions étudiées par Benneton dans son doctorat pourrait jouer un rôle dans ces réticences qui semblent exprimées dans le rapport. On peut d'ailleurs s'interroger sur le choix particulier de ce sujet par le candidat. Selon la notice nécrologique parue après sa mort dans REY 1997, il semble qu'il l'a choisi de façon autonome avant de s'en ouvrir à Paul Montel, « qui était un peu son protecteur et l'avait encouragé dans [la] voie » de l'arithmétique<sup>97</sup>. Aucune autre raison n'est cependant avancée.

#### 4.2.4 Les acteurs : doctorants et membres du jury

La transformation des thèmes abordés dans les doctorats, de l'étude des formes à la théorie des idéaux, semble se produire de façon autonome. Elle n'apparaît pas dans les intérêts de recherche travaillés par les patrons mathématiques français de l'époque. Elle bénéficie cependant de leur accord, au moins passif, comme en témoignent les mentions « très honorable » obtenues par tous les jeunes doctorants ainsi que les commentaires élogieux des rapports. Le rôle des jurys de thèses en arithmétique et en algèbre est cependant faible et semble restreint à un rôle institutionnel. Les thèses de ce domaine ne se rapportent plus à partir de l'année 1928 à des travaux français.

Il est intéressant de remarquer comment l'étude particulière des membres de ces jurys révèle certaines positions institutionnelles. À la suite du départ de Picard, le rôle de président est partagé de façon non exclusive par un certain nombre de professeurs de la faculté : Montel (2), Élie Cartan (2), Vessiot (1), et Julia, qui préside le jury de deux thèses soutenues pendant la seconde guerre mondiale<sup>98</sup>. Montel et Élie Cartan sont alors pendant les années 1930, les professeurs de la faculté des sciences qui président le plus de jurys<sup>99</sup>. Même s'ils n'ont, mathématiquement, aucun lien avec les travaux présentés, leur position institutionnelle et l'affirmation de cette position les entraînent à occuper cette fonction.

En ce qui concerne l'origine des doctorants en arithmétique et d'algèbre, on peut remarquer la part importante d'étudiants provenant de l'École normale supérieure, de l'École polytechnique ou qui sont ingénieurs et cette part évolue au cours de la période. En effet, trois des quatre premiers doctorants sont d'anciens ingénieurs ou d'anciens élèves de l'École polytechnique : Théophile Got<sup>100</sup>, André Chapelon et Philippe Le

97. Cf. REY 1997, p. 39. Selon cette même notice, en 1943, « Albert Châtelet était le seul spécialiste qualifié pour connaître du sujet choisi par Gaston », ce qui explique la présence de ce dernier dans le jury de la thèse. Signalons également, toujours selon cette même notice, qu'Albert Châtelet a tout d'abord « rejeté la thèse proposée la tenant pour fausse. Il fallut cinq heures d'entretien à Gaston [Benneton] pour lui prouver le bien-fondé de sa thèse et le convaincre d'effectuer une seconde vérification des résultats, satisfaisante cette fois. »

98. Celles de Kuntzmann et 1942 et celle de François Châtelet, le fils d'Albert Châtelet, en 1944.

99. Respectivement 17 et 29 pour 119 thèses soutenues à la faculté des sciences de Paris entre 1930 et 1945.

100. Ancien ingénieur de la Marine, selon la première page de son manuscrit de thèse.



Corbeiller<sup>101</sup>. Tous les trois étudient des sujets relatifs à l'étude des formes. Pour le reste de la période, aucun autre polytechnicien ne soutiendra une thèse en arithmétique et d'algèbre. En revanche, l'essentiel des étudiants de la seconde partie de la période est constitué par d'anciens élèves de l'É.N.S. On compte ainsi sept élèves de l'É.N.S. À Gaston Julia qui soutient en 1917, il faut rajouter André Weil, Paul Dubreil, Claude Chevalley, Charles Pisot, Claude Chabauty et Gaston Benneton. Cette proportion, 50%, est supérieure à la part des normaliens parmi les docteurs de l'université de Paris sur la période (35%). Une explication à cette proportion importante tient peut-être de l'état d'isolement relatif en France où se trouvent les étudiants qui s'intéressent à ces thématiques. Entreprendre des recherches sur ces sujets requiert une certaine autonomie d'esprit et d'entreprise, ainsi qu'une facilité à voyager à l'étranger, conditions qui sont réunies par les étudiants de l'École normale supérieure depuis André Weil<sup>102</sup>. Un phénomène d'entraînement propre à l'École normale peut également être avancé : à partir du moment où un mouvement est initié par plusieurs normaliens, tels André Weil et Paul Dubreil, il entraîne la participation d'autres étudiants de l'École à ce mouvement.

L'étude des avant-propos et des rapports sur les thèses d'arithmétique et d'algèbre a donc permis de mettre en évidence deux dynamiques de recherche distinctes. Ces dynamiques sont révélées au moyen des références utilisées par deux groupes différents de doctorats. Il se trouve que chacune d'entre elle correspond à une période disjointe. La période de l'entre-deux-guerres est donc divisée en deux parties. On constate tout d'abord un premier élan de la recherche autour de l'étude des formes qui, pour les thèses, va de 1914 à 1917 avec un dernier doctorat soutenu en 1926<sup>103</sup>. La période entre 1917 à 1928 correspond à des années creuses si on excepte la thèse de Le Corbeiller en 1926, Le second élan repart après ces années creuses sur de nouvelles bases. Il est marqué par un changement radical de sujets : de 1928 à la fin de l'entre-deux-guerres, la théorie des idéaux est la nouvelle théorie de référence.

Une rupture, temporelle, thématique, entre les pratiques mathématiques, est de fait mise en évidence par ces deux dynamiques de recherche. Elle confirme, en quelque sorte, un discours de discontinuité. Il faut cependant nuancer quelque peu ce propos. Catherine Goldstein étudie en effet plus particulièrement ces questions dans GOLDSTEIN à paraître. Elle indique notamment comment Châtelet tisse une continuité de l'élan arithmétique d'avant guerre (dans lequel il inclut les travaux de Got et de Cha-

101. Tous deux sont polytechniciens et respectivement ingénieurs des Mines et des Télégraphes.

102. comme j'ai pu le montrer précédemment.

103. Dans GOLDSTEIN à paraître, Catherine Goldstein identifie un même élan à l'aide de plusieurs indicateurs, comme je l'ai évoqué dans une note précédente. Elle date l'arrêt de ce premier élan au début des années 1920.

pelon) aux signes avant-coureurs du renouveau moderniste qui est ensuite incarné par la seconde dynamique que j'ai identifiée.

## 4.3 La géométrie

Après cette analyse des thèses d'arithmétique et d'algèbre par l'intermédiaire du corpus des rapports et des introductions, je regarde maintenant les 41 thèses classées dans la rubrique « géométrie »<sup>104</sup>. Comme il est indiqué en introduction de cette partie, ces mémoires sont classés dans les quatre sections correspondantes suivant ma méthode de classement au deuxième niveau de mot-clé : « géométrie différentielle », « géométrie algébrique », « topologie » et « géométrie analytique ».

Une première analyse quantitative de l'évolution du nombre de thèses par sections entre 1914 et 1945 permet dans un premier temps de mesurer le poids relatif de chacun de ces champs en géométrie dans les thèses de sciences mathématiques.

	1914-1919	1920-1924	1925-1929	1930-1934	1935-1939	1940-1945	Total
Géométrie différentielle	3	7	5	1	4	3	23
Géométrie algébrique	0	0	3	0	2	4	9
Topologie	0	1	0	4	1	0	6
Géométrie analytique	0	1	0	0	1	1	3
Total	3	9	8	5	8	8	41

TABLE 4.1 – Évolution des thématiques des thèses de géométrie à Paris entre 1914 et 1945

La géométrie différentielle apparaît comme le champ traité majoritairement par les doctorants en géométrie de façon relativement constante, en absolu, sur l'ensemble de la période. Ce champ domine exclusivement le domaine de la géométrie jusqu'à la fin des années 1920. L'intervalle 1930-1934 semble marquer cependant un recul de ce champ temporairement au profit de celui de la topologie<sup>105</sup>. Pendant les dix dernières années de la période, les étudiants en géométrie abordent à nouveau de façon importante la

104. Pour une histoire plus générale du domaine de la géométrie, je renvoie aux quelques indications bibliographiques ci-dessous. Peu de travaux ont été publiés sur ce thème et notamment sur l'histoire de la géométrie en France. Les différents ouvrages concernent davantage la géométrie ou la topologie telle qu'elles sont travaillées à l'étranger : BRIGAGLIA et CILIBERTO 1995, GRAY 1997, KOUNEIHAR ET AL. 2005, JAMES 1999 ..., ainsi que les ouvrages de Jean Dieudonné DIEUDONNÉ 1985, 1989. On peut également mentionner LAUDAL et PIENE 2004 ou PIER 1994a dans lequel certains chapitres concernent plus particulièrement la géométrie ou la topologie. On pourra également consulter l'ouvrage de Karin Reich qui propose une histoire du calcul tensoriel, REICH 1994. Je tiens ici à remercier Jim Ritter pour ses remarques variées sur cette partie.

105. On peut ici s'interroger sur le biais que peut engendrer le découpage de la période en intervalle de cinq ans. Il se trouve qu'ici, le découpage et le résultat qu'il fournit (une seule thèse soutenue entre 1930-1934) traduit un phénomène que l'on perçoit sans le regroupement des années en intervalle de cinq ans. La thèse correspondante à 1930-1934 est en effet soutenue en 1930. Le doctorat suivant, classé en géométrie différentielle, est présenté en 1935.

géométrie différentielle. À peu près la moitié des doctorats soutenus sont classés dans ce domaine. Ce domaine co-existe alors, pour les mémoires de thèses, avec celui de la géométrie algébrique.

L'étude des rapports et des avants-propos des thèses va maintenant permettre de saisir les différents thèmes abordés successivement par les doctorants, d'essayer de comprendre les évolutions quantitatives des thèses de géométrie.

Les résultats de l'analyse sont présentés suivant les sous-domaines de la géométrie. Je commence par analyser les mémoires classés en géométrie différentielle, qui correspondent au groupe le plus important quantitativement. Je continue ensuite avec la géométrie algébrique et la topologie qui sont deux sous-domaines dont le poids quantitatif relatif s'accroît dans les années 1930.

Quant au domaine de la « géométrie analytique »<sup>106</sup>, trois mémoires, soutenus à trois moments distincts de la période, y sont classés. Les thèmes qu'ils abordent sont isolés parmi l'ensemble de ceux traités par les autres thèses de géométrie.

Le premier, celui de Georges Darmois, *Sur les courbes algébriques à torsion constante*, est soutenu en 1921. Il a cependant été écrit presque entièrement avant la guerre en 1913 et 1914, soumis à l'Académie des sciences en 1915<sup>107</sup> et récompensé la même année. L'essentiel de son contenu est également publié dès 1919 dans les *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*<sup>108</sup>. D'après DARMOIS 1921, p. 5, il s'agit de « réaliser un progrès notable dans la recherche des courbes à torsion constante » dans la continuité des travaux de géomètres français parmi lesquels Gaston Darboux, Fabry, Cosserat. Claude Guichard, dans le rapport sur la thèse, et Émile Borel, dans le rapport de soutenance, précisent que Darmois répond en fait dans son mémoire à des questions posées par Gaston Darboux sur les courbes à torsion constante. Le travail de Darmois est inspiré par les recherches du mathématicien comme l'essentiel des productions mathématiques en géométrie publiées par les sociétaires de la *Société Mathématique de France* avant-guerre et comme la majorité des thèses de géométrie soutenues en France entre 1900 et 1914<sup>109</sup>. On peut donc percevoir le doctorat de Darmois comme un mémoire qui traite de sujets d'avant-guerre. Ce n'est pas le seul parmi les thèses de géométrie. Comme je le montrerai ci-dessous, d'autres mémoires, classés en géométrie différentielle étudient également des questions en relation avec les travaux de Darboux de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle.

Les deux autres mémoires, celui de Marc Courtand en 1939, *Sur les courbes gauches du troisième et du quatrième ordre en géométrie finie*, et celui de Pierre Momet en

106. Pour rappel, cette rubrique est constituée par le regroupement successif de deux rubriques du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* : « géométrie analytique et synthétique » puis « géométrie analytique et projective ».

107. Cf. DARMOIS 1921.

108. Cf. DARMOIS 1919.

109. Cf. Chapitre 1 de la thèse ainsi que GISPERT 1991.

1943, *Essai de synthèse de la géométrie anallagmatique réelle*, se rapportent à deux domaines particuliers de la géométrie qui ne sont repris dans aucune autre thèse de géométrie pendant l'entre-deux-guerres : la géométrie finie de Juel (travaillée par Paul Montel et André Marchaud pendant l'entre-deux-guerres mais hors du corpus des thèses mathématiques) et la géométrie anallagmatique.

### 4.3.1 Les thèses de géométrie différentielle

Comme je l'ai expliqué lors de la présentation de ma méthode de classement, le mot-clé « géométrie différentielle » correspond essentiellement à la sous-section du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* qui porte le même nom<sup>110</sup>. La part des thèses classées dans ce sous-domaine est supérieure aux parts occupées par les autres sous-domaines de la géométrie, pendant l'ensemble de la période. Dans le même temps, les références mathématiques citées par les doctorants, les thèmes qu'ils abordent ainsi que les méthodes qu'ils utilisent évoluent.

L'étude des références mathématiques citées par les doctorants permet de dégager plusieurs dynamiques.

Un premier ensemble de thèses se fonde sur les travaux de Darboux d'avant-guerre et sur ces prolongements. Certains de ces mémoires ne se réfèrent qu'aux recherches de Darboux. D'autres citent également les travaux de Guichard, tout en conservant l'héritage des travaux de Darboux. D'autres ne citent enfin que les travaux de Guichard et prennent leur autonomie par rapport aux recherches de Guichard. Il se trouve que ces doctorats sont soutenus dans un intervalle de temps assez réduit qui va de 1919 à 1923. Pendant cet intervalle, toutes les thèses classées en géométrie différentielle font référence à Darboux et/ou à Guichard.

Un deuxième ensemble de mémoires se regroupe autour des travaux d'Élie Cartan. Ce dernier est la référence principale à plusieurs thèses soutenues dans les années 1920 et dans les années 1930. Ce ne sont pas les mêmes travaux d'Élie Cartan qui sont cités à chaque décennie. Mais la place, essentielle, accordée dans les mémoires aux travaux de ce dernier demeure. Parmi cet ensemble de thèses, on distingue en particulier celles qui sont soutenues entre 1923 à 1928. Aucun autre doctorat classé en géométrie différentielle n'est soutenu pendant cette période. Ce n'est pas pareil dans la suite de l'entre-deux-guerres.

Au cours des années 1930, d'autres mémoires, qui ne se réfèrent pas aux travaux d'Élie Cartan sont soutenus. Trois d'entre eux sont réalisés sous l'influence de Gambier. Pour le reste, ils forment des îlots beaucoup plus isolés et n'ont pas de références

---

110. Pour rappel, cette dernière section du *Jahrbuch* reste stable jusqu'en 1939. J'ai également regroupé avec cette section les rubriques suivantes « variétés riemanniennes », « géométrie différentielle dans les espaces euclidiens » et « géométrie différentielle de groupes de Lie particuliers », sections qui apparaissent dans le *Jahrbuch* après 1939.

vraiment communes. Certains généralisent des résultats présentés dans des thèses des années 1920, d'autres abordent des thèmes qui ne sont repris dans aucun autre mémoire, certains étudient enfin des sujets à l'interface avec l'analyse ou la topologie.

### Des thèses de Darboux à Guichard

L'étude des références mathématiques citées dans les doctorats permet de distinguer tout d'abord cinq mémoires soutenus entre 1919 et 1923 : il s'agit des mémoires de Clapier<sup>111</sup>, de Haumé-Hérouard<sup>112</sup>, de Lebel<sup>113</sup>, de Raymond Jacques<sup>114</sup>, de Vaultot<sup>115</sup>. Ce sont les seuls doctorats classés en géométrie différentielle à être soutenus pendant cette période. À ces cinq mémoires il faut en rajouter un sixième, celui de Louis Long<sup>116</sup>, soutenu en 1926 et qui utilise des références mathématiques similaires aux cinq premiers pour aborder des sujets semblables.

Parmi les six doctorants, un seul est normalien, Raymond Jacques. Un autre, Haumé-Hérouard, est un ancien élève de l'École centrale des arts et manufactures<sup>117</sup>. Je n'ai pu obtenir de renseignements sur les autres doctorants hormis qu'aucun d'entre eux n'est étranger. Le domaine de la géométrie différentielle n'est donc pas investi, à l'époque, par une certaine élite des étudiants en mathématiques, que peut incarner l'École normale supérieure.

Ces six mémoires sont centrés sur l'étude de surfaces ou l'étude de congruences (congruences rectilignes, congruences de normales, congruences de courbes) avec application de certains de leurs résultats à la théorie des surfaces<sup>118</sup>. D'après les rapports et les introductions de thèses, leur domaine commun est celui de la géométrie infinitésimale<sup>119</sup>.

Ils ont en outre un autre point commun : la composition de leur jury. Claude Guichard est ainsi le rapporteur de cinq de ces 6 thèses et Koenigs préside le jury de quatre d'entre elles<sup>120</sup>. Il ne peut en être de même pour la thèse de Louis Long soutenue

111. *Sur les surfaces minima ou ellasoïdes*, 1919

112. *Contribution à l'étude des surfaces réelles rapportées aux coordonnées curvilignes de leurs lignes de courbure*, 1920

113. *Sur les surfaces isothermiques et les systèmes cycliques*, 1921.

114. *Sur les surfaces telles que les axes des cercles osculateurs à une famille de courbure appartiennent à un complexe linéaire*, 1922.

115. *Congruences rectilignes qui sont en même temps  $W$  et de Ribaucourt*, 1923.

116. *Sur certaines transformations par polaires réciproques relativement au complexe linéaire et à la sphère*, 1926

117. Il est d'ailleurs au moment de la soutenance de son doctorat directeur des études de cette école, comme l'indique l'annotation sur la page de garde de son manuscrit, HAUMÉ-HÉROUARD 1920.

118. C'est le cas des deux mémoires de Vaultot et de Long.

119. C'est-à-dire, la géométrie qui a pour objet les courbes et les surfaces dans l'espace à 3 dimensions et qui considère des infiniment petits pour décrire ces objets, i.e. des formes fondamentales (la première étant la métrique  $ds^2$ ).

120. Celles de Clapier, Lebel, Jacques et Vaultot. Picard est le président du jury de celle d'Haumé-Hérouard.

en 1926 deux ans après la mort de Guichard : Élie Cartan en préside le jury et il en est le rapporteur.

Parmi ces six mémoires, les deux premiers, écrits par Clapier et Haumé-Hérouard, portent exclusivement sur les travaux de Gaston Darboux et plus précisément sur la détermination des surfaces réelles à partir de leurs lignes de courbure. Clapier étudie la détermination des surfaces minima déduites de la représentation sphérique de leur lignes de courbure ou déduites de l'étude des congruences de courbes normales à une famille de surfaces. Il fait également le lien entre les méthodes géométriques employées pour cette détermination et la résolution de certaines équations aux dérivées partielles<sup>121</sup>. Quant à Haumé-Hérouard, il étudie les propriétés géométriques des surfaces telles que l'équation de Laplace qui correspond aux réseaux des lignes de courbure soit intégrable<sup>122</sup>. Il reprend les méthodes et les démonstrations de Darboux pour intégrer les équations linéaires aux dérivées partielles du problème<sup>123</sup>. Haumé-Hérouard fait également le lien entre les problèmes de représentation sphérique de la surface (déjà étudiés par Clapier) et la transformation des équations par la méthode de Moutard et par la méthode analytique de Laplace. Il détermine enfin un certain nombre de surfaces rapportées aux coordonnées curvilignes de leurs lignes de courbure.

Ainsi, Clapier et Haumé-Hérouard font dans leurs thèses respectives l'étude différentielle des surfaces de l'espace réel. Les *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal* de Darboux sont citées par les deux doctorants. Dans leurs introductions respectives, ils désignent en outre les *Leçons* comme l'une des origines de leurs recherches.

Clapier prend, de plus, comme autre point de départ le mémoire de Ribaucour de 1881, *Les élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle*, couronné par l'Académie des sciences de Belgique. Ce n'est pas ce mémoire qu'il semble étudier directement. Il évoque en effet davantage le travail de Darboux, DARBOUX 1894, dans lequel ce dernier reprend les principaux résultats obtenus sur les surfaces à courbure moyenne nulle. Clapier revendique d'ailleurs sa « fidélité » à la pensée de « son éminent maître Darboux »<sup>124</sup>.

Haumé-Hérouard ne cite que les travaux de Darboux, dont il cherche à prolonger les résultats. Il étudie en effet les propriétés géométriques des surfaces dont Darboux a établi l'existence. Guichard dans le rapport sur la thèse précise d'ailleurs que Haumé-Hérouard a entrepris sa recherche pour « répondre [au] désir » de Darboux d'étudier géométriquement ces surfaces.

121. Cf. CLAPIER 1919, p. 1-2 et le rapport de Guichard sur la thèse.

122. Cf. le rapport qu'écrit Guichard sur la thèse.

123. Haumé-Hérouard cite à plusieurs reprises les méthodes employées par Darboux dans cet ouvrage et fait référence explicitement aux tomes 2 et 4, DARBOUX 1915, Chapitre VII et DARBOUX 1896, chapitre VIII.

124. CLAPIER 1919, p. 2.

Pour reprendre les termes employés par Hélène Gispert dans GISPERT 1991, p. 102, Clapier comme Hérouard font donc de la « géométrie infinitésimale française à la Darboux », géométrie que le mathématicien de 1880 jusqu'à sa mort, en 1917, a imposé sur la scène mathématique française et qui peut se décrire en ces termes : « l'étude différentielle des surfaces et des courbes de l'espace réel »<sup>125</sup>. Il s'agit donc de mathématiques d'avant-guerre qui sont travaillées dans le cadre de ces deux mémoires et qui reprennent l'héritage de Darboux.

Dans les quatre mémoires suivants, on constate une évolution des références et des méthodes employées par les doctorants. Gaston Darboux et les quatre tomes de ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal* ne constituent plus l'unique et la principale référence de ces travaux.

La thèse de Lebel, LEBEL 1921, est la première, chronologiquement, à ne plus se référer uniquement aux travaux de Gaston Darboux. Lebel s'intéresse principalement aux surfaces isothermiques. Il cherche à en déterminer de nouvelles classes en imposant certaines conditions sur les éléments infinitésimaux de la surface rapportée à ses lignes de courbure<sup>126</sup>. Il étudie également les propriétés géométriques des surfaces isothermiques en regardant notamment la famille des sphères harmoniques de la surface et les nappes de leur enveloppe.

Les méthodes utilisées par Lebel apparaissent classiques et fondées sur des résultats de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle. Le doctorant cite à plusieurs reprises la classification des surfaces d'O. Bonnet, qu'il complète en partie. Il évoque des résultats de Darboux dont il se sert pour montrer l'existence de surfaces isothermiques formant les nappes d'une enveloppe de sphères. À l'occasion de son étude, Lebel retrouve les surfaces de Thybaut<sup>127</sup> et les surfaces  $(M)$  de Darboux<sup>128</sup> comme des cas particuliers de ses

125. Cf. GISPERT 1991, p. 102 et le Chapitre 1 de la présente thèse. On retrouve parmi les sujets traités par les doctorants certains des thèmes étudiés par Darboux et que décrit Picard dans PICARD 1917, p. 89-89 : « Ses travaux, dans cet ordre d'idées, se rapportent à l'applicabilité des surfaces, de la représentation sphérique, des surfaces à courbure constante, des systèmes orthogonaux. Darboux excelle à établir des rapprochements entre diverses questions : telles ses études sur la déformation des surfaces du second degré et la transformation des surfaces à courbure totale constante ou sur les surfaces isothermiques liées à la déformation des quadriques. [...] Il faut aussi signaler ses recherches sur les cercles géodésiques et sur les surfaces isothermiques, c'est-à-dire à lignes de courbure isothermes... ».

126. Avec ce choix de coordonnées, la métrique (le  $ds^2$ ) et la deuxième forme fondamentale prennent des formes simples (diagonales).

127. Les surfaces de Thybaut datent du premier quart du XX<sup>ème</sup> siècle. Thybaut les a introduites pour la première fois dans sa thèse *Sur la déformation du paraboloidé et sur quelques problèmes qui s'y rattachent*, 1897, où il fait le lien entre la déformation du paraboloidé de révolution et la détermination de surfaces isothermiques, cf. THYBAUT 1897. Il les a ensuite reprises dans son mémoire, *Sur une classe de surfaces isothermiques*, THYBAUT 1900. Dans l'introduction de ce dernier travail, Thybaut fait référence aux travaux de Darboux et en particulier à ses *Leçons*, comme le fait également Lebel dans sa thèse.

128. que ce dernier introduit dans DARBOUX 1894. Cf. LEBEL 1921, p. 2-5.

résultats. Dans une troisième partie de son mémoire, Lebel fait également référence à la classification de Guichard des systèmes cycliques<sup>129</sup>.

Le travail de Lebel est donc influencé par la géométrie de Darboux mais non de façon aussi exclusive que les deux thèses précédentes<sup>130</sup>. Il fonde ses recherches sur des travaux qui ne sont pas uniquement écrits par Darboux. Il cite d'autres mathématiciens comme Guichard. Certains des travaux auquel se réfère Lebel constituent une étape intermédiaire entre les recherches de Darboux et celle du doctorant : Thybault, par exemple reprend certains résultats de Darboux.

Comme Clapier et Haumé-Hérouard, les références mathématiques utilisées par Lebel datent ainsi pour l'essentiel de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle et du début du XX<sup>ème</sup> siècle. Cependant, il ne se fonde pas uniquement sur Darboux mais également sur d'autres mathématiciens, dont Claude Guichard. Les travaux de ce dernier seront ensuite repris dans d'autres doctorats<sup>131</sup>.

La place des références aux travaux Guichard augmente en effet dans les deux doctorats suivants, ceux de Jacques et de Vaultot, alors que les références aux travaux de Darboux y disparaissent quasiment.

Raymond Jacques débute ainsi l'introduction de son mémoire<sup>132</sup> par une référence au cours de Géométrie supérieure de Guichard de 1920-1921<sup>133</sup> et par la « série de résultats nouveaux relatifs à la géométrie infinitésimale du complexe linéaire » qu'il y a exposés. Raymond Jacques se propose d'« appliquer les méthodes qu[e Guichard] a indiquées à la détermination des surfaces qui sont telles que les axes des cercles osculateurs à une famille de lignes de courbure appartiennent à un complexe linéaire »<sup>134</sup>. D'après le rapport écrit par Guichard, il s'agit d'une question « très difficile » et qui n'a pas encore été traitée jusqu'alors. Jacques adopte deux points de vue différents. Il étudie en premier les congruences et les réseaux qui se déduisent d'une surface rapportée à ses lignes de courbure<sup>135</sup>. Il considère ensuite les rotations du trièdre attaché à la surface. Dans toute son introduction, Jacques fait référence, à plusieurs reprises, aux mémoires

129. Il s'agit de déduire ces systèmes d'un réseau conjugué des lignes de courbures d'une surface dont on connaît le  $ds^2$ . Même s'il ne le cite pas explicitement, Lebel fait sans doute référence aux mémoires de Guichard : *Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques*, 1897, 1898 et 1903, GUICHARD 1897, 1898, 1903a,b.

130. Les références en attestent comme le sujet du mémoire. D'après la citation de Picard retranscrite dans une note précédente (n° 125), les surfaces isothermiques ont été déjà travaillées par Darboux.

131. ce qui n'est pas le cas des travaux de Thybault et de Bonnet.

132. *Sur les surfaces telles que les axes des cercles osculateurs à une famille de lignes de courbure appartiennent à un complexe linéaire*, 1922, JACQUES 1922.

133. Rappelons que Guichard était titulaire de la chaire de Géométrie supérieure de la faculté des sciences de la Sorbonne depuis 1918, cf. CHARLE et TELKES 1989.

134. Cf. JACQUES 1922, p. 1.

135. Il s'agit non seulement des réseaux formés par les centres de courbure de  $S$  mais aussi des réseaux conjugués aux deux congruences focales du réseau formé par les centres de courbure ainsi que des réseaux conjugués à la projection de ces congruence suivant l'axe du complexe linéaire considéré, cf. le rapport de Guichard ainsi que JACQUES 1922, p. 2.



de Guichard de 1903<sup>136</sup>, dont il reprend certains résultats et certaines méthodes. Lebel précise également qu'il réutilise toutes les notations introduites par Guichard dans ses publications. Raymond Jacques se réfère à un seul autre mathématicien, Wilczynski. Il reprend et étend les résultats de ce dernier sur les réseaux<sup>137</sup>.

Du point de vue des références citées, Jacques se distingue des précédents docteurs. Il ne fonde pas ses recherches sur celles de Darboux et, s'il évoque le mathématicien, c'est pour signaler que ce dernier a considéré des surfaces que lui-même étudie, mais d'un point de vue différent<sup>138</sup>. Le travail de Jacques est en fait surtout influencé par les recherches de Guichard<sup>139</sup>.

Dans son doctorat, Vaultot ne cite pas de la même façon les travaux de Guichard<sup>140</sup>. De façon générale, il accorde une place moins grande aux références mathématiques que Jacques dans son introduction<sup>141</sup>.

Son travail concerne les congruences rectilignes de Ribaucour<sup>142</sup>. Il ne s'agit donc pas du même thème que celui de Jacques. Les recherches de Vaultot sont davantage reliées aux équations aux dérivées partielles vérifiées par certains paramètres de la congruence. Il étudie également les conditions que doivent vérifier ces paramètres pour que les congruences soient W et de Ribaucour.

Les seuls mathématiciens qu'il cite sont Lelievre, dont il réutilise une méthode pour étudier certaines équations aux dérivées partielles<sup>143</sup>, ainsi que Guichard, dont il retrouve un des résultats. Même si les thèmes du mémoire de Vaultot diffèrent de ceux de Jacques, ils se rapprochent des sujets de thèses précédemment soutenues, comme celle de Clapier<sup>144</sup>. Cependant, au contraire de Clapier, Vaultot ne cite pas explicitement Darboux ni l'un de ses travaux dans son introduction. Guichard ne le mentionne pas non plus dans le rapport de thèse<sup>145</sup>. Vaultot remercie explicitement à la fin de son

136. Cf. GUICHARD 1903a,b, c'est le même qui était implicitement évoqué par Lebel précédemment.

137. Jacques cite le mémoire de Wilczynski, *Sur la théorie générale des congruences* de 1911 publié par l'Académie Royale de Belgique.

138. Cf. JACQUES 1922, p. 2-note 2.

139. La différence entre ce mémoire et les précédents se perçoit également concrètement dans la forme du rapport écrit par Guichard. Ce rapport est le plus long en taille de tous les rapports rédigés précédemment par le mathématicien. Guichard décrit précisément toutes les étapes de la thèse de Jacques en réutilisant ses propres notations, sans citer toutefois ses propres travaux.

140. Cf. VAULOT 1923.

141. Il ne fait ainsi aucune référence exacte à un ouvrage mathématique dans son introduction.

142. Pour reprendre la définition que donne Guichard dans le rapport « une congruence de Ribaucour est caractérisée par le fait que les paramètres de la droite qui décrit la congruence, supposée rapportée à ses développables, satisfait à une équation de Laplace à invariants égaux ». D'après le rapport de Guichard et VAULOT 1923, p. 1, une congruence est W si « les asymptotiques se correspondent sur deux surfaces focales ».

143. Les équations aux dérivées partielles vérifiées par les coordonnées d'un point de la surface génératrice de la congruence de Ribaucour.

144. Ce dernier partait des recherches de Ribaucour sur les surfaces à courbure moyenne nulle, réutilisait ses notations ainsi que sa méthode d'étude de congruences pour en déduire des résultats sur la surface correspondante.

145. Alors qu'il le mentionnait explicitement dans le rapport sur la thèse de Clapier.

avant-propos Guichard pour lui avoir « indiqué le sujet de [son] travail » et l'avoir conseillé (ce que ne faisait pas Clapier). Vaultot est le seul parmi les doctorants à le faire avec autant d'insistance<sup>146</sup>. De plus, Vaultot est le premier où le nom de Darboux n'est plus cité.

À cet ensemble de mémoires de géométrie différentielle influencés successivement par les travaux de Darboux et ceux de Guichard en géométrie infinitésimale, on peut rajouter un autre mémoire, celui de Louis Long<sup>147</sup>, soutenu plus tardivement en 1926. Louis Long y fait explicitement référence aux travaux de Guichard<sup>148</sup>. D'après le rapport d'Élie Cartan, l'objet principal de la thèse de Long est « la détermination de congruences de normales qui restent congruences de normales quand on les transforme par polarité relativement à un complexe linéaire ». Il s'agit ainsi d'un sujet très proche de ceux qui sont travaillés dans les thèses précédentes<sup>149</sup>. En outre, Louis Long utilise exclusivement les notations et les méthodes introduites par Guichard. D'après le rapport de Cartan, il n'emploie aucune méthode originale<sup>150</sup>. La référence principale de Long est mentionnée par Cartan dans son rapport : il s'agit des mémoires de Guichard de 1903, GUICHARD 1903a,b, les mêmes auxquels se réfèrent Jacques et Vaultot dans leurs thèses.

On peut s'interroger sur l'importance à accorder à ce travail si on le compare aux cinq précédents. D'après Élie Cartan, qui insiste sur ce point dans le rapport de thèse ainsi que dans le rapport de soutenance, le mémoire de Long se distingue par la « parfaite connaissance des travaux importants de Guichard », mais il ne fournit pas de résultats ou de méthodes originaux. La mention obtenue par le doctorant n'est d'ailleurs que la mention « honorable » alors que les cinq autres avaient obtenu la mention « très honorable ». Le mémoire de Long est soutenu trois ans après celui de Vaultot. Entre temps, Claude Guichard est décédé en 1924 et d'autres mémoires classés

146. Avant Vaultot, seul Jacques avait exprimé de la « gratitude » envers la « bienveillance et les conseils » de Guichard, JACQUES 1922, p. 4, mais d'une façon plus formelle, tandis que les autres, Clapier, Haumé-Héroutard et Lebel, se sont contentés d'un hommage.

147. *Sur certaines transformations par polaires réciproques relativement au complexe linéaire et à la sphère*, 1926.

148. Il rend d'ailleurs hommage à sa mémoire en préface de sa thèse.

149. D'ailleurs, dans les années 1930, Louis Long travaillera sur les congruences  $W$ , c'est-à-dire le thème abordé par Vaultot dans sa thèse (cf. notamment « Nouvelles définitions des surfaces de Weingarten (surfaces  $W$ ) », *Bulletin de la Classe des sciences de l'Académie de Bruxelles*, (5) 21, p. 906-921. 1935).

150. Contrairement aux mémoires précédents de géométrie différentielle, la thèse de Louis Long ne contient pas d'introduction où sont présentés les objectifs du travail, les principaux résultats obtenus, les influences diverses de travaux mathématiques. Dès l'introduction, le doctorant introduit les notions mathématiques qu'il considère. Seule une table des matières figure à la fin du manuscrit, LONG 1926, p. 118-119, qui indique le plan général du travail. Cette dernière indique une utilisation explicite des méthodes de Guichard, cf. LONG 1926, p. 7 et p.118. Long adapte et étend aux réseaux et aux congruences de plan les notions fondamentales de Guichard relatives aux espaces à plus de 3 dimensions. On y retrouve également les mêmes notations pour les congruences que celles qui sont employées dans les travaux de Jacques et de Vaultot (comme par exemple les congruences  $(G)$ , les congruences  $(O'_c)$ ).

en géométrie différentielle sont soutenus, des mémoires qui ne se réfèrent plus aux travaux de Darboux ou à ceux de Guichard, mais à ceux de Cartan<sup>151</sup>. Long apparaît alors comme un étudiant que la mort de Guichard a laissé sans protection dans un domaine de la géométrie qui change radicalement avec Cartan. Son travail marque la fin d'une dynamique de recherche centrée sur la géométrie infinitésimale.

En effet, comme l'étude des introductions et des rapports de ces 6 mémoires le révèle, il s'agit bien d'une dynamique de recherche. Elle est mise en valeur par les références successives aux travaux de Darboux puis à ceux de Darboux et de Guichard et enfin à ceux de Guichard seuls. Le thème reste quant à lui constant : les travaux portent sur l'étude différentielle de surfaces ou de congruences (congruences rectilignes ou congruences de normales).

Cette dynamique a ainsi son origine dans les travaux de Darboux de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle. Son développement est ensuite poursuivi par Guichard, lui-même élève de Darboux<sup>152</sup>, qui influence les travaux des doctorants.

Guichard est en effet présent sur le front de la recherche pendant toute le premier quart de siècle de 1900 jusqu'à sa mort en 1924. Il publie, au même moment où Clapier et Haumé-Hérouard soutiennent leur thèse, des articles sur des sujets voisins de ceux abordés par les deux doctorants. Certains d'entre eux sont ensuite repris par Jacques, Vaultot et Long<sup>153</sup>. Il a ainsi déjà publié sur les surfaces isothermiques, sur les congruences appartenant à un complexe linéaire, sur les congruences particulières (telles W), sur les surfaces telles que leurs lignes de courbure forment des réseaux particuliers, etc.<sup>154</sup>. Guichard exerce ainsi une influence intellectuelle certaine sur les mémoires regroupés dans ce premier ensemble. Cette influence intellectuelle s'ajoute au rôle institutionnel qu'il tient à cette même époque comme le traduit sa présence dans les jurys des cinq premières thèses. Après sa mort, l'influence intellectuelle de Guichard de ce dernier ne continue à s'exercer que sur un seul autre mémoire : celui de Long en 1926. La dynamique de recherche auxquelles ces thèses participaient s'interrompt alors : on n'en perçoit plus de trace dans le reste du corpus des thèses parisiennes<sup>155</sup>.

151. Cf. la partie suivante.

152. Comme il le revendique dans le rapport sur la thèse d'Haumé-Hérouard.

153. En effet, si on regarde la liste des publications fournies par le *Jahrbuch* (cf. en annexe de la thèse), on constate la proximité des sujets travaillés par Guichard avec ceux qui sont étudiés par les doctorants sus-cités.

154. Mis à part les surfaces minima sur lesquels Guichard ne publie aucun article entre 1900 et 1926 dont le titre contient ce terme, on peut en effet rapprocher chacun des 5 autres mémoires de ceux de Guichard. Il faut en fait regarder les publications de Guichard antérieures à 1900 pour trouver des articles ayant pour sujet explicite les surfaces minima : « Sur les surfaces minima non euclidiennes », *Annales de l'École Normale Supérieure*, 1896, (3) 13, 401-414 et « Sur les surfaces minima », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 1898, 126, 1487-1489.

155. Les travaux de Guichard sont cependant cités dans une autre thèse, celle de Paul Vincensini, *Sur trois types de congruences rectilignes*, soutenue à la faculté des sciences de Toulouse en 1927. Paul Vincensini cherche à établir des relations géométriques entre trois types de congruences rectilignes : les « congruences à surface moyenne plane » (étudiées par Guichard), les « congruences à enveloppée

Si on considère le domaine de la géométrie infinitésimale plus général et non plus celui défini par Darboux, il faut mentionner un autre doctorat, celui d'Axel Egnell, *Géométrie infinitésimale vectorielle*. Egnell adopte un point de vue différent par rapport aux six thèses de l'ensemble précédent. Il cherche à appliquer les méthodes du calcul vectoriel à l'étude d'un champ vectoriel quelconque (le champ formé par les normales à une famille de surfaces, par exemple) ainsi qu'à l'étude de problèmes sur les surfaces ou sur les congruences<sup>156</sup>. Guichard considère le travail d'Egnell comme l'exposé d'une nouvelle méthode de démonstration pour des problèmes similaires à ceux qui ont pu être abordés dans les thèses précédentes sans recours au calcul géométrique. Les références mathématiques citées par le doctorant sont donc différentes : il ne s'agit ni des travaux de Darboux ni de ceux de Guichard, mais de travaux de Burali-Forti, Marco-Longo, Fehr ou Wilson qui appliquent le calcul géométrique, la méthode vectorielle de Grassmann ou la méthode de Gibbs à des questions de géométrie infinitésimale et à la théorie des surfaces<sup>157</sup>. De fait, la thèse d'Egnell ne peut être intégrée au premier ensemble de mémoires que j'ai distingué. On peut cependant signaler qu'Egnell retrouve des propriétés qu'il qualifie de classiques et qui sont citées et démontrées par une autre méthode par Darboux dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces*. Il redémontre ainsi les formules de Codazzi sur les trajectoires orthogonales à un champ unitaire quelconque ou les formules de Laguerre-Darboux sur les dérivées secondes d'un vecteur perpendiculaire à une famille de surfaces<sup>158</sup>.

### Élie Cartan comme référence principale

Alors que l'élan des cinq premières thèses de géométrie infinitésimale, influencées par Darboux puis Guichard entre 1919 à 1923, se termine, dès 1923, d'autres doctorats classés en géométrie différentielle sont soutenus. Ces premiers doctorats citent principalement les travaux d'Élie Cartan et étudient de nouveaux problèmes avec des méthodes empruntées au mathématicien. Les références aux travaux de ce dernier occupent une place importante dans une dizaine de thèses soutenues pendant les années 1920 et pendant les années 1930. L'ensemble formé par cet ensemble de mémoires révèle une seconde dynamique de recherche, centrée sur certains travaux d'Élie Cartan.

Le point commun à ce groupe de thèses est en effet la référence au mathématicien. Cependant ce ne sont pas les mêmes travaux qui sont cités dans les doctorats des années

---

moyenne point » (étudiées par Ribaucour, Appell, Goursat et Bianchi) et les « congruences à foyers associés (situés sur un même rayon) équidistants d'une droite fixe », cf. VINCENSINI 1927, p. 93-94.

156. Cf. EGNELL 1919, p. 2 et Guichard dans le rapport de thèse. Dans le cadre décrit ci-dessus, la notion fondamentale que considère Egnell est celle de la « dérivée d'un vecteur fonction de point, prise dans les différentes directions d'un plan de l'espace », EGNELL 1919, p. 2. Egnell emprunte cette notion aux ouvrages auxquels il emprunte des méthodes de calcul géométrique, ceux de Burali-Forti ou Marco-Longo, par exemple.

157. Cf. EGNELL 1919, p. 1-4.

158. Cf. EGNELL 1919, p. 4.

1920 et dans ceux des années 1930. Ceux des années 1920 se réfèrent à la méthode de trièdre mobile du mathématicien et à sa théorie des invariants de Pfaff, qu'ils appliquent à différents problèmes. Les mémoires des années 1930 et du début des années 1940 sont liés à sa théorie des espaces généralisés.

Avant que les doctorats centrés sur les travaux de Cartan soient soutenus, un premier doctorat, soutenu en 1923, se démarque des thèses de la dynamique précédent : celui d'un étudiant normalien, René Lagrange, *Calcul différentiel absolu*, 1923<sup>159</sup>. René Lagrange ne fait plus ni l'étude de surfaces, ni celle de congruences et ne se réfère ni à Darboux ni à Guichard.

Dans sa thèse, René Lagrange généralise le calcul différentiel absolu créé par Ricci et Levi-Civita, ces derniers proposant une généralisation et une formulation intrinsèque des recherches commencées par Christoffel et Riemann<sup>160</sup>. D'après les descriptions qu'en donnent René Lagrange ou Élie Cartan, le problème originellement traité par Christoffel est lié à la recherche des conditions pour que deux formes quadratiques de différentielles de  $n$  variables puissent être ramenées l'une à l'autre par un changement de variables. Dans son travail, René Lagrange adopte un point de vue différent de celui de Christoffel. Il ne prend plus comme variables indépendantes des fonctions de points<sup>161</sup> mais  $n$  intégrales curvilignes. Il cherche alors à étendre les procédés du calcul différentiel absolu avec ces nouvelles variables et à l'appliquer à divers problèmes tels que celui de la représentation conforme ou celui des propriétés métriques d'une variété de dimension  $p$ ,  $V_p$ , dans un espace général à  $n$  dimensions  $E_n$ .

Dans la présentation que fait René Lagrange de sa généralisation du calcul différentiel absolu, il ne cite aucune référence mathématique à l'origine de son travail ou qui aurait influencé sa recherche<sup>162</sup>. Cependant, Élie Cartan dans son rapport rapproche le point de vue adopté par le doctorant du sien, même s'il précise que ses propres mémoires « ne semblent pas [...] avoir influencé M. Lagrange ». Il souligne également les

159. Publié également dans les *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse* (3) 14, p.1-69. 1922.

160. Cf. LAGRANGE 1923, p. 1. Dans le rapport, Cartan mentionne également certains de ces mathématiciens (Christoffel et Levi-Civita). Il évoque l'utilisation que fait Lagrange de certains de leurs travaux dans ses recherches.

161. Dépendant des coordonnées euclidiennes  $x_i$ .

162. Dans GODEMENT 2002, p. 146-147, Roger Godement livre, de son point de vue, quelques informations sur l'histoire du calcul absolu dont traite la thèse de Lagrange. Godement avait d'ailleurs lu le fascicule du *Mémorial des sciences mathématiques*, « Calcul différentiel absolu », contenant l'essentiel de la thèse de René Lagrange, avant la seconde guerre mondiale et avant même de soutenir sa propre thèse. Il écrit : « le mot «absolu»[...] avait été introduit par les Italiens qui avaient peut être lu Balzac. On y exposait l'analyse tensorielle dans les espaces de Riemman, notion très vaguement définie : on comprenait plus ou moins qu'il s'agissait d'espaces courbes à  $n$  dimensions dans lesquels on utilisait des systèmes de coordonnées curvilignes dont on pouvait changer à volonté par des formules n'impliquant que des fonctions aussi différentiables que nécessaires. [...] Tout cela était exposé sans faire la moindre allusion à ce que pouvait être un espace courbe, un espace vectoriel, une forme linéaire ou multilinéaire, etc. : les inventeurs et utilisateurs du calcul tensoriel étaient encore dans la situation d'un physicien qui ferait des calculs d'analyse vectorielle (gradient, rotationnel, divergence, etc.) sans savoir ce qu'est un vecteur ».

résultats de la théorie classique que l'étudiant retrouve<sup>163</sup>. L'influence de Cartan n'est pas explicite, cependant l'approche peut être comparée, aux dires même de Cartan, et les thèmes abordés par le doctorant sont proches de ceux travaillés par le mathématicien. La généralisation du calcul différentiel absolu que propose Lagrange a en effet pour base les  $n$  expressions de Pfaff  $d\omega_i$ , qu'Élie Cartan a travaillées dans de nombreuses publications<sup>164</sup>. Cependant les raisons qui ont poussé le doctorant à étudier le calcul différentiel ainsi qu'à considérer des formes de Pfaff dans sa généralisation me restent inconnues<sup>165</sup>.

Le travail de Lagrange rompt donc avec les précédents au niveau de la thématique et également au niveau des références citées. Cette rupture est en outre renforcée institutionnellement par des changements dans la composition du jury. Alors que Claude Guichard était le rapporteur des thèses précédentes, Élie Cartan occupe cette fonction pour la thèse de René Lagrange et également pour celles classées en géométrie différentielle qui seront soutenues par la suite. Cette évolution a lieu alors même que Claude Guichard est encore pour un an titulaire de la chaire de Géométrie Supérieure. En effet, Guichard occupe cette fonction depuis la mort de Gaston Darboux en 1917 : il l'a ainsi remplacé dans la chaire de Géométrie supérieure en 1918. Guichard meurt en mai 1924 et c'est Cartan qui lui succède à la faculté des sciences de Paris à partir du 1<sup>er</sup> novembre 1924<sup>166</sup>.

### Le trièdre mobile et la théorie des invariants de Pfaff

Le travail de René Lagrange n'est pas directement repris dans les autres thèses classées en géométrie. Certains thèmes et certaines références cités par le doctorant sont cependant repris en 1927 par Paul Delens dans sa thèse : *Méthodes et problèmes de géométrie différentielles euclidienne et conforme*. D'après Élie Cartan dans le rapport de thèse, Paul Delens se propose d'appliquer une méthode de calcul géométrique à

163. Cartan évoque par exemple les « résultats classiques de Christoffel » sur l'applicabilité.

164. Émile Picard dans l'allocution qu'il donne à l'occasion du jubilé d'Élie Cartan évoque l'emploi que fait Élie Cartan des expressions de Pfaff. Il cherche notamment des relations entre certains covariants bilinéaires de ces expressions. D'après Picard, ces travaux se rattachent à ceux d'Élie Cartan sur les groupes continus et infinis, CARTAN 1939, p. 9-11. Akivis et Rosenfeld dans AKIVIS et ROSENFELD 1993 ou Henri Poincaré dans le *Rapport sur les Travaux de M. Cartan*, POINCARÉ 1915 citent également tous les domaines où Cartan a utilisé ces expressions : dans la théorie des groupes continus infinis, dans la résolution des équations aux dérivées partielles (avec les systèmes d'équations de Pfaff). Tous ces travaux sont publiés avant la date de soutenance de René Lagrange, il n'est donc pas impossible qu'ils aient pu influencer la recherche de Lagrange, d'une façon ou d'une autre.

165. Il n'existe en fait presque aucun renseignement à son sujet : ni sur sa formation ni sur sa carrière ultérieure. Aucune nécrologie n'a été écrite à son sujet dans le Bulletin de l'*Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*. Je renvoie à sa fiche en annexe pour les rares informations que j'ai pu obtenir à son sujet.

166. Il y restera ensuite jusqu'à sa nomination en tant que professeur honoraire, admis à la retraite en avril 1940, cf. CHARLE et TELKES 1989, article : Cartan. Avant 1924, Élie Cartan était déjà, depuis 1912, professeur à la faculté des sciences de la Sorbonne : il a occupé de 1912 à 1920 la chaire de calcul différentiel et intégral, puis de 1920 à 1924 celle de mécanique rationnelle.

la résolution de problèmes des géométries différentielles euclidienne et conforme des courbes et des surfaces et de comparer ses résultats avec ceux obtenus par d'autres méthodes<sup>167</sup>.

Même si Paul Delens ne cite pas dans son travail les thèses de Lagrange ou d'Axel Egnell, on retrouve certaines des références mathématiques évoquées dans ces deux précédents doctorats. Ainsi, Paul Delens compare les résultats obtenus par sa propre méthode à ceux obtenus par les méthodes de calcul géométrique de mathématiciens tels Grassmann, Gibbs, Burali-Forti, Marcolongo, Boggio<sup>168</sup>. Il compare également sa méthode aux procédés de calcul géométrique mis au point par une « école hollandaise (Schouten, Struik, Hlavaty) » et reliés aux « méthodes du calcul différentiel absolu »<sup>169</sup>. Une dernière comparaison est faite avec les procédés de calcul basés sur les formes de Pfaff et la différentiation extérieure et développés par Élie Cartan<sup>170</sup>.

Dans les applications que Delens fait de cette méthode, Élie Cartan signale plusieurs développements originaux dans son travail en géométrie différentielle euclidienne. Delens étudie ainsi la théorie des réseaux angulaires sur une surface ou encore celle des faisceaux de congruences de Levi-Civita et Ricci en y introduisant de nouvelles notions. À cette occasion, Delens ne cite pas de travaux de Guichard ou de Darboux sur ce sujet<sup>171</sup>. Son approche semble nouvelle parmi le corpus des thèses mathématiques. On peut cependant s'interroger sur l'audience et la diffusion de ces résultats. En effet, dans deux autres thèses classées en géométrie différentielle dont le sujet central est l'étude de réseaux, celle de Dubourdieu en 1929, *Sur les réseaux de courbes et de surfaces*, et celle de Vasseur en 1930, *Sur la conservation d'un réseau conjugué dans la déformation d'une surface*, on ne trouve aucune mention ni des résultats de Delens, ni de ceux de Levi-Civita ou Ricci<sup>172</sup>.

167. Certaines « méthodes synthétiques » et les « méthodes de M. Cartan reposant en particulier sur l'emploi des formes de Pfaff ».

168. On retrouve ici les mêmes références mathématiques que dans le mémoire d'Axel Egnell. En outre, dans la note de la bibliographie que propose Paul Delens à la fin de son introduction, DELENS 1927, p. 7, se trouve mentionné un ouvrage récent d'Axel Egnell *L'Ochématique (le calcul vectoriel). Ses applications géométriques et ses rapports avec le calcul différentiel absolu*, 1926, ce qui contribue à rapprocher les travaux des deux doctorants.

169. Cf. DELENS 1927, p. 2.

170. On retrouve dans ces références au calcul différentiel absolu et à l'utilisation des formes de Pfaff des méthodes développées par René Lagrange dans son doctorat. Les articles ou ouvrages d'Élie Cartan auxquels se réfère le doctorant sont les suivants : *Leçons sur les invariants intégraux*, CARTAN 1922, et *La géométrie des espaces de Riemann*, CARTAN 1925.

171. J'ai indiqué précédemment que les deux mathématiciens ont abordé ce sujet : Darboux dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, Guichard dans plusieurs articles qui figurent dans la liste de ses publications en annexe de la présente thèse.

172. Dans la thèse de Sainte-Laguë, *Les Réseaux*, soutenue en 1925 mais classée en topologie, il n'est pas non plus fait référence à des travaux de Levi-Civita ou de Ricci sur les faisceaux, son approche étant tout à fait différente. Pour plus de détails, cf. la section ci-dessous relative aux thèses de topologie.

Les applications que fait Paul Delens de sa méthode à des problèmes de géométrie différentielle conforme sont presque exclusivement fondées sur les travaux d'Élie Cartan. Comme le souligne le mathématicien dans le rapport de thèse<sup>173</sup>, Delens reprend même le plan général et les notions fondamentales de l'article de Cartan, « Sur les espaces à connexion conforme », 1924<sup>174</sup>. Il reprend également toute sa théorie du repère mobile ainsi que ses méthodes d'étude des courbes et des surfaces pour mettre en place l'application de sa méthode de calcul.

Les références aux travaux d'Élie Cartan occupent ainsi dans la thèse de Paul Delens une place importante, que l'on retrouve également dans d'autres doctorats soutenus à cette même période des années 1920, entre 1923 et 1928, et également dans d'autres soutenus à la fin des années 1930. Delens aborde différents sujets qui seront repris par d'autres doctorants. Il étudie ainsi des problèmes de contact et d'applicabilité qui feront l'objet de deux thèses soutenues en 1928 et inspirées par les travaux de Cartan : celles d'Alexandre Pantazi<sup>175</sup> et de Lucien Féraud<sup>176</sup>. La thèse de Paul Delens est également le premier travail qui évoque la théorie des espaces à connexion conforme de Cartan et donc une partie de la théorie des espaces généralisés de Cartan. Cette théorie sera retravaillée explicitement dans des doctorats classés en géométrie différentielle des années 1930<sup>177</sup>.

L'étude de problèmes de géométrie conforme que réalise Delens s'inscrit en fait dans une dynamique de recherche dont l'origine est dans les travaux d'Élie Cartan et qui se manifeste à travers plusieurs doctorats de géométrie soutenus successivement dans les années 1920 : tout d'abord dans ceux de Paul Mentré<sup>178</sup> et de Victor Lalan<sup>179</sup> successivement soutenues en 1923 et 1924, puis dans celui d'Alexandre Pantazi en 1928<sup>180</sup>.

L'influence des travaux d'Élie Cartan dépasse pour cette période le cadre de la section « géométrie différentielle » constituée par ma méthode de classement. Deux thèses de 1928, classées en « géométrie algébrique », se réfèrent de façon tout aussi importante aux travaux du mathématicien : celle de Lucien Féraud, *Généralisation de*

173. ce qui confirme la description qu'en faisait Paul Delens dans son introduction DELENS 1927, p. 5.

174. *Annales de la société polonaise de mathématiques* (2), p. 171-221.

175. Pantazi A., *Sur l'applicabilité projective des hypersurfaces développables*, 1928. Cette thèse est classée en géométrie différentielle. Alexandre Pantazi y considère non pas des surfaces comme Paul Delens mais des hypersurfaces développables.

176. Cette dernière thèse, *Généralisation de correspondances ponctuelles qui établissent l'applicabilité projective*, est classée en géométrie algébrique.

177. Robert Potier reprendra d'ailleurs la théorie des espaces à connexion conforme abordée par Delens. Cf. la suite de cette sous-partie.

178. *Les variétés de l'espace réglé étudiées dans leurs propriétés infinitésimales projectives*, 1923.

179. *Sur les propriétés infinitésimales projectives des variétés à trois dimensions*, 1924.

180. *Sur l'applicabilité projective des hypersurfaces développables*, 1928. Entre 1924 et 1928, seules deux autres thèses sont soutenues : celle de Louis Long en 1926 qui marque la fin de la dynamique précédente sur les travaux de Darboux et de Guichard et celle de Paul Delens en 1927.



*correspondances ponctuelles qui établissent l'applicabilité projective*, et celle de Nicoladzé, *Sur les systèmes continus de figures géométriques*. Le mémoire de Lucien Féraud est étroitement relié à d'autres thèses classées en géométrie différentielle comme celle de Lalan ou de Pantazi<sup>181</sup>. Il n'en n'est pas de même pour le doctorat de Nicoladzé, qui se rapporte à d'autres travaux du mathématicien que ceux qui sont cités dans les thèses classées en géométrie différentielle. Le classement de la thèse de Féraud en géométrie algébrique pose toutefois problème, avant même l'étude de son contenu. En effet, une note de Féraud de 1927 aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, *Sur une généralisation des correspondances ponctuelles qui établissent l'applicabilité projective*<sup>182</sup>, est classée par les *Comptes rendus* en géométrie différentielle. Pantazi, dont la thèse est classée en géométrie différentielle, voit son travail dans la ligne directe de celui de Féraud d'après une note aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* qu'il publie en 1927<sup>183</sup>. On peut dès lors considérer le mémoire de Féraud comme un travail de géométrie différentielle<sup>184</sup>.

Un dernier fait témoigne de l'influence d'Élie Cartan : en plus d'être le mathématicien le plus cité par les doctorants ici désignés, il est le rapporteur de tous ces doctorats.

Le sujet des mémoires de Mentré, Lalan, Pantazi et Féraud ne porte plus exclusivement sur la mise en place d'une méthode de calcul géométrique, comme c'est le cas pour les thèses de René Lagrange en 1923 et de Paul Delens en 1927. Les doctorants choisissent une méthode de calcul pour aborder les différentes questions de géométrie et la conservent durant l'ensemble de leur mémoire sans la discuter. Paul Mentré et Victor Lalan explicitent leur choix dans l'introduction : ils utilisent les méthodes d'Élie Cartan. Paul Mentré utilise ainsi le « calcul extérieur » de Cartan<sup>185</sup> pour étudier les propriétés infinitésimales de l'espace réglé projectif et plus précisément les propriétés projectives des variétés réglées (surfaces, congruences, complexes) et leurs déformations.

D'après Mentré, Cartan a fondé cette méthode sur l'emploi des « covariants bilinéaires » et il l'a déjà appliquée à de nombreux problèmes de géométrie différentielle. D'après la description plus précise qu'en fait Élie Cartan dans le rapport, elle est fondée sur « l'emploi d'un système de référence (projectif) mobile, joint à l'utilisation systématique des relations qui expriment les covariants bilinéaires des composantes du

---

181. Je reviendrai plus précisément sur ce sujet et sur le problème de classification soulevé par ce mémoire.

182. Cf. FÉRAUD 1927.

183. Cf. PANTAZI 1927. Cette note est classée par les *Comptes rendus* en géométrie différentielle. .

184. D'après Jim Ritter, que je remercie pour ses remarques, le problème de classification se situe dans le rôle joué par des groupes (non-holonomiques) dans l'approche de Cartan. Ce rôle pousserait à un certain flottement entre géométrie différentielle et géométrie algébrique chez les rapporteurs du *Jahrbuch*.

185. Cf. MENTRÉ 1923, p. 6.

déplacement projectif instantané du repère au moyen de ces composantes elles-mêmes ». C'est cette méthode qui est parfois désignée par « méthode du repère mobile » dans la thèse de Mentré et également dans d'autres thèses comme celle de Lalan. D'ailleurs, Mentré et Lalan citent le même travail de Cartan comme référence pour l'exposé de cette méthode : *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien*, CARTAN 1919, 1920b<sup>186</sup>.

Cette méthode du repère mobile énoncée par Cartan est en fait une adaptation de la méthode antérieure du trièdre mobile de Darboux<sup>187</sup>. Elle permet l'emploi d'une méthode de calcul différentiel ordinaire<sup>188</sup>. Mentré comme Lalan rappellent dans leurs introductions respectives que Darboux est à l'origine de cette méthode<sup>189</sup> et ils insistent sur le fait que ce n'est plus cette méthode qu'ils utilisent dans leur travail. Ces deux mémoires se démarquent donc explicitement des recherches du mathématicien.

L'emploi de la méthode du repère mobile de Cartan conduit les deux doctorants à utiliser la méthode du « calcul extérieur » qui est celle qu'emploiera également Paul Delens en 1927. Pour cette dernière méthode, Mentré et Lalan se réfèrent tous les deux à l'ouvrage de Cartan *Leçons sur les invariants intégraux*, CARTAN 1922, qui est également celui que cite Paul Delens<sup>190</sup>. Victor Lalan utilise en outre une autre théorie de Cartan, la théorie des systèmes de Pfaff en involution, pour étudier des variétés ponctuelles à 3 dimensions<sup>191</sup>.

Les deux doctorats de Paul Mentré et de Victor Lalan se fondent, pour l'essentiel, sur certains travaux d'Élie Cartan<sup>192</sup>. Ils reprennent des méthodes du mathématicien, qu'ils appliquent à l'étude de certaines variétés. Ils approfondissent également certains résultats que le mathématicien n'avait pas démontrés. Dans les rapports qu'il écrit pour les deux thèses, Élie Cartan souligne ainsi que certaines des démonstrations réalisées par les doctorants correspondent à des résultats qu'il avait énoncés sans en donner de

186. Pour une description mathématique plus précise de cette méthode, je renvoie aux ouvrages de Cartan que mentionnent les doctorants et également à l'ouvrage qu'il a écrit un peu plus tardivement à la suite de conférences données à Moscou en 1930, *La méthode du repère mobile. La théorie des groupes continus et les espaces généralisés*, CARTAN 1935. La méthode est également exposée dans AKIVIS et ROSENFELD 1993, Chapitre 5.

187. Cf. DARBOUX 1914.

188. Choisir des coordonnées locales à chaque point au moyen du repère mobile permet en effet de travailler sur un espace euclidien (c'est-à-dire le plan tangent) et donc de pouvoir utiliser le calcul différentiel ordinaire.

189. Cf. LALAN 1924, p. 1 et MENTRÉ 1923, p. 5.

190. Victor Lalan décrit plus précisément cette méthode de calcul : elle est fondée d'après LALAN 1924, p. 2, note 1 sur « la théorie des formes à multiplication extérieure » et sur celle « de la dérivation extérieure des formes de Pfaff ».

191. En effet, d'après LALAN 1924, p. 2, « l'objet principal de [son] travail est de préciser la nature et le nombre des éléments arbitraires (constantes ou fonctions) qui entrent dans l'expression analytique [de ces] variétés ». Précisons que dans sa théorie des systèmes de Pfaff en involution, Cartan ne considère pas uniquement le cas des variétés à 3 dimensions. Il se place dans un cadre général.

192. Paul Mentré ne cite d'ailleurs aucun autre mathématicien dont il utilise les méthodes. Les références qu'il donne au début de son introduction correspondent à un rappel historique des différentes méthodes du trièdre mobile qui ont précédé celle de Cartan.

preuve. De plus, Victor Lalan applique les méthodes du mathématicien à une question particulière<sup>193</sup>, qui, d'après le rapport de thèse, n'avait auparavant été abordée que par deux mathématiciens : Sisam en 1911 et Élie Cartan dans une note aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* en 1918. Ces deux publications relatives à deux classes particulières des  $V_3$ <sup>194</sup> sont reprises par Lalan. Il en approfondit les résultats et continue l'étude de certains problèmes qui n'avaient pas été résolus. Lalan, en plus d'utiliser des méthodes d'Élie Cartan, approfondit certaines des études déjà réalisées par le mathématicien<sup>195</sup>. Le lien entre ses recherches et celles de Cartan apparaît donc particulièrement étroit. Les remerciements qu'adresse le doctorant au mathématicien sont plus développés que dans les autres thèses de géométrie différentielle<sup>196</sup>. Ils peuvent être interprétés comme un signe des connexions entre les recherches de Lalan et celles de Cartan et des liens intellectuels entre le doctorant et le mathématicien.

Après ces deux thèses soutenues à peu près au même moment en 1923/1924, il faut attendre trois ans pour avoir un nouveau groupe de thèses qui se rapportent aux travaux d'Élie Cartan avec la thèse de Paul Delens, déjà évoquée ci-dessus, celle d'un Roumain, Alexandre Pantazi, celle de Lucien Féraud, et celle d'un étudiant géorgien, Georges Nicoladzé.

La méthode du repère mobile et la théorie des systèmes de Pfaff en involution sont pour les trois mémoires de Pantazi, Féraud et Nicoladzé les principales méthodes utilisées par les doctorants. L'utilisation de ces méthodes est explicite surtout dans les travaux de Féraud et de Pantazi. Ces derniers se réfèrent aux mêmes théories mathématiques de Cartan que Mentré et Lalan. Ils citent également la thèse de Lalan comme référence<sup>197</sup>. Quant à Nicoladzé, il fait référence à l'aide de Cartan « dans le domaine

193. Celle de l'étude des variétés à 3 dimensions plongées dans un espace à un nombre quelconque de dimensions.

194. respectivement « les  $V_3$  dont l'hyperplan osculateur a 4 ou 5 dimensions » et les «  $V_3$  dont l'hyperplan osculateur a plus de 5 dimensions », cf. LALAN 1924, p. 3.

195. Signalons qu'il fait également référence à des travaux de géométrie projective infinitésimale des variétés de plusieurs autres mathématiciens tels que Segre, del Pezzo ou Levi ou encore Servant, Levi, Artom, Moore, cf. LALAN 1924, p. 4.

196. Aucun renseignement ne figure dans le manuscrit de Paul Mentré qui se contente de dédicacer son mémoire à Élie Cartan. En revanche, Victor Lalan termine son introduction en exprimant « toute la reconnaissance qu'[il] doit à M. Cartan pour l'intérêt qu'il n'a cessé de montrer pour [son] travail et pour les conseils précieux dont il a bien voulu [l']aider au cours de ces recherches », LALAN 1924, p. 4.

197. Cf. PANTAZI 1928, p. 9 et FÉRAUD 1928, p. 3. Pantazi écrit ainsi, PANTAZI 1928, p. 9 : « L'emploi de la méthode du repère mobile et des systèmes de Pfaff en involution dont M. Cartan a été le créateur et l'animateur, m'a été d'un secours certain pour simplifier, d'un côté, les démonstrations dans bien des cas et dans d'autres cas, comme par exemple celui où sont poussées plus loin les recherches de Bersano, comme moyen unique d'investigation ». Quant à Féraud, après avoir présenté les diverses questions qu'il étudie, il affirme que la méthode du repère mobile sera « appropriée à l'étude [de ces] trois questions » et la décrit en ces termes, FÉRAUD 1928, p. 3 : « Cette théorie, généralisation de celle de Darboux et aboutissement géométrique de la théorie de la structure des groupes continus d'une part, de celle des systèmes de Pfaff en involution d'autre part, est comme ces dernières presque entièrement l'oeuvre de M. Cartan. » Si Pantazi se réfère comme Mentré et Lalan à CARTAN 1919, 1920b pour la description de la théorie du repère mobile, Féraud évoque plusieurs autres travaux de Cartan où il

des méthodes géométriques »<sup>198</sup>. Cartan, dans les trois rapports de thèse, souligne d'ailleurs systématiquement l'emploi de ses méthodes géométriques pour aborder les problèmes posés. Il insiste d'ailleurs sur le fait que les trois doctorants savent « parfaitement » les utiliser. Il souligne cependant qu'ils n'y apportent « aucune contribution personnelle »<sup>199</sup>.

Les sujets de ces trois mémoires et notamment ceux de Pantazi et de Féraud sont tous reliés, à des degrés divers, à la théorie de l'applicabilité projective de figures, théorie sur laquelle Cartan a également déjà travaillé et publié. Féraud comme Pantazi débute d'ailleurs leur introduction en rappelant l'histoire du problème de l'applicabilité projective : d'abord posé et étudié par Fubini en 1916, il est ensuite repris et développé par Élie Cartan en 1920<sup>200</sup>. C'est du travail de Cartan que les deux doctorants reprennent l'énoncé du problème général de la déformation projective<sup>201</sup>.

Féraud et Pantazi étudient de façon approfondie cette théorie. Lucien Féraud regarde plus généralement la théorie des déformations projectives et la question des correspondances ponctuelles entre variétés qui définissent l'applicabilité projective. Il étudie notamment des conditions sur l'ordre de contact<sup>202</sup> et l'ordre d'application. Son problème général porte donc sur l'étude des « couples  $(s, S)$  de variétés à  $p$  dimensions dans un espace à  $n$  dimensions entre lesquelles on [peut] établir une correspondance ponctuelle permettant par un déplacement projectif convenablement choisi d'amener un point  $A$  quelconque de  $S$  sur son homologue de  $s$  de telle sorte qu'au point commun les deux variétés aient après le déplacement une application d'ordre  $h$  et un contact d'ordre  $h$  »<sup>203</sup>. Il est ainsi conduit plus précisément à étudier certaines variétés entre lesquelles peuvent exister de telles correspondances, les correspondances elles-mêmes ainsi que les propriétés du déplacement projectif qui amène une variété sur l'autre.

Cette étude menée dans un cadre général est directement reprise dans la thèse de Pantazi pour le cas particulier des variétés développables (des hypersurfaces développables). Pantazi part d'ailleurs de résultats obtenus par Féraud dans l'étude de ces correspondances plus générales et cite la thèse de Féraud comme référence de ses

expose également sa théorie : CARTAN 1920a et « La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile ». *Bulletin des sciences mathématiques*, (2) 34, p. 250-283, 1909.

198. Cf. NICOLADZÉ 1928, p. 4, cependant, dans son introduction, il ne cite aucune référence mathématique précise.

199. Cf. les trois rapports de thèses.

200. Les références mathématiques fournies par les deux doctorants sont identiques : il s'agit de Fubini, 1916, « Applicabilità proiettiva di due superficie », *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* 41 135-162 et Cartan, 1920, « Sur la déformation projective des surfaces », *Annales de l'École normale* 37 259-356.

201. Cf. FÉRAUD 1928, p. 1 et PANTAZI 1928, p. 7.

202. Il reprend cette notion des travaux de Cech et de Fubini et l'adapte à son utilisation de la méthode du repère mobile et de la théorie des systèmes de Pfaff en involution, cf. FÉRAUD 1928, p. 4.

203. Cf. la description qu'en donne Féraud FÉRAUD 1928, p. 2.

recherches<sup>204</sup>. Dans le rapport de thèse, Cartan insiste sur le faible nombre de travaux déjà publiés sur l'application de la théorie de l'applicabilité projective au cas des variétés développables. D'après lui, aucun mathématicien étranger n'a publié sur le sujet. Seul Féraud a consacré quelques chapitres de sa thèse à l'étude de ce problème. Pantazi précise qu'il reprend la définition de l'applicabilité projective, généralisée par Féraud par rapport aux travaux de Fubini, et celle des correspondances entre variétés. Avec ces définitions, il étudie certaines correspondances entre deux hypersurfaces développables, les correspondances entre les arêtes de rebroussement des deux hypersurfaces. Il recherche également des propriétés géométriques vérifiées par des variétés correspondantes sur deux hypersurfaces applicables l'une sur l'autre. Cartan en souligne l'intérêt dans son rapport.

Ces deux premiers mémoires ont des sujets respectifs étroitement liés et imbriqués. L'influence de Cartan est explicite sur les recherches entreprises par Féraud et Pantazi. Ces derniers partent d'une première généralisation de l'applicabilité projective que Cartan a proposée. Ils approfondissent certains des résultats obtenus par le mathématicien et utilisent exclusivement ses méthodes. Les travaux de Cartan sont ceux qui sont le plus cités dans les introductions des mémoires. Le lien entre les recherches de Cartan et celles des doctorants est, en outre, renforcée par la relation entre le mathématicien et les doctorants que révèlent les introductions et les rapports. En effet, d'après le rapport de la thèse de Féraud, c'est « sur une suggestion de M. Cartan » que ce dernier a généralisé la définition des correspondances, définition reprise ensuite par Pantazi. Pantazi affirme en outre qu'il « doit le succès de [ses] résultats à l'attention que [son] cher Maître Cartan a voulu porter à [son] travail ». Féraud remercie son « cher Maître » « pour tout l'intérêt avec lequel il a dirigé [ses] recherches et pour les précieux conseils qu'[il lui] a prodigués »<sup>205</sup>.

L'influence de Cartan et son rôle sur les recherches entreprises sont également explicites pour le doctorat de George Nicoladzé, classé en géométrie algébrique. D'après le rapport de Cartan, ce dernier étudie « les systèmes continus de courbes planes dépendant d'un nombre fini de paramètres, spécialement dans le cas où les courbes du système admettent un point multiple (mobile), ou bien ont entre elles des contacts d'ordre donné ». Une partie du travail de Nicoladzé peut ainsi être mise en parallèle avec la théorie de l'applicabilité projective, même si Nicoladzé recherche des résultats qui restent vrais dans un cadre plus général que celui des transformations projectives<sup>206</sup>. Nicoladzé ramène la question au cas où le système est algébrique par rapport aux

204. Cf. PANTAZI 1928, p. 7. Il inscrit de la même façon ses recherches dans la suite de celles de Féraud dans la note qu'il publie au CRAS en 1927, comme je l'ai indiqué dans la note 183.

205. Cf. PANTAZI 1928, p. 9 et FÉRAUD 1928, p. 3.

206. Nicoladzé souligne d'ailleurs ce rapprochement dans son introduction, NICOLADZÉ 1928, p. 4.

paramètres qui le décrivent<sup>207</sup> et il étudie les faisceaux de courbes algébriques. Dans l'introduction de sa thèse, il ne se réfère à aucun ouvrage mathématique en particulier. Il explicite toutefois le rôle de « guide » qu'a joué Cartan dans l'élaboration de son travail<sup>208</sup>. Cartan rappelle également le rôle qu'il a joué sur le travail de Nicoladzé<sup>209</sup>, tout en l'inscrivant dans une perspective plus générale<sup>210</sup>.

L'étude de ces six thèses<sup>211</sup> soutenues entre 1923 et 1928, révèle l'influence directe exercée par Cartan sur les doctorants. Ces mémoires se rapportent directement et explicitement aux travaux du mathématicien relatifs à la théorie du repère mobile et des systèmes de Pfaff en involution et à sa méthode de « calcul extérieur ». On observe ainsi un changement radical avec les thèses inspirées par les recherches de Darboux et de Guichard, tant au niveau des références<sup>212</sup> que des approches, des méthodes et des objets étudiés<sup>213</sup>. De plus, cette influence dépasse le cadre des thèses, classées en géométrie différentielle, et s'étend à la géométrie algébrique.

Il semble que l'influence de Cartan ne se résume pas seulement à l'influence de certains de ses travaux mathématiques. L'utilisation du terme « dirigé » par Féraud comme la mention du rôle de « guide » qu'il a exercé avec Nicoladzé laissent penser que le mathématicien s'est impliqué dans les travaux de recherche des doctorants. Cette implication de Cartan et son influence intellectuelle, que révèlent les thèses, vont à l'encontre de la description du mathématicien qui est souvent faite : celle d'un mathématicien « enfermé dans sa tour d'ivoire », dont la recherche est « incomprise »<sup>214</sup>.

De plus, à la fin des années 1930, un étudiant tchécoslovaque, Otakar Borůvka, venu à Paris pour travailler avec Élie Cartan grâce à Eduard Čech, témoigne des re-

---

207. Pour cela, il introduit des notions telles que le système osculateur relatif à une courbe du système.

208. Nicoladzé écrit ainsi, NICOLADZÉ 1928, p. 2 :

« Mon travail a été effectué presque entièrement sous la direction de M. le professeur Cartan, à qui je dois beaucoup dans le domaine des méthodes géométriques. L'énoncé de plusieurs théorèmes du texte qui suit a subi de nombreuses modifications dues à la critique de M. Cartan et les précieuses indications qu'il m'a données si souvent pendant mon séjour à Paris, resteront toujours pour moi des repères fondamentaux dans mon travail scientifique ultérieur. »

209. Il écrit ainsi dans le rapport : « M. Nicoladzé a été guidé dans son travail par M. Cartan : mais l'initiative du sujet traité ainsi que la direction générale de ses recherches lui reviennent entièrement ».

210. Il rapproche ainsi certains résultats trouvés par Nicoladzé d'autres énoncés déjà établis, comme par exemple le théorème de Benjamin Segre sur une estimation de l'ordre de multiplicité d'un point multiple mobile de la courbe générique d'un système dans le cas des courbes algébriques.

211. Delens, Mentré, Lalan, Féraud, Pantazi, Nicoladzé.

212. Les travaux de Guichard ne sont pas cités dans les introductions de ces cinq thèses (ni dans celui de Lagrange) et ceux de Darboux, rarement, seulement à l'occasion de rappel historique.

213. D'un côté, les courbes et les surfaces dans un espace euclidien à 3 dimensions (géométrie de Darboux et Guichard), de l'autre, des variétés à dimension quelconque (géométrie différentielle de Cartan).

214. Comme je l'ai déjà montré avec Hélène Gispert dans LELOUP et GISPERT prévu pour 2009. Les descriptions que je mentionne sont notamment faites par André Weil dans WEIL 1991 ou par Jean Dieudonné, cf. DUGAC 1995, p. 93.

lations intellectuelles et personnelles qu'il a entretenues avec le mathématicien lors de ses deux séjours en France en 1926 et 1929<sup>215</sup>. Lors de sa première visite, Borůvka étudie le problème des correspondances analytiques d'espaces projectifs, c'est-à-dire un problème proche de ceux étudiés par Féraud et Pantazi dans leurs doctorats<sup>216</sup>. Il précise qu'il est alors en contact régulier avec Élie Cartan. Il l'informe au fur et à mesure de la progression de sa recherche et Cartan lui donne de fréquents conseils. L'étudiant tchèque mentionne à cette occasion qu'Alexandre Pantazi rend également visite au professeur dans son bureau de la Sorbonne<sup>217</sup>. D'après Borůvka, la fréquentation de ce bureau par d'autres étudiants est rare, mais la description qu'il fait de sa relation avec Élie Cartan montre que le mathématicien peut jouer le rôle de « guide » ou de conseil. Il donnera d'ailleurs un nouveau sujet d'étude à Borůvka après la fin de son précédent travail sur les correspondances entre espaces projectifs<sup>218</sup>.

### La théorie des espaces généralisés

Les références aux travaux de Cartan sont concentrées dans les années 1920 sur plusieurs mémoires soutenus presque successivement entre 1923 et 1928. La succession des mémoires centrés sur la recherche du mathématicien s'arrête cependant en 1928.

Cette même année, Jules Sebag soutient une thèse, *Sur l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles relative à l'aire d'une surface minima limitée à une courbe gauche et sur la recherche de ses solutions homogènes*, qui ne se porte pas sur des thèmes déjà étudiés par Cartan et qui n'utilise ni sa méthode du repère mobile, ni sa théorie des systèmes de Pfaff en involution. Son mémoire traite davantage de questions liées à l'analyse fonctionnelle<sup>219</sup>. L'étude de certaines équations et des surfaces minima adjointes sont l'occasion pour Sebag de proposer de nouvelles démonstrations de propriétés géométriques classiques vérifiées par des surfaces minima<sup>220</sup>. Il ne cite pas d'autres d'ouvrages ou d'articles de géométrie mais il établit des liens entre son

215. Cf. TŘEŠŇÁK ET AL. 1996, p. 54-60. Je remercie à cette occasion Pavel Šišma et Veronika Havlová pour l'aide qu'ils m'ont apportée lors de mon séjour à Brno notamment pour la compréhension de TŘEŠŇÁK ET AL. 1996.

216. Il publie à la fin de son séjour deux notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* : « Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, (187), p.334, 1928 et « Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, (187), p.1271, 1928, cf. TŘEŠŇÁK ET AL. 1996, p. 184-185.

217. Cf. TŘEŠŇÁK ET AL. 1996, p. 60. Borůvka évoque également des invitations de Cartan dans sa résidence proche de Versailles, au Chesnay.

218. Ce dernier travail donne lieu à un article publié dans un périodique français : « Sur les surfaces dont le réseau conjugué de déformation projective est formé par les lignes de Segre-Darboux », *Bulletin des sciences mathématiques*, (53), 1929, cf. TŘEŠŇÁK ET AL. 1996, p. 185.

219. D'après Élie Cartan dans le rapport de thèse, ce sont cependant des considérations géométriques (considération du contour avec le repère qui lui est intrinsèquement lié) qui lui permettent de poser le problème.

220. Cf. le rapport d'Élie Cartan sur la thèse.

mémoire et les travaux de Paul Lévy des années 1910 en analyse fonctionnelle<sup>221</sup>. La description que fait Cartan du contenu de la thèse<sup>222</sup>, le décalage des références citées par Sebag avec celles citées par les autres doctorants en géométrie et la nature des problèmes étudiés posent la question du classement du mémoire en géométrie différentielle. Même si l'approche de Sebag pour formuler le problème est une approche géométrique, l'essentiel de ses recherches appartiennent davantage au domaine de l'Analyse fonctionnelle<sup>223</sup>.

Cependant la soutenance de cette thèse marque le début d'une suite de mémoires qui ne s'inspirent pas de travaux de Cartan. Après celui de Sebag en 1928, les autres mémoires de géométrie différentielle qui sont ensuite soutenus, en 1929 et en 1930, ceux de Dubourdieu et de Marcel Vasseur, se rapportent à l'étude des réseaux de courbes et de surfaces, sans référence à Cartan.

Il faut en fait attendre 1937, soit neuf ans plus tard, pour que des méthodes et les travaux d'Élie Cartan soient à nouveau travaillées par trois doctorants (dont un normalien, Octave Galvani) en 1937, 1940 et 1944 :

- Mohsen Hatchroudi, *Les espaces d'éléments à connexion projective normale*, 1937,
- Robert Potier, *Sur certaines questions de géométrie conforme*, 1940,
- Octave Galvani, *Sur la réalisation des espaces ponctuels à torsion en géométrie euclidienne*, 1944.

Les travaux de Cartan qui sont repris ne sont plus les mêmes que dans les années 1920. Ces trois mémoires abordent en effet la théorie des espaces généralisés du mathématicien et sa notion de connexion.

D'après Shiing-Shen Chern et Claude Chevalley dans *Élie Cartan and his mathematical work*, la notion de connexion a été introduite par Cartan lors de l'essor de la géométrie différentielle impulsé par la théorie de la relativité générale d'Einstein, dans les années 1920. Il s'agit alors de trouver un modèle approprié de l'univers et donc de considérer des espaces intrinsèquement définis et plus généraux que les es-

221. Sebag fait ainsi référence aux recherches de Lévy sur des solutions homogènes de l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles vérifiée par la fonction de Green. Il cite également les travaux de Lévy sur les équations aux dérivées fonctionnelles partielles à laquelle satisfait l'aire d'une surface minima considérée comme fonctionnelle de la forme du contour qui la limite (c'est-à-dire le même problème que celui étudié par Sebag), cf. SEBAG 1928, p. 9 et p.11-12. Ces liens sont également signalés par Cartan. D'après ce dernier, c'est la façon de poser le problème qui les distingue.

222. Cartan pour résumer la thèse de Sebag écrit ainsi : « le travail de M. Sebag est une très intéressante contribution au problème de Plateau, envisagé du point de vue de l'Analyse fonctionnelle ».

223. Les thèmes qu'ils étudient sont davantage repris dans les thèses que j'ai classées en analyse suivant le deuxième niveau de mot-clé « calcul différentiel et intégral ».



paces classiques : des espaces avec une connexion<sup>224</sup>. Chern et Chevalley décrivent « grossièrement » la notion de connexion en ces termes<sup>225</sup> :

« Roughly speaking, a generalized space (espace généralisé) in the sense of Cartan is a space of tangent spaces such that two infinitely near tangent spaces are related by an infinitesimal transformation of a given Lie group. Such a structure is known as a connection. The tangent spaces may not be the spaces of tangent vectors. »

Hachtroudi, Potier et Galvani considèrent trois connexions différentes. Hachtroudi se place dans le cadre des espaces à connexion projective, Potier dans celui des espaces à connexion conforme et Galvani dans celui des espaces à connexion euclidienne. Tous fondent leur étude des espaces à connexion sur les travaux d'Élie Cartan. Dans les trois rapports de thèse, Élie Cartan<sup>226</sup> reconnaît la paternité de la théorie des espaces généralisés abordée par les doctorants<sup>227</sup>. Il cite également d'autres géomètres comme les géomètres américains « de Princeton » et leur « geometry of paths » qu'il situe par rapport à ses propres travaux<sup>228</sup>. Élie Cartan insiste alors, notamment dans le rapport sur la thèse de Mohsen Hachtroudi, sur le fait que c'est sa propre théorie que le doctorant cherche à généraliser. Cette précision donne ainsi une indication du sentiment de concurrence entre Cartan et l'école de Princeton.

Mohsen Hachtroudi étudie plus précisément le problème de la géométrisation de certains systèmes différentiels par des espaces à connexion projective. Il cherche en fait à généraliser un problème posé initialement par Élie Cartan, dans CARTAN 1924, pour des équations du second ordre<sup>229</sup>. D'après Cartan, Hachtroudi montre ainsi qu'on peut

224. Cf. CHERN et CHEVALLEY 1952, p. 220-221 et p.241. Les connexions que mentionnent Chern et Chevalley peuvent être affine, euclidienne, projective, conforme ou être une connexion de Weyl, CHERN et CHEVALLEY 1952, p. 241.

225. CHERN et CHEVALLEY 1952, p. 221. On trouve également une définition de cette notion dans YANO 1945. Kentaro Yano écrit : « C'est à E. Cartan qu'on doit la notion d'espaces à  $n$  dimensions à connexion euclidienne, affine, projective ou conforme. Il définit un espace à connexion euclidienne, affine, projective ou conforme comme une variété numérique qui présente, au voisinage immédiat de chaque point, tous les caractères d'un espace ordinaire à groupe euclidien, affine, projectif ou conforme respectivement et qui est, de plus, douée d'une loi permettant de raccorder en un seul espace les deux petits morceaux qui entourent deux points infiniment voisins. En d'autres termes, il associe à chaque point de la variété numérique un espace tangent euclidien, affine, projectif ou conforme, et il donne la loi de raccord des espaces tangents attachés aux deux points infiniment voisins. »

226. Qui est le rapporteur des trois mémoires.

227. L'exemple le plus explicite se trouve dans le rapport sur le mémoire de Mohsen Hachtroudi. Cartan y écrit : « la notion d'espace à connexion projective a été introduite dans toute sa généralité par M. Cartan ».

228. Il décrit la notion d'espace à connexion projective comme un cas particulier auquel conduit la « geometry of paths ». Chern et Chevalley évoquaient également le développement de la « geometry of paths », tels que Eisenhart, Veblen, and T.Y. Thomas comme l'une des voies de la recherches étudiée après l'impulsion donnée par la théorie de la relativité d'Einstein.

229. Cf. HACHTROUDI 1937, p. 1. D'après Hachtroudi, Élie Cartan se posait le problème de la « géométrisation d'une équation différentielle du second ordre en ce sens que les courbes intégrales d'une telle équation sont considérées comme les géodésiques d'un espace à connexion projective ».

attacher d'une manière intrinsèque à un système différentiel un espace d'éléments de contact à connexion projective ou un espace d'éléments linéaires à connexion projective normale. Lors de ses démonstrations et notamment dans la première généralisation qu'il donne pour les espaces à 3 dimensions, Hachtroudi utilise systématiquement des méthodes d'Élie Cartan<sup>230</sup>.

Dans deux chapitres de son doctorat, *Sur certaines questions de géométrie conforme*, Robert Potier s'intéresse à la notion d'espace à connexion conforme ainsi qu'à des problèmes de géométrie différentielle posés dans l'espace à connexion conforme à 3 dimensions. Il prend comme point de départ les travaux d'Élie Cartan ainsi que la thèse de Paul Delens, DELENS 1927<sup>231</sup>. D'après POTIER 1940, p. 1, l'objectif initial du doctorant est de traiter uniquement le problème des courbes tracées sur une surface dans l'espace à connexion conforme à 3 dimensions. Cependant, il consacre la première partie de son mémoire à l'étude de ce problème dans le cadre de la géométrie conforme classique avant de généraliser les résultats obtenus et de voir comment ils sont modifiés dans le cadre de l'espace plus général.

Dans ses deux derniers chapitres, Potier introduit tout d'abord la théorie des espaces à connexion conforme en partant de l'exposé proposé par Delens dans sa thèse, exposé qui reprenait les travaux d'Élie Cartan et notamment CARTAN 1923<sup>232</sup>. Potier a ici recours à un travail intermédiaire, celui de Paul Delens. Il est le seul, parmi les doctorants qui reprennent des théories de Cartan, à citer un travail qui résume et reformule les recherches du mathématicien. Une raison peut être avancée à un tel recours : une certaine difficulté des ouvrages de Cartan qu'évoquent Chern et Chevalley dans CHERN et CHEVALLEY 1952, p. 218, en reprenant les propos d'Hermann Weyl<sup>233</sup>.

Potier étudie ensuite les modifications subies par les propriétés classiques des lignes de courbure et notamment les courbes tracées sur les surfaces dans l'espace à connexion conforme à 3 dimensions. Il se réfère alors aux notions introduites par Cartan telles que les « équations de frontière » et les « tenseurs de courbure et de torsion »<sup>234</sup>.

Enfin, Octave Galvani étudie le problème qui consiste à trouver dans un espace euclidien à un nombre suffisamment élevé  $N$  de dimensions une variété à  $n$  dimensions

---

230. Dont une que Cartan désigne dans le rapport sur la thèse sous le nom de « méthode d'équivalence ».

231. Comme je l'ai évoqué précédemment, une partie de la thèse de Delens est consacrée à l'application de sa méthode de calcul géométrique à des problèmes dans les espaces à connexion conforme. Il partait alors des publications d'Élie Cartan et notamment de CARTAN 1923, article cité également par Potier, dans lequel Cartan expose sa théorie des espaces à connexion conforme, et dont Delens reprenait le plan.

232. Cf. POTIER 1940, p. 3.

233. Ils évoquent alors l'« exposition inadéquate » de ses résultats et de ses théories par Cartan et ils citent Weyl en 1938, qui écrit un rapport sur l'ouvrage de Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*, Paris, Gauthier-Villars, 1937 : « Cartan is undoubtedly the greatest living master in differential geometry... I must admit that I found the book, like most of Cartan's papers, hard reading ».

234. Cf. le rapport de thèse de Cartan et POTIER 1940, p. 3.

réalisant un espace donné à connexion euclidienne pouvant comporter courbure et torsion<sup>235</sup>. Il regarde notamment les connexions euclidiennes à deux dimensions induites sur une congruence d'éléments linéaires plongée dans l'espace ordinaire à 3 dimensions (un  $E^3$ ), ainsi que les congruences à cône directeur qui réalisent les espaces à parallélisme absolu<sup>236</sup>. Il les généralise ensuite au cas à  $n$  dimensions. Comme l'écrit le doctorant à la fin de son introduction<sup>237</sup>, l'essentiel de ses recherches sont fondées sur les travaux d'Élie Cartan. Il rattache ainsi son étude à la théorie des espaces généralisés d'Élie Cartan et la bibliographie qu'il propose GALVANI 1944, p. 91-92 est majoritairement constituée de références à des publications d'Élie Cartan<sup>238</sup>.

De plus, Galvani utilise dans plusieurs démonstrations la méthode du repère mobile et la théorie des systèmes en involution d'Élie Cartan<sup>239</sup>. Hachtroudi et Galvani font de même dès lors qu'ils étudient des propriétés différentielles de courbes et de surfaces. La référence à la méthode du mathématicien est ainsi explicite dans les trois travaux. Mohsen Hachtroudi l'applique pour étudier les surfaces et les courbes dans l'espace d'éléments de contact à connexion projective normale associé à une famille à trois paramètres de surfaces jouant le rôle des plans<sup>240</sup>. Potier étudie des problèmes de géométrie conforme en appliquant la méthode du « point-sphère mobile », qui est la méthode déjà adaptée de celle de Cartan par Paul Delens dans DELENS 1927. Il obtient ainsi certaines formules dans la géométrie conforme des courbes et des surfaces. Potier applique également cette méthode pour retrouver les résultats déjà énoncés et trouvés par Ernest Vessiot par un autre procédé<sup>241</sup>.

Ces trois mémoires soutenus à la fin des années 1930 et pendant la seconde guerre mondiale ont donc pour origine les travaux et les théories d'Élie Cartan. Ils ne se

---

235. Cf. le rapport de thèse rédigé par Cartan et GALVANI 1944, p. 2. Il s'agit en fait de généraliser le théorème d'existence de Schaeffli pour les variétés réalisant un espace riemannien donné.

236. C'est-à-dire des espaces à torsion mais à courbure nulle, plan. Cf. GALVANI 1944, p. 3.

237. Cf. GALVANI 1944, p. 4.

238. 10 sur les 18 mentionnés.

Dans la notice nécrologique d'Octave Galvani, les propos de Jean-Louis Koszul, KOSZUL ET AL. 1993, p. 400, confirment le liens étroits entre les recherches d'Élie Cartan sur les espaces généralisés et la thèse d'Octave Galvani :

« Peu avant la guerre, O. Galvani a abordé des problèmes de géométrie différentielle inspirés par l'oeuvre de E. Cartan et de H. Weyl. »

239. Il le revendique explicitement, cf. GALVANI 1944, p. 4.

240. Cf. HACHTROUDI 1937, p. 2 et le rapport de Cartan sur le mémoire. Cartan ajoute en outre qu'Hachtroudi retrouve à l'occasion de cette étude un cas particulier d'un théorème général qu'il a lui-même énoncé.

241. Potier ne revendique à aucun moment l'utilisation de méthodes employées par Vessiot, il cherche simplement à retrouver certains des résultats que le mathématicien a notamment exposés dans ses deux mémoires intitulés « Contribution à la géométrie conforme théorie des surfaces », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (24), 1926 et *Bulletin de la Société Mathématique de France* (25), 1927. En revanche il reconnaît le recours à la méthode d'Élie Cartan et écrit, POTIER 1940, p. 1 : « C'est l'application de la méthode d'Élie Cartan qui nous a conduit à tous les résultats développés dans les pages qui suivent ».

rapportent pas tous à un même ouvrage du mathématicien mais chacun étudie un type d'espace généralisé d'Élie Cartan. De plus, la méthode du repère mobile est encore utilisée par les trois doctorants pour étudier des propriétés géométriques de courbes, de surfaces ou de variétés. Elle est adaptée aux espaces dans lesquels les doctorants travaillent mais il s'agit toujours de celle introduite par Cartan et sur laquelle ce dernier a continué à publier, notamment en 1935<sup>242</sup>.

Le succès de cette méthode pour aborder des problèmes de géométrie différentielle s'étend donc sur toute la période de l'entre-deux-guerres : elle reste la méthode la plus étudiée dans les mémoires de géométrie différentielle dans les années 1920 avec les thèses de Lalan, Mentré, Delens, Féraud, Pantazi. Elle continue à être utilisée dans les années 1930-1940 avec les doctorats d'Hachtroudi, Potier et Galvani. D'ailleurs, Potier explicite le choix de cette méthode au début de son introduction<sup>243</sup> :

« L'élégance de cette méthode et son aptitude à résoudre les problèmes posés par la géométrie différentielle étant bien connus, il est presque superflu d'ajouter que son choix pour la résolution des problèmes que nous nous étions posés a grandement facilité notre travail. »

L'influence d'Élie Cartan sur ces trois mémoires est donc manifeste. Outre les sujets et les références citées dans les introductions des mémoires, on en trouve une autre preuve dans les bibliographies proposées par les doctorants : les travaux du mathématicien y figurent majoritairement<sup>244</sup>.

L'étude des rapports et des introductions permet donc de réévaluer le rôle et l'influence exercés par Élie Cartan dans l'entre-deux-guerres. Ses recherches sont reprises dans plusieurs doctorats, notamment sa théorie des espaces généralisés, même si cette direction de recherche est souvent décrite comme une « direction dans laquelle peu de [leurs] contemporains osaient s'aventurer »<sup>245</sup>.

### 3 thèses sous l'influence de Bertrand Gambier

En plus des doctorats inspirés par la recherche de Cartan, six autres thèses sont soutenues dans la période entre 1929 et 1945<sup>246</sup>. Parmi ces six doctorats, trois se

242. Cf. CARTAN 1935. Cet ouvrage est d'ailleurs cité dans les bibliographies que proposent les trois doctorants, HACHTROUDI 1937, p. 85, POTIER 1940, p. 62 et GALVANI 1944, p. 91.

243. Cf. POTIER 1940, p. 1.

244. Le mathématicien est également remercié à la fin des trois introductions. Hachtroudi comme Potier signale qu'il a « dirigé » leurs recherches. Galvani lui exprime « une profonde et respectueuse reconnaissance pour l'intérêt très bienveillant qu'il a pris à [ses] recherches », GALVANI 1944, p. 4.

245. Cf. des propos de Jean-Louis Koszul dans KOSZUL ET AL. 1993, p. 400 sur les travaux d'Octave Galvani. On peut étendre ces propos aux autres travaux sur les espaces généralisés.

246. Les six thèses soutenues sont les suivantes :

- Jules Dubourdieu, *Sur les réseaux de courbes et de surfaces*, 1929,
- Marcel Vasseur, *Sur la conservation d'un réseau conjugué dans la déformation d'une surface*, 1930,
- Pierre Boos, *Propriétés caractéristiques des courbes et des surfaces*, 1936,

distinguent par les remerciements appuyés qui sont adressés à Bertrand Gambier dans les avant-propos : ceux de Marcel Vasseur (en 1930), du roumain Radu Rosca (en 1939) et de Marcel Decuyper (en 1944). Or, Gambier est professeur à l'université de Lille pendant l'entre-deux-guerres<sup>247</sup>. Il ne fait partie ni du jury de Vasseur ni de celui de Decuyper<sup>248</sup>. La citation de son nom par les doctorants paraît donc étonnante *a priori* et significative d'un rôle joué par Gambier dans les recherches entreprises par Vasseur, Rosca et Decuyper<sup>249</sup>.

Les trois doctorats abordent à trois dates distinctes (1930 - 1939 - 1944) trois sujets distincts : respectivement la conservation d'un réseau conjugué dans la déformation d'une surface, les transformations asymptotiques dans l'espace elliptique et les congruences attachées à une surface. Dans chacun de ces mémoires, on trouve des références nombreuses à différents travaux de Gambier sur ces trois sujets distincts. Si les citations ne sont pas toujours très explicites ou nombreuses dans les introductions ou les rapports<sup>250</sup>, elles apparaissent au cours du mémoire.

Marcel Vasseur aborde « l'étude des surfaces applicables à réseau conjugué permanent ». Dans son introduction, il affirme se fonder sur les travaux du mathématicien russe Finikoff<sup>251</sup> dont il reprend les résultats sur la question. Il ne se réfère pas aux

- 
- Frédéric Roger, *Les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points*, 1938,
  - Radu Rosca, *Transformations asymptotiques des courbes dans l'espace elliptique. Courbes de Bertrand*, 1939,
  - Marcel Decuyper, *Sur quelques congruences attachées à une surface*, 1944.

247. En effet, d'après Marie Thérèse Pourprix dans *Les Mathématiques à Lille de 1854 à 1970*, « Chapitre V - Le service de mathématiques de 1918 à 1939 », [http://asa3.univ-lille1.fr/spip/ASA\\_histoire/mathematiques/mathematiques-5.htm#p15](http://asa3.univ-lille1.fr/spip/ASA_histoire/mathematiques/mathematiques-5.htm#p15), Gambier, ancien élève de Painlevé avec lequel il a travaillé sur les points singuliers des équations différentielles complexes est en poste à Lille à partir de 1922, dans la chaire de mathématiques générales laissée par Châtelet. Comme cette chaire est transformée en 1934 en chaire de chimie analytique et agricole pour Jouniaux, Gambier occupe à partir de 1933 et jusqu'en 1948 la chaire de calcul différentiel et intégral. En 1932, il est également nommé Maître de recherches.

D'après Marie-Thérèse Pourprix, Gambier est un géomètre, étonnant de productivité en matière de recherche : il fait environ dix publications par an. La liste de ses publications (cf. annexe) atteste également de sa productivité.

248. Il participe cependant à celui de Rosca alors qu'il n'est pas membre de la faculté des sciences de la Sorbonne.

249. Marcel Vasseur écrit ainsi : « En terminant, je dois remercier M. Gambier, professeur à la faculté des sciences de Lille, de l'intérêt qu'il a porté à mon travail et des nombreux conseils qu'il m'a donnés », VASSEUR 1930, p. 3. Radu Rosca remercie « M. Gambier qui [lui] a prodigué ses conseils et [l]'a fait successivement perfectionner toutes [ses] démonstrations dans le but d'arriver au maximum d'élégance ». Enfin Marcel Decuyper manifeste « à [son] maître éminent, M. Gambier, [sa] profonde reconnaissance pour les conseils éclairés qu'il [lui] a donnés et qui [lui] ont permis de réaliser le présent travail », DECUYPER 1947, p. 17.

250. Je ne dispose que de deux rapports : pour les thèses de Radu Rosca et Marcel Decuyper qui sont écrits tous les deux par Élie Cartan. Le rapport de la thèse de Marcel Vasseur est déclaré manquant aux Archives Nationales.

251. Ce dernier reprenant les travaux déjà effectués par Peterson et Bianchi, cf. VASSEUR 1930, p. 1.

travaux de Cartan sur l'applicabilité de deux surfaces<sup>252</sup>. Il ne cite pas non plus les travaux d'autres doctorants comme Féraud et Pantazi qui ont abordé ce sujet avec les méthodes de Cartan dans leurs thèses de 1928<sup>253</sup>. Vasseur fait également référence, à de nombreuses reprises, à certains travaux de Gambier de synthèse sur l'applicabilité des surfaces<sup>254</sup> ou étudiant des familles particulières de surfaces comme les surfaces tétraédrales, les surfaces hélicoïdales<sup>255</sup>.

La liste des publications de Gambier<sup>256</sup> montre que le mathématicien a publié abondamment, depuis le début des années 1920, sur les surfaces applicables<sup>257</sup>, ou sur les déformations des surfaces avec ou non un réseau conjugué permanent<sup>258</sup>. Vasseur reprend ainsi des thèmes déjà abondamment travaillés par Gambier. Il fait référence à ses travaux et plus précisément aux notations et aux notions introduites par le mathématicien et que Vasseur reprend dans son doctorat<sup>259</sup>.

Radu Rosca, neuf années plus tard, s'intéresse à la théorie des transformations asymptotiques des courbes. Explicitement, il reconnaît vouloir étendre à l'espace elliptique les résultats précédemment obtenus par Bertrand Gambier sur les courbes de Bertrand dans l'espace euclidien. Rosca fonde ainsi son travail sur l'ouvrage de Gambier, *Les courbes de Bertrand*, Gauthier-Villars, Paris, 1926, où ce dernier expose ses résultats<sup>260</sup>. Rosca étudie les transformations asymptotiques des courbes elliptiques, les courbes minima et leurs transformations asymptotiques en courbes minima, puis les courbes de Bertrand obtenues à partir d'une courbe minima. Il reprend pour cela la méthode de Gambier notamment dans son étude des courbes de Bertrand. Il fait également référence à d'autres travaux sur la détermination et sur les transformations des

252. À aucun moment de son mémoire, ni dans l'introduction ni dans les chapitres.

253. Cependant, d'après Jim Ritter, Sergei Finikoff est à Paris en 1926/1927. Il suit le cours de Cartan de cette année sur le repère mobile et la géométrie riemannienne (dont il publie une traduction russe en 1960). Il publie sur le sujet une série de notes aux CRAS de 1927 à 1937. On peut donc penser que même si Vasseur ne cite pas explicitement les travaux de Cartan, il est cependant influencé par ses recherches, par l'intermédiaire de Finikoff.

254. Comme « Mécanismes transformables ou déformables », 1922, *Journal de mathématiques pures et appliquées* (1), 9<sup>e</sup> série, p.19-76, cf. VASSEUR 1930, p. 11 ou *Applicabilité des surfaces étudiée au point de vue fini*, Paris, Gauthier-Villars, Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 31, 1928, VASSEUR 1930, p. 41.

255. Cf. VASSEUR 1930, p. 43.

256. que j'ai dressée en annexe de ce mémoire.

257. Dès 1919, on trouve ainsi une note aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* : « Surfaces applicables l'une sur l'autre », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, (168), p.674-677, 1919. et il continue à publier des notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* ou dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* ou encore dans le *Bulletin de Darboux* au cours des années 1920.

258. Dès les années 1920, on trouve également de nombreuses publications du mathématicien sur ce thème, cf. la liste des publications en annexe.

259. Cf. par exemple VASSEUR 1930, p. 49.

260. Radu Rosca écrit ainsi ROSCA 1939, p. 1 : « Il me sera permis, dès le début de mon travail, d'adresser l'hommage de ma reconnaissance à la mémoire de notre géomètre roumain, Georges Tziteica, qui a bien voulu s'intéresser à mes premières recherches et les a guidées en me faisant lire l'ouvrage de M. Gambier (Gauthier-Villars, Paris) sur les courbes de Bertrand et m'engageant à obtenir des résultats analogues dans l'espace elliptique ».

courbes de Bertrand qui ne sont pas l'oeuvre de Gambier<sup>261</sup>. Cependant, il reprend la méthode de Gambier utilisant la transformation asymptotique de Bianchi pour l'étude des courbes minima de l'espace euclidien et dans le cadre elliptique.

L'influence des travaux de Gambier sur ceux de Rosca est manifeste, même si, depuis sa publication de 1926, Gambier a peu publié sur le sujet des transformations asymptotiques de courbes<sup>262</sup>. De plus, le commentaire de Cartan dans le rapport et les remerciements adressés par Rosca à Gambier indiquent que le mathématicien semble avoir joué un rôle dans l'élaboration du travail, notamment par les conseils qu'il a prodigués à Rosca<sup>263</sup>.

Enfin Marcel Decuyper, en 1944 s'intéresse à certaines congruences associées à une surface dans le cadre de la géométrie projective différentielle. Il étudie les congruences des axes définies à partir d'un réseau conjugué quelconque et les congruences des directrices de Wilczynski. Il ne cite explicitement aucun ouvrage mathématique ou aucune méthode de mathématiciens à laquelle il se réfère. Selon Jim Ritter il utilise assez systématiquement la méthode de repère mobile de Cartan. Dans le rapport de thèse, Cartan évoque la méthode du « tétraèdre mobile » dans l'étude des éléments focaux des axes<sup>264</sup>.

Decuyper aborde ici un sujet qui semble avoir été moins étudié par Gambier que ceux abordés par Vasseur et par Rosca. Peu de publications de Gambier s'y rapportent<sup>265</sup>. Il ne semble donc pas certain que les techniques utilisées par Decuyper soient tirées de Gambier.

261. Il évoque notamment ceux de Darboux, de Cartan, de Sophus Lie ou de Demartres et Bianchi, cf. ROSCA 1939, p. 3.

262. Dans la liste de publications de Gambier que j'ai établie en annexe du mémoire, on constate qu'entre 1926 et 1939, aucun titre de mémoire ne contient explicitement le terme « transformation asymptotique ». Seule la note aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* de 1932 semble se rapprocher de cette thématique : « Transformation d'une famille simplement infinie de géodésiques et de la famille de courbes conjuguées », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, (194), p.578-580, 1932.

263. Élie Cartan écrit ainsi dans le rapport : « Guidé d'abord dans ses recherches par un compatriote Tziteica dont les géomètres déplorent la perte récente, il a su très habilement utiliser les conseils que lui a donnés M. Gambier et faire un travail susceptible de développement ultérieurs intéressants. »

264. Il indique en outre que Decuyper a utilisé des « méthodes simples » pour obtenir « une grande quantité de résultats nouveaux ».

265. On trouve cependant les publications suivantes mais elles ne semblent pas porter exactement sur le même sujet :

- « Sur une congruence de cercles osculateurs aux lignes de courbure  $u = \text{const.}$  d'une surface  $S_1$  et  $v = \text{const.}$  d'une surface  $S_2$  », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, (196), p. 1275-1277, 1933.
- « Congruences de cercles ; points focaux », *Annales de la faculté des sciences de l'université de Toulouse*, (25), 3<sup>e</sup> série, p. 69-114, 1933.
- « Congruence de cercles : points focaux et surfaces focales », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, (195), p. 928-930, 1932.
- « Cycles orthogonaux à une même sphère. Congruences et opérations paratactiques. Applications », *Journal des mathématiques pures et appliquées*, (9), 9<sup>e</sup> série, p. 179-199, 1930.
- « Systèmes remarquables de 10 droites ou vingt cercles. Cycles orthogonaux à une même sphère. Congruences paratactiques », *Recueil mathématique de Moscou*, (36), p.189-203, 1929.

Dans le mémoire en lui-même et plus seulement dans l'introduction, Marcel Decuyper fait référence à plusieurs travaux sans pour autant indiquer de méthodes ou d'ouvrages qui guideraient tout son travail. Il mentionne ainsi des publications de Finikoff sur les congruences stratifiables<sup>266</sup>, ou des publications de Tziteica, Fubini, Godeaux et également Gambier dont il mentionne une note aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, « Surfaces dont les asymptotiques de l'un ou l'autre système appartiennent à des complexes linéaires », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, (203), 1936<sup>267</sup>.

L'influence de Gambier sur le travail de Decuyper n'est donc pas aussi manifeste que pour les deux autres doctorats. D'après les remerciements, il semble davantage qu'il ait apporté au doctorant une aide générale sans pour autant que ce dernier reprenne une partie de son oeuvre. On peut remarquer que le thème du doctorat de Decuyper est proche des sujets abordés dans les thèses du début des années 1920 comme dans celle de Vaultot par exemple. Il n'y a plus, comme à l'époque, de références aux travaux de Guichard, mais le sujet principal est similaire.

### Les autres thèses

Trois dernières thèses, réalisées par trois étudiants normaliens, Dubourdieu, Boos et Roger, sont soutenues entre 1929 et 1945. Chacun étudie des problèmes différents avec des points de vue différents et se réfèrent à des réseaux de textes différents. Ni le sujet, ni l'approche de ces doctorats ne semblent repris dans une autre thèse de géométrie de l'entre-deux-guerres. Dubourdieu et Roger situent leur étude à la frontière de la géométrie et de la topologie, mais ils n'étudient pas du tout les mêmes problèmes.

Le travail que Jules Dubourdieu soutient en 1929 est en fait essentiellement composé lors du séjour du doctorant en Allemagne, à Hambourg, auprès de Wilhelm Blaschke grâce à une bourse de la fondation Rockefeller obtenue pour l'année 1927-1928<sup>268</sup>. Dubourdieu étudie les invariants topologiques<sup>269</sup> et les propriétés géométriques des ré-

- 
- « Déformation du paraboloid de révolution : cubique de M. Lyon et congruences de M. Thybaut », *Bulletin de la Société Mathématique de France*, (50), p. 153-219, 1922.
  - « Couples de deux surfaces minima se correspondant comme focales d'une congruence rectiligne, avec conservation des lignes asymptotiques et des lignes de longueur nulle », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, (171), p. 842-845, 1920.

266. telles que Finikoff S. « Sur les congruences stratifiables », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, (53), 1929, cf. DECUYPER 1947, p. 27-31.

267. Cf. DECUYPER 1947, p. 92. Il s'agit pour certaines (comme pour celle de Gambier) de publications relatives à l'étude de surfaces. Decuyper étudie les congruences qu'il attache à ces surfaces particulières.

268. Cf. SIEGMUND-SCHULTZE 2001, p. 288-301 et MOUSSA 1987, p. 44. Dubourdieu exprime d'ailleurs sa gratitude envers le mathématicien « pour l'amabilité avec laquelle il a dirigé [ses] recherches », DUBOURDIEU 1929, p. 3.

269. c'est-à-dire les propriétés invariantes par le groupe général des transformations ponctuelles, continues et dérivables un nombre suffisamment de fois, cf. DUBOURDIEU 1929, p. 1 et le rapport de



seaux formés de trois familles à un paramètre de courbes dans le plan ainsi que des réseaux formés de quatre familles à un paramètre de surfaces de l'espace<sup>270</sup>. Tout le travail de Dubourdieu, les méthodes comme les résultats, sont influencés par Wilhelm Blaschke. Dubourdieu reconnaît prendre comme point de départ les résultats de Blaschke et ses travaux sur le théorème de Gerhard Thomsen<sup>271</sup>. Il reprend explicitement la démarche et l'approche du mathématicien tout au long de ce travail<sup>272</sup>.

Dans le rapport, Cartan affirme qu'il a déjà publié des travaux sur le sujet en 1908 dans les *Annales de l'École normale supérieure* : « en se plaçant à un point de vue analytique, [il a] déterminé les invariants topologiques de tels réseaux ainsi que les réseaux admettant un groupe continu de transformations ». Cependant, « il est inutile de dire que les résultats de Cartan étaient inconnus de MM. Blaschke et Dubourdieu ». Cartan reconnaît ainsi que ces travaux sur ces sujets particuliers n'ont pas eu une grande réception. L'ensemble de ses travaux n'ont pas le même devenir. D'après CHERN et CHEVALLEY 1952, p. 218 et p.223-225, en 1928, au moins en Allemagne, certains des travaux de Cartan sont toutefois déjà connus grâce à Hermann Weyl. Il s'agit plutôt de ses travaux en théorie des groupes sur les algèbres et les groupes de Lie et de ses travaux sur la théorie de leur représentation.

Aucune autre thèse classée en géométrie, y compris en géométrie algébrique ou en topologie, ne reprend les résultats du doctorat de Jules Dubourdieu ou ne le cite comme référence<sup>273</sup>. Il en est de même pour les mémoires de Pierre Boos, soutenu en 1936, et pour celui de Frédéric Roger en 1938.

Frédéric Roger se distingue par le sujet de sa thèse et par les thèmes qu'il aborde. Il ne considère pas de réseaux, de surfaces, de variétés, de congruences, etc., comme c'est le cas dans l'essentiel des doctorats classés en géométrie différentielle. L'objet de son travail est de « rattacher [des] propriétés tangentielles des courbes représentatives de fonctions continues d'une variable à celles des ensembles de points tout à fait arbitraires d'un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions »<sup>274</sup>. D'après Denjoy, dans le rapport de thèse, il s'agit de questions sur la métrique et de questions de topologie,

---

Cartan sur le mémoire. Cette définition est celle qui est en vigueur à l'époque. Aujourd'hui, la définition des invariants topologiques est moins restrictive et désigne une propriété d'un espace topologique qui se conserve par homéomorphie (bijection continue).

270. Cf. DUBOURDIEU 1929, p. 2 et le rapport de Cartan sur le mémoire.

271. Cf. DUBOURDIEU 1929, p. 2. Gerhard Thomsen est un élève de Wilhelm Blaschke à Hambourg. Pour plus d'informations sur Thomsen cf. SEGAL 2003, p. 217-220.

272. L'influence de Blaschke sur le travail de Dubourdieu est signalée également par Cartan dans le rapport.

273. Signalons que Wilhelm Blaschke prit la carte du parti nazi à partir de 1936 ce qui a pu interférer sur la réception de ses travaux en France. La thèse de Dubourdieu est la seule de l'ensemble du corpus à faire référence aux travaux de ce mathématicien.

274. Cf. ROGER 1938, p. 2. Roger entend par les propriétés tangentielles des courbes les propriétés établies pour les nombres dérivés d'une fonction continue  $f(x)$  et qui sont « universellement vérifiées », sauf au plus en un ensemble de points  $x$  formant un ensemble de mesure nulle, d'après Arnaud Denjoy dans le rapport de thèse.

qui sont donc à la frontière de la géométrie différentielle. Dans son introduction, Roger fait référence exclusivement à l'article de Denjoy *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues*<sup>275</sup> : ce sont les résultats, les théories et les méthodes exposés dans ce mémoire qui lui servent de point de départ et de guide dans l'élaboration de son travail. Denjoy mentionne également dans le rapport le lien entre sa propre publication et les recherches de Roger<sup>276</sup>. Faire référence aux travaux de Denjoy est unique parmi les thèses classées en géométrie. Le nom du mathématicien apparaît davantage dans certaines thèses d'analyse.

Pierre Boos étudie quant à lui « certaines figures simples attachées à des arcs de courbes ou à des portions de surfaces analytiques »<sup>277</sup>. Il cherche à « déterminer les courbes ou les surfaces par des propriétés caractéristiques relatives à ces figures »<sup>278</sup>. Aucune référence à une publication mathématique, à un mathématicien ou à une méthode n'est faite ni dans l'introduction, ni dans les chapitres du mémoire. René Garnier, dans le rapport de thèse, n'en mentionne pas non plus. Boos indique seulement des procédés de calcul qui découlent de choix faits auparavant. Il ne fait aucune comparaison avec d'autres méthodes ou avec d'autres résultats énoncés ou utilisés par d'autres mathématiciens. René Garnier ne fait pas non plus de rapprochements dans le rapport de thèse. Il souligne « l'ingéniosité [de Boos] pour l'invention des méthodes » et son « adresse pour la transformation des expressions ». Il émet le jugement suivant sur le mémoire : « À des problèmes, d'énoncés très simples, et qui auraient pu être posés dès le début de la géométrie infinitésimale, il apporte des solutions qui justifient une fois de plus l'introduction de la notion de Groupe en Géométrie ». Ce jugement peut être interprété comme une confirmation du décalage entre l'approche de Boos, les problèmes qu'il étudie et ceux qui sont employés dans les autres doctorats de géométrie des années 1930.

Notons que le décalage entre les thèses de Roger et Boos et les autres doctorats classés en géométrie différentielle se traduit également dans la composition des jurys de thèse. Les membres du jury de Roger sont ainsi des mathématiciens spécialisés en analyse : Borel en est le président, Denjoy le rapporteur, Montel le troisième examinateur. Ce cas est unique parmi les 41 thèses de la faculté des sciences de Paris classées dans le domaine de la géométrie. Pour Boos, le président est Julia, le rapporteur Garnier. Ici encore, Cartan n'est pas membre du jury. De plus, pendant les années 1930, la présence

---

275. Denjoy Arnaud, 1915, « Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues », *Journal de Mathématiques pures et Appliquées*, (7) 1, p.105-240.

276. Ce dernier affirme d'ailleurs que Roger étudie des sujets qui n'ont pas été prolongés depuis ses propres travaux.

277. Comme par exemple la figure formée par un arc  $MM_1$  d'une courbe tracée sur une surface et la géodésique qui sous-tend cet arc. Cette figure est considérée par Boos dans la première partie de son mémoire.

278. Cf. Boos 1936, p. 1.

de Garnier se retrouve essentiellement parmi la population des rapporteurs des thèses d'algèbre et de géométrie.

### Doctorants

Parmi les 24 doctorants en géométrie différentielle<sup>279</sup>, seulement 7 sont normaliens, ce qui représente 29% du public<sup>280</sup>. En comparaison, la part des étudiants normaliens est de 50 % parmi les doctorants en arithmétique et d'algèbre, de 37% parmi ceux en théorie des fonctions et de 36% parmi l'ensemble des doctorants de Paris.

De plus, parmi ces sept normaliens peu sont encore connus aujourd'hui pour leur travaux en géométrie et il est difficile de trouver des renseignements à leur sujet<sup>281</sup>. Peu d'entre eux continuent leur carrière dans l'enseignement supérieur français. Pour Jules Dubourdieu comme pour Lucien Féraud, le moment de la thèse apparaît comme une parenthèse dans leur parcours mathématique. En effet, d'après DUGUÉ 1986, le sujet choisi par Lucien Féraud pour son doctorat n'appartient pas au domaine des statistiques sur lequel il a travaillé avant et après sa thèse<sup>282</sup>. Jules Dubourdieu est quant à lui recruté en 1930 par la Banque de Paris des Pays-Bas, un an après la soutenance de sa thèse, alors qu'il est professeur à l'université de Rennes<sup>283</sup>. Il continue ensuite toute sa carrière dans cette banque pour en finir directeur en 1967 et il ne travaille presque plus sur des sujets de géométrie différentielle<sup>284</sup>. Le cas de Pierre Boos est différent. Rentré dans les ordres en 1928, il est professeur à l'Institut Catholique dès 1934 (deux ans avant la soutenance de sa thèse) et le reste jusqu'en 1967. Il consacre l'essentiel de sa carrière à l'enseignement et à son activité d'inspecteur de mathématiques de

279. Si on rajoute Lucien Féraud parmi les doctorants en géométrie différentielle. J'ai en effet montré que sa thèse, pourtant classée par le *Jahrbuch* en géométrie algébrique traite de problèmes de géométrie différentielle, cf. p.4.3.1.

280. Les 7 étudiants normaliens sont Raymond Jacques, René Lagrange, Lucien Féraud, Jules Dubourdieu, Pierre Boos, Frédéric Roger et Octave Galvani.

281. En effet tous n'ont pas leur notice dans le journal de l'*Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure* : seuls Boos, Dubourdieu, Galvani et Féraud l'ont. Il n'en est pas de même pour Jacques, Lagrange et Roger.

282. Daniel Dugué affirme ainsi que Féraud prépare sa thèse tout en étant attaché à la Statistique générale de la France, ancêtre de l'INSEE et c'est en parallèle qu'il travaille à son doctorat (cf. DUGUÉ 1986, p. 51). Après la soutenance de sa thèse, il bénéficie d'une bourse de la fondation Rockefeller pour aller travailler à Rome avec Levi-Civita et à Harvard avec Birkhoff, cf. SIEGMUND-SCHULTZE 2001. Il publie avec ce dernier des articles sur les systèmes Pfaffiens et leur stabilité. Mais à partir de 1932, il ne s'occupe plus de géométrie et se remet à faire des statistiques en étant nommé actuaire au Bureau international du travail, (cf. DUGUÉ 1986, p. 51).

283. Cf. MOUSSA 1987, p. 44. Les circonstances de ce recrutement y sont détaillées : Dubourdieu n'est pas parti de lui-même travailler dans cette banque, son nom a été conseillé par Galbrun.

284. D'après MOUSSA 1987, p. 44, la carrière bancaire de Dubourdieu ne « l'éloigne pas réellement de ses activités intellectuelles ». Dubourdieu continue à publier un peu et notamment un *Traité de mathématiques financières*, mais ses publications n'appartiennent presque plus au domaine de la géométrie. Après 1930, les deux répertoires bibliographiques, le *Jahrbuch* et le *Zentralblatt*, ne recensent qu'une seule publication de l'auteur en géométrie différentielle : *Questions topologiques de géométrie différentielle*, Gauthier-Villars, Paris, Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 78, 1936.

l'Éducation nationale<sup>285</sup> : il ne publie donc plus en géométrie<sup>286</sup>. Seul Octave Galvani continue en fait à publier sur des sujets de géométrie différentielle pendant sa carrière d'enseignant à Grenoble<sup>287</sup>. D'après Jean-Louis Koszul, Galvani a exercé une influence déterminante sur quelques futurs mathématiciens par ses cours de géométrie « où il réussissait fort bien »<sup>288</sup>.

Hormis ces six normaliens, le public des doctorants en géométrie différentielle est constitué essentiellement d'étudiants français sur lesquels peu de renseignements sont connus (voire aucun). Seuls trois étudiants sont étrangers, deux d'origine roumaine, un d'origine iranienne<sup>289</sup>. Aucun d'entre eux ne semble avoir eu un rôle ou exercé une influence sur le milieu mathématique en France à l'issue de leur soutenance.

La composition du public des doctorants de géométrie différentielle est caractérisée par une faible proportion de normaliens et d'étudiants étrangers, d'étudiants qui auront par la suite un rôle marquant dans les sciences mathématiques françaises. Peu de doctorants restent en France à publier en géométrie différentielle, à continuer les recherches entreprises pour la thèse. Cela a alors pu contribuer à l'absence d'un élan de la recherche clairement marqué pendant les années 1930 dans ce domaine.

### Une périodisation

L'étude des thèses de géométrie différentielle a permis de dégager deux directions de recherche différentes.

La première s'articule autour des travaux de Gaston Darboux de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle et de ceux de Guichard du premier quart de siècle. Les doctorats soutenus entre 1919 et 1923 appartiennent tous à cette dynamique. On peut alors caractériser une première période (entre 1919 et 1923) pour la recherche dans les thèses de géométrie différentielle.

Dès 1923, de nouveaux sujets et de nouvelles références apparaissent dans les doctorats. Une seconde dynamique de recherche se crée alors autour des recherches d'Élie Cartan. Elle se poursuit pendant tout l'entre-deux-guerres autour de différents travaux du mathématicien. La méthode du repère mobile et de la théorie des systèmes de Pfaff en involution constituent les théories de référence pour un ensemble de doctorats soute-

---

285. D'après Paul Dubreil dans DUBREIL 1975.

286. Le *Jahrbuch* et le *Zentralblatt* ne signalent d'ailleurs que deux articles de l'auteur publiés après sa thèse en 1936 et en 1937. Paul Dubreil dans DUBREIL 1975 signale que Pierre Boos fut également de 1961 à 1971 maître de conférences d'algèbre et de géométrie à l'École polytechnique.

287. Cf. GALVANI 1944, p. 400. Jean-Louis Koszul écrit ainsi qu'« à partir de 1948, Galvani a appliqué [les] procédés [décrits dans sa thèse] à la réalisation des espaces de Finsler ».

288. Cf. GALVANI 1944, p. 400. Jean-Louis Koszul précise cependant qu'il ne sait pas si les articles de recherche de Galvani ont exercé la même influence que ses cours.

289. On peut également rajouter un étudiant géorgien, Georges Nicoladzé dont la thèse était initialement classée en géométrie algébrique et dont le sujet se rapporte à des travaux d'Élie Cartan, comme je l'ai montré précédemment.

nus entre 1923 et 1928. Pendant cette période, toutes les thèses soutenues en géométrie différentielle appartiennent à cet ensemble. Au cours des années 1930, quelques doctorats se réfèrent encore à des travaux de Cartan. La méthode du repère mobile est toujours utilisée mais ces mémoires abordent surtout la théorie des espaces généralisés du mathématicien.

On assiste ainsi au cours des années 1920 à une rupture nette dans les références citées par les doctorants : à Darboux et Guichard succède Élie Cartan. Cette rupture est renforcée au même moment par le changement dans la chaire de Géométrie Supérieure de la faculté des sciences de la Sorbonne : Cartan y succède à Guichard. Elle se traduit également au niveau des jurys de thèses. Guichard occupait presque systématiquement la fonction de rapporteur pour les thèses soutenues avant 1923. Après 1923, c'est Élie Cartan qui occupe cette fonction.

Les années 1930 sont marquées par un éclatement au niveau des références citées par les doctorants. Plusieurs îlots de recherche se distinguent mais ils sont beaucoup plus isolés que dans les années 1920. On voit ainsi apparaître des références à certains travaux de Gambier et quelques signes d'une influence que ce mathématicien, professeur à l'université de Lille, a pu exercer sur trois doctorants. Faute de renseignements biographiques sur ces trois étudiants<sup>290</sup>, le rôle joué par Gambier apparaît pour l'instant surprenant<sup>291</sup>, mais il est manifeste.

### 4.3.2 Les thèses de géométrie algébrique : un ensemble dépareillé

Le mot-clé « géométrie algébrique » correspond à la rubrique du *Jahrbuch* intitulée de la même façon<sup>292</sup>. Même si cette dernière rubrique n'apparaît dans les classifications du répertoire qu'à partir de 1935<sup>293</sup>, des thèses comme celle de Marcel Légaut, *Sur les systèmes de points du plan. Applications aux courbes gauches algébriques*, pourtant soutenue en 1925, sont référencées dans la version électronique du *Jahrbuch* et classées dans la sous-section « Géométrie algébrique » de la section « Géométrie ». Neuf docto-

---

290. Tels qu'une formation initiale à la faculté des sciences de Lille pour obtenir les certificats de licence nécessaires à la soutenance d'une thèse.

291. En ce qui concerne le doctorant roumain Radu Rosca qui a d'abord été « guidé » par Tziteica, d'après Cartan, la relation entre le géomètre roumain et Gambier pourrait expliquer la relation entre les travaux de Rosca et ceux de Gambier, mais je n'ai pas pu encore trouver de renseignements à ce sujet.

292. Cf. le deuxième chapitre de la présente thèse.

293. Auparavant les rubriques relatives à ce sujet sont dans la section « Géométrie. Géométrie analytique et synthétique » pour les tomes des années 1914 à 1935. Par exemple dans le tome de 1925, on repère la géométrie algébrique dans les sous-sections suivantes de V.5. Géométrie analytique et synthétique : V.5.C. Courbes algébriques du plan. V.5.D. Surfaces algébriques, Courbes algébriques de l'espace et système algébrique de lignes (Algebraische Flächen, Raumkurven und Liniensysteme) ; V.5.E. Figures algébriques dans des espaces de plus de 3 dimensions (Algebraische Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen).

rats ont ainsi été classés dans cette rubrique. J'ai déjà mentionné parmi ces doctorats ceux de Georges Nicoladzé et de Lucien Féraud, tous deux soutenus en 1928<sup>294</sup>. Les autres mémoires sont les suivants :

- Marcel Légaut, *Sur les systèmes de points du plan complexe. Applications aux courbes algébriques gauches.*, 1925,
- Henri Adad, *Recherches sur les surfaces plusieurs fois cerclées*, 1935,
- Sylvain Wachs, *Essai sur la géométrie projective quaternionnienne*, 1936,
- Bernard d'Orgeval, *Sur les surfaces algébriques dont tous les genres sont 1*, 1943,
- Max Eger, *Les systèmes canoniques d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*, 1943,
- Luc Gauthier, *Sur certains systèmes linéaires de droites hyperspatiaux*, 1944,
- Léonce Lesieur, *Sur la rationalité et la géométrie des intersections d'hyperquadriques*, 1945.

Il est intéressant de constater que parmi ces sept doctorants, six sont d'anciens élèves de l'École normale supérieure : Marcel Légaut, Henri Adad, Bernard d'Orgeval, Max Eger, Luc Gauthier et Léonce Lesieur. Seul Sylvain Wachs n'est pas issu de cette école, comme Georges Nicoladzé<sup>295</sup>. La population des doctorants en géométrie algébrique est différente de celle des doctorants en géométrie différentielle. Elle est composée par les étudiants que le milieu mathématique de l'époque considère comme très brillants.

L'étude des avant-propos et des rapports de thèses permet de diviser l'ensemble des thèses classées en géométrie algébrique en quatre groupes suivant les références citées et les sujets étudiés. Le premier correspond ainsi à une unique thèse, celle de Marcel Légaut, le deuxième à celle de Nicoladzé. Le troisième est constitué par celles d'Adad et de Wachs, le dernier par les thèses de d'Orgeval, Eger, Gauthier et Lesieur. On observe parmi ces mémoires des évolutions nettes dans les références citées et les sujets étudiés ainsi qu'une complexification croissante des objets étudiés. Les titres des thèses respectives de Marcel Légaut, *Sur les systèmes de points du plan complexe*, Georges Nicoladzé, *Sur les systèmes continus de figures géométriques*, Luc Gauthier, *Sur certains systèmes linéaires de droites hyperspatiaux*<sup>296</sup> témoignent de l'évolution des objets considérés : des systèmes de points et des courbes algébriques, on passe

---

294. Ces deux mémoires se rapportent à des travaux d'Élie Cartan. Ils en utilisent les méthodes géométriques et notamment celle du repère mobile et concernent des problèmes liés à l'applicabilité projective. J'ai ainsi montré que la thèse de Lucien Féraud correspond davantage à une thèse de géométrie différentielle. Je ne la considère plus comme une thèse de géométrie algébrique dans la suite de cette thèse.

295. Je n'ai pas réussi à obtenir jusqu'à présent de renseignements sur Sylvain Wachs. Je sais simplement qu'il n'est ni normalien, ni polytechnicien. De plus, le supplément spécial du *Bulletin de la Société Mathématique de France*, CHAZY et MICHEL 1928, indique qu'il a été admis membre de la Société Mathématique de France en 1928.

296. Cf. LÉGAUT 1925; NICOLADZÉ 1928; GAUTHIER 1944.

ensuite aux figures géométriques, aux surfaces algébriques et aux variétés algébriques. Georges Nicoladze étudie ainsi les systèmes de courbes planes à 1 paramètre, tels que les faisceaux de courbes algébriques, tandis que Luc Gauthier s'intéresse aux congruences algébriques de droites dans un espace projectif, c'est-à-dire aux systèmes de droites dépendant de 2 paramètres<sup>297</sup>, et aux variétés focales de ces congruences.

Dans sa thèse, Marcel Légaut étudie tout d'abord des systèmes de points du plan. Il classe et il caractérise les différents systèmes de points<sup>298</sup>. D'après les références citées par Légaut, la théorie qu'il construit à cette fin se fonde sur les travaux de Picard et de Simart dont il se sert pour introduire et pour définir de nouvelles notions<sup>299</sup>.

Marcel Légaut applique ensuite ses résultats à l'étude des courbes gauches algébriques. Il cherche en fait à répondre à des questions sur les courbes gauches algébriques, qui ont déjà été étudiées avec des méthodes et une approche différente par Halphen, Max Noether ou Castelnuovo<sup>300</sup>. Légaut propose ainsi une nouvelle méthode de résolution de ces problèmes dans le cas d'une certaine famille de courbes gauches et il en indique des généralisations possibles.

Ni Légaut dans son introduction, ni Picard dans le rapport qu'il écrit sur la thèse ne précisent quelles ont été les influences du doctorant pour élaborer sa méthode. Des indications sont données par l'un des contemporains de Marcel Légaut, Paul Dubreil, lui-même doctorant pendant l'entre-deux-guerres<sup>301</sup>. Dans DUBREIL 1982, Dubreil propose sa vision du développement de l'algèbre en France de 1900 à 1935 en y mêlant

297. Gauthier décrit ainsi le problème précis qui fait l'objet de sa thèse : « l'étude des congruences linéaires ou figures réglées telles qu'il passe une seule droite par un point générique de l'espace », cf. GAUTHIER 1944, p. 3.

298. Pour reprendre la description qu'en fait Marcel Légaut en introduction de sa thèse, LÉGAUT 1925, p. 5, il s'agit essentiellement de répondre aux questions suivantes, en introduisant de nouvelles caractérisations et en utilisant une nouvelle approche : « Que peut-on dire sur la formation et les propriétés d'un système de points situés dans son plan ? Comment peut-on les classer, les déduire les uns des autres ? Peut-on les caractériser, au moins relativement à certaines de leurs propriétés, par un ensemble fini de nombres entiers ? En particulier quel est le nombre de conditions imposées à une courbe de degré  $l$  pour passer par un système donné ? ».

299. Légaut précise ainsi LÉGAUT 1925, p. 6 que « les quelques résultats nécessaires à l'intelligence de ce travail se trouvent dans les premiers chapitres du tome II du livre de Picard et Simart : *Fonctions algébriques de deux variables*.

300. Cf. LÉGAUT 1925, p. 8. Les questions sont les suivantes :

- « a) Combien de conditions impose une courbe gauche à une surface de degré  $l$  pour qu'elle la contienne ?
- b) Quel est le genre d'une courbe gauche sans point multiple ?
- c) Dans quelles conditions une surface de degré  $l$ , passant par l'intersection totale d'une courbe  $C$  avec une surface d'ordre  $n$ , recoupe-t-elle  $C$  suivant l'intersection totale de  $C$  avec une surface d'ordre  $l - n$  ? »

301. en arithmétique/algèbre comme je l'ai indiqué dans la deuxième partie de ce chapitre. Ce dernier a personnellement connu Marcel Légaut lors de ses études à l'École normale supérieure. Légaut était agrégé-préparateur à l'ENS de 1923 à 1925 et Dubreil a intégré l'ENS en 1923 (Cf. le *Supplément historique 2005* de l'Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure.

son point de vue de mathématicien et ses souvenirs personnels. Évoquant la thèse de Légaut, il indique que la méthode utilisée par le doctorant relève de la « géométrie algébrique italienne », sans en donner davantage de détails<sup>302</sup>.

Ce lien avec des méthodes de la géométrie algébrique italienne ne se retrouve pas dans les mémoires qui sont soutenus successivement après Légaut. Les quatre thèses d'Orgeval, d'Eger, de Gauthier et de Lesieur, présentées près de vingt ans plus tard, utilisent à nouveau des méthodes de la géométrie algébrique italienne. Ni la thèse de Légaut ni d'autres de ses publications ne sont cependant mentionnées par ces 4 doctorants.

Entre la thèse de Légaut et ces quatre doctorats<sup>303</sup>, Georges Nicoladzé, en 1928, puis Henri Adad et Sylvain Wachs en 1935 et 1936, soutiennent un doctorat classé en géométrie algébrique. Le premier d'entre eux fonde sa recherche sur les travaux d'Élie Cartan<sup>304</sup>. Les deux suivants abordent deux sujets distincts et différents de celui de Nicoladzé et de l'ensemble des autres thèses de géométrie algébrique.

Henri Adad étudie des problèmes sur la théorie conforme des surfaces<sup>305</sup>. Il se fonde principalement sur des travaux de Vessiot en théorie conforme des surfaces<sup>306</sup>. Ces travaux de Vessiot et la thèse d'Adad sont par ailleurs cités dans une autre thèse, celle de Robert Potier, POTIER 1940, classée en géométrie différentielle, où sont étudiés des questions de géométrie conforme<sup>307</sup>.

Le mémoire de Sylvain Wachs porte sur la géométrie projective quaternionnienne et plus précisément sur l'étude de son groupe des substitutions ainsi que sur l'étude des homographies de cette géométrie et de leur forme réduite<sup>308</sup>. Le doctorant cherche en fait à généraliser les principaux résultats de la géométrie projective complexe lorsque

302. Cf. DUBREIL 1982, p. 79. Il la décrit en ces termes :

« Il s'agissait de l'étude des systèmes de points dans le plan, des courbes algébriques contenant un tel système, du problème analogue dans l'espace : surfaces passant par des courbes et éventuellement des points donnés, tout cela visant à généraliser (évidemment, et beaucoup !) le théorème  $Af + B\phi$  de Max Noether. La méthode relevait de la géométrie algébrique italienne (utilisation systématique des « séries linéaires » de points sur une courbe). »

303. C'est-à-dire entre 1925 et 1943.

304. Cf. la partie précédente.

305. D'après Élie Cartan dans le rapport qu'il écrit sur la thèse, le but du travail d'Adad est de « déterminer complètement les surfaces algébriques plusieurs fois cerclées ».

306. Cf. ADAD 1935, p. 1.

307. Cf. POTIER 1940, p. 62, la bibliographie de ce mémoire. Comme je l'ai indiqué dans la partie précédente, la thèse de Potier porte, pour l'essentiel, sur la théorie des espaces à connexion conforme de Cartan. Cependant, il étudie quelques problèmes de géométrie conforme ordinaire sur les courbes tracées sur les surfaces. C'est dans ce cadre qu'il se réfère notamment aux travaux de Vessiot, cf. POTIER 1940, p. 3.

308. D'après Élie Cartan dans le rapport et Wachs dans WACHS 1936, p. 1-2, le groupe de la géométrie quaternionnienne est formé par « les substitutions linéaires unilatérales sur les coordonnées homogènes » et « les coefficients quaternionniens [sont] placés à gauche des variables ».



les quantités complexes sont remplacées par des quaternions<sup>309</sup>. Il part des travaux déjà effectués par Élie Cartan dans ses *Leçons sur la géométrie projective complexe*<sup>310</sup> et par Study<sup>311</sup> sur la droite projective quaternionnienne. Ce travail de Cartan ne fait pas partie des travaux auxquels se réfèrent certains doctorants en géométrie différentielle qui fondent leur recherche sur certaines théories de Cartan. Il n'est ainsi mentionné dans aucun des mémoires de géométrie différentielle qui se rapportent à ses travaux.

Les questions étudiées par ces deux doctorants ne sont quasiment pas retravaillées ou même abordées dans le reste du corpus des thèses de géométrie. Par exemple, les quaternions ne semblent être utilisés dans aucun mémoire de géométrie ; seul Gaston Benneton y fait référence dans une thèse d'arithmétique et d'algèbre soutenue en 1943, BENNETON 1943, thèse dont le sujet est à la marge de ceux qui sont étudiés par les autres doctorats de ce domaine. Les doctorats d'Adad et Wachs constituent ainsi des îlots de recherche. Le premier révèle un intérêt pour la théorie conforme des surfaces auquel Vessiot participe, le second montre un intérêt pour l'approfondissement de la géométrie projective complexe. Ils portent sur des sujets différents de ceux qui sont abordés entre 1943 et 1945 dans les thèses de d'Orgeval, Eger, Gauthier et Lesieur. Ils n'utilisent pas non plus les mêmes méthodes.

Le groupe formé par les quatre doctorats se caractérise par un recours à des méthodes et à des références empruntées à la géométrie algébrique italienne. D'Orgeval, Eger, Gauthier et Lesieur évoquent ainsi certains des travaux d'Enriques, Severi ou Segre. Ils en reprennent certaines méthodes de démonstration. Ces travaux servent également de point de départ pour étudier certaines questions particulières. Ils sont également cités comme travaux de référence dans la comparaison de résultats trouvés<sup>312</sup>. Les quatre doctorants ne se réfèrent cependant pas à un même ensemble de travaux de ces mathématiciens. Chaque mémoire cite certaines références que l'on ne retrouve pas dans les autres thèses. Seuls les auteurs de ses références sont identiques.

D'après Henri Cartan<sup>313</sup>, Bernard d'Orgeval utilise des « méthodes algébriques de l'École Italienne » pour démontrer le principal théorème de son mémoire relatif à l'existence de certaines familles de surfaces algébriques de genre un et déjà démontré d'une façon différente par Enriques et Severi en 1908-1909<sup>314</sup>. Henri Cartan cite parmi

---

309. C'est ce qu'affirme Élie Cartan dans le rapport et c'est également ce qu'explique Wachs dans son introduction, cf. WACHS 1936, p. 1.

310. Cf. CARTAN 1931.

311. Sylvain Wachs mentionne les quatres articles publiés par Study dans le *Mathematische Zeitschrift* en 1923 et 1924 et tous intitulés « Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen ».

312. Je ne prétends pas être exhaustive dans la preuve que j'apporte ci-dessous à ces propos.

313. Dans le rapport.

314. Ces deux mathématiciens utilisaient la voie transcendante d'après Henri Cartan.

les méthodes utilisées par le doctorant celles qu'il adapte de la « méthode du point-multiple » d'Enriques ou de la « méthode des plans multiples » de Chisini<sup>315</sup>.

Max Eger part des résultats récents de mathématiciens italiens comme Severi, Enriques et Segre. Il les généralise et dégage les invariants fondamentaux d'une variété de dimension quelconque à partir de la considération de systèmes canoniques à cette variété<sup>316</sup>. Selon ses propres termes, il « accorde sa préférence à la méthode transcendante, point de vue de l'école française et qu'ont illustré les travaux de Picard et d'Humbert ». Il distingue ainsi explicitement sa méthode de la méthode algébrique-géométrique de l'école italienne qui est employée simultanément par J. Todd dans le même but<sup>317</sup>. Ce qui ne l'empêche pas, d'après le rapport de René Garnier, d'interpréter les résultats obtenus par cette méthode comme des généralisations des résultats de mathématiciens italiens tels de Franchis<sup>318</sup> ou Severi<sup>319</sup>.

L'objectif de Luc Gauthier est de généraliser à un espace projectif à dimension  $r$  quelconque l'étude des congruences algébriques linéaires telles qu'il passe une seule droite par un point générique de l'espace et de leurs variétés focales. Il part notamment des résultats d'Ascione repris par Severi et établis dans un espace à 4 dimensions. Il ne reprend pas directement la méthode utilisée par Severi pour déterminer l'ensemble de ces congruences pour  $r = 4$ , car elle repose sur la théorie des singularités des variétés algébriques qui n'est pas encore suffisamment avancée pour être généralisée à  $r$  quelconque<sup>320</sup>. Cependant il reprend lors de ses démonstrations certaines méthodes italiennes, par exemple la méthode de dégénérescence inspirée de celle qu'emploie Severi dans l'étude des courbes gauches algébriques<sup>321</sup>. Gauthier fait également référence à certains résultats d'Enriques sur les « variétés à trois dimensions à sections curvilignes elliptiques »<sup>322</sup> ou encore à des méthodes inspirées de celles d'Ascione lorsqu'il étudie le rôle des variétés focales singulières au moyen d'une transformation birationnelle<sup>323</sup>.

Enfin, Léonce Lesieur part notamment des résultats de Rosatti lorsqu'il étudie la rationalité des intersections d'hyperquadriques. Dans son étude de la génération des systèmes d'une hypercyclide, il reprend les principes utilisés par Segre dans l'étude des surfaces du 4<sup>e</sup> ordre à conique double<sup>324</sup>.

---

315. L'utilisation de ces méthodes est également revendiquée par le doctorant dans son avant-propos et dans son introduction, cf. D'ORGEVAL 1943, p. 2-5.

316. Severi, Enriques et Segre l'ont déjà fait pour les surfaces, et Segre a abordé le cas des variétés de dimensions quelconques, cf. EGER 1943, p. 2-3.

317. Cf. EGER 1943, p. 2-3.

318. relatifs à des formules sur les variétés de contact.

319. lorsqu'Eger construit les variétés canoniques d'un espace projectif à  $n$  dimensions.

320. Cf. le rapport qu'écrit Cartan sur la thèse et GAUTHIER 1944, p. 5.

321. Cf. GAUTHIER 1944, p. 5.

322. Cf. le rapport d'Élie Cartan.

323. Cf. GAUTHIER 1944, p. 5.

324. Cf. le rapport d'Élie Cartan sur la thèse ainsi que LESIEUR 1945, p. 2.

Les références à la géométrie algébrique italienne constituent une part importante mais non exclusive des citations mentionnées par les quatre doctorants. Ces derniers se réfèrent également à d'autres travaux et à d'autres méthodes, français ou allemands par exemple. Max Eger utilise ainsi une approche « transcendante » pour élaborer sa théorie des systèmes canoniques à une variété de dimension quelconque. Il emprunte certaines de ses idées à des méthodes et à des démonstrations réalisées par des mathématiciens français. Dans le rapport de thèse, René Garnier associe certains éléments de la théorie d'Eger avec la terminologie et les notations d'Élie Cartan sur les formes différentielles. Par ailleurs, Léonce Lesieur fonde certaines de ses méthodes sur des travaux de Van der Waerden, lorsqu'il cherche à généraliser les résultats obtenus sur la rationalité de la variété commune à deux hyperquadriques au cas d'une intersection quelconque de  $r$  hyperquadriques<sup>325</sup>. Il fonde également certains de ses développements sur des notions introduites par Luc Gauthier dans sa thèse, telles que les variétés développables. Lesieur mentionne notamment certains des résultats obtenus par Gauthier<sup>326</sup>.

L'influence de la géométrie algébrique italienne sur le travail de Bernard d'Orgeval est renforcée par les relations qu'entretient ce dernier avec les mathématiciens italiens. Bernard d'Orgeval a ainsi effectué un séjour de deux ans auprès d'Enriques à Rome entre 1936 et 1938<sup>327</sup>. Dans l'introduction de sa thèse, il écrit d'ailleurs que son travail a commencé sur les indications de ce dernier lors de ce séjour<sup>328</sup>. En ce qui concerne les autres doctorants, les différentes notices biographiques<sup>329</sup> n'indiquent pas de contacts directs avec les mathématiciens italiens. On peut alors s'interroger sur l'origine de cette influence sur leurs travaux, sur la diffusion de telles méthodes en France.

On peut avancer l'hypothèse que Marcel Légaut a joué un certain rôle. En effet, titulaire de la chaire Peccot en 1924-1925<sup>330</sup>, il donne un cours dont le sujet s'inspire de celui de sa thèse et qui s'intitule : « Étude géométrique des Systèmes de points dans un plan. Application à la théorie des courbes gauches algébriques ». Une indication de l'impact qu'a pu avoir ce cours peut être donnée par le souvenir qu'en a Paul Dubreil et qu'il livre 57 ans après dans DUBREIL 1982, p. 79<sup>331</sup>. Ce dernier, alors étudiant, a suivi le cours de Légaut. Dans DUBREIL 1982, il évoque l'impact qu'a eu Marcel Légaut

325. Cf. LESIEUR 1945, p. 2. Léonce Lesieur écrit ainsi : « Les méthodes allient l'intuition géométrique au support solide constitué par des éléments simples de géométrie analytique projective des hypersurfaces » et il précise dans la note 1 qu'on peut trouver ces éléments « par exemple dans VAN DER WAERDEN, *Einführung in die algebraische geometrie*, 1939, p. 1 à 43.

326. Élie Cartan dans le rapport mentionne notamment un résultat relatif aux variétés focales de congruences linéaires de droites.

327. Et il ne s'agit pas d'une bourse accordée par la fondation Rockefeller mais d'après PELLETIER 2007 d'une bourse de thèse.

328. Cf. D'ORGEVAL 1943, p. 2. Signalons que d'Orgeval a ensuite terminé sa thèse en captivité pendant la seconde guerre mondiale.

329. Cf. TRAYNARD 1955; GERMAIN 1982; CAUCHON 2002.

330. Cf. l'*Annuaire du Collège de France*, 1925.

331. Et également dans DUBREIL 1981. La nature de cette indication ne permet cependant pas d'en déduire un état de fait. J'ai montré en introduction de cette thèse l'importance que peut prendre

sur lui. Dubreil affirme avoir d'abord été initié à la géométrie algébrique par le cours d'Émile Picard sur les fonctions algébriques et les intégrales abéliennes. Il aurait alors « été frappé par les théorèmes de Noether sur la réduction des singularités des courbes algébriques planes »<sup>332</sup>. Le cours Peccot donné par Marcel Légaut lui aurait ensuite permis de découvrir certaines avancées de la géométrie algébrique à « l'italienne »<sup>333</sup>. Au retour de son service militaire en 1927, Marcel Légaut l'aurait incité à choisir un sujet de thèse dans le domaine de la géométrie algébrique alors que Dubreil lui demandait conseil. Il aurait alors approfondi sa connaissance du domaine par la lecture du livre d'Enriques et Chisini, *Courbes et fonctions algébriques d'une variable*, Paris, Gauthier-Villars, 1926, traduit par Marcel Légaut<sup>334</sup> et cité également par Lesieur dans sa thèse<sup>335</sup>. Dubreil choisit finalement de travailler pour son doctorat en algèbre sur la théorie des idéaux<sup>336</sup>. Après sa thèse, il refait par la suite de la géométrie algébrique<sup>337</sup>. Lors de son séjour à Rome en 1930-1931 où il fut en contact avec Enriques, Castelnuovo et Severi, ces mathématiciens l'auraient encouragé « à persévérer dans l'application de la théorie moderne des idéaux à des problèmes de géométrie et en particulier à celui dont [il] souhaitait [s]'occuper : l'étude de l'intersection d'une variété et d'une hypersurface algébriques quelconques dans l'espace projectif »<sup>338</sup>. On ne peut que remarquer la proximité de ces questions avec celles qu'abordent Luc Gauthier et Léonce Lesieur en 1944-45.

Les souvenirs que relate Paul Dubreil révèlent une certaine influence de Légaut au milieu des années 1920. Il est cependant difficile d'en mesurer l'ampleur sans d'autres indicateurs. Par la suite, professeur à Rennes à partir de 1925, il pourrait continuer à jouer un certain rôle mais de façon moins directe jusqu'en 1940 où il se retire de la vie universitaire<sup>339</sup>. Ces souvenirs révèlent également l'intérêt de Paul Dubreil pour des questions de géométrie algébrique. Peut-être aurait-il pu lui aussi exercer une certaine influence au cours des années 1930 ? La question est encore ouverte, d'autant que les thèses de d'Orgeval, Eger, Gauthier et Lesieur ne le citent pas.

L'influence exercée par d'autres mathématiciens français, professeurs à la faculté des sciences de la Sorbonne ou au Collège de France, semble faible, notamment pour les

---

la reconstruction des souvenirs. Il faut donc considérer cette indication tout en étant conscients des limites de l'information qu'elle fournit.

332. Cf. DUBREIL 1981, p. 60 et DUBREIL 1982, p. 79. Marcel Légaut fait d'ailleurs référence à ces théorèmes dans sa thèse.

333. Cf. DUBREIL 1981, p. 60.

334. Cf. DUBREIL 1981 et DUBREIL 1982.

335. Cf. LESIEUR 1945, p. 3.

336. dans *Recherches sur la valeur des exposants des composants primaires des idéaux de polynômes*, 1930.

337. Cf. DUBREIL 1982.

338. Cf. DUBREIL 1982, p. 79-80.

339. Il devient alors paysan montagnard, cf. notamment les sites internet [http://legaut.chez-alice.fr/vie/vie\\_legaut.htm](http://legaut.chez-alice.fr/vie/vie_legaut.htm).

quatre derniers doctorants en géométrie algébrique. Hormis brièvement dans la thèse d'Eger, leurs travaux ne sont pas cités. De plus, les remerciements écrits par les doctorants à la fin de leur introduction se caractérisent par leur brièveté. Ils semblent assez clairs sur le rôle joué par ces membres de l'enseignement supérieur français<sup>340</sup>. La seule nuance à ce propos concerne Lucien Godeaux, professeur à l'université de Liège, que Luc Gauthier remercie vivement<sup>341</sup>. De plus, dans la notice sur Luc Gauthier<sup>342</sup>, Paul Germain écrit que ce dernier a fait sa thèse « sous la direction de Lucien Godeaux auquel il est toujours resté très attaché ». Même s'il faut prendre garde à l'interprétation du terme « direction » de thèse qui, pendant l'entre-deux-guerres, n'a pas la signification actuelle, cette précision, rare parmi les notices nécrologiques, souligne le lien réel entre les deux mathématiciens.

De plus, à l'exception de Marcel Légaut, aucun des doctorants de géométrie algébrique qui ont soutenu avant la seconde guerre mondiale n'a continué à publier dans le domaine de la géométrie algébrique. Je n'ai pu obtenir de renseignements sur le devenir de Georges Nicoladze après la soutenance de sa thèse mais en tant qu'étudiant géorgien, il est très vraisemblable qu'il soit retourné ensuite en Géorgie<sup>343</sup>. Quant à Henri Adad, d'après le « Supplément historique » de l'*Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, il finit sa carrière dans l'enseignement secondaire<sup>344</sup>. On peut alors supposer qu'il n'est jamais allé dans l'enseignement supérieur<sup>345</sup>.

Parmi les quatre groupes de thèses classées en géométrie algébrique, un seul se distingue par sa taille : celui composé par les quatre thèses de d'Eger, d'Orgeval, Gauthier

340. Benoît d'Orgeval remercie Élie Cartan mais également Lucien Godeaux, membre de l'université de Liège, pour les livres qu'ils lui ont envoyé pendant sa captivité durant la seconde guerre mondiale, D'ORGEVAL 1943, p. 2. Eger exprime de la « déférente gratitude » envers Élie Cartan et remercie René Garnier (le rapporteur du mémoire) pour la « bienveillante compétence avec laquelle il a bien voulu examiner ce travail », EGER 1943, p. 4. Luc Gauthier remercie Georges Darmon pour l'« avoir dirigé dans la voie captivante de la Géométrie algébrique » et Élie Cartan « pour avoir bien voulu examiner [son] travail », GAUTHIER 1944, p. 7. Enfin Léonce Lesieur adresse ses « vifs remerciements à M. Élie Cartan, à M. Bouligand et à M. Leray » (les membres de son jury) pour la bienveillance avec laquelle ils ont accueilli ce travail, LESIEUR 1945, p. 3.

341. Il lui exprime ainsi sa reconnaissance, GAUTHIER 1944, p. 7 : « pour l'affectueuse sollicitude avec laquelle il n'a cessé, durant toutes [ses] recherches, de [lui] prodiguer des encouragements et des conseils d'une rare compétence ».

342. Cf. GERMAIN 1982, p. 58.

343. Suivant ainsi l'exemple de nombreux étudiants roumains, notamment ceux qui ont soutenu une thèse en théorie des fonctions. Je renvoie à cette partie pour davantage de détails. Les publications de Nicoladze recensées par le *Jahrbuch* s'arrêtent en 1931, 3 ans après sa soutenance de thèse. Elles semblent toutes prolonger les travaux de son doctorat sur les systèmes continus de figures.

344. en tant que professeur de spéciales au Lycée Saint-Louis.

345. Ce qui semble confirmé par d'autres sources, cf. le fichier sur Henri Adad en annexe. De plus une seule autre publication du mathématicien datant d'après sa thèse est référencée dans le *Jahrbuch* : elle date de 1938 et il s'agit d'une note aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* : « Sur les cercles paratactiques à deux cercles donnés, et les surfaces plusieurs fois cerclées », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, (206), p.155-157, 1938.

et Lesieur. Il se caractérise par l'utilisation importante dans ces mémoires de méthodes de la géométrie algébrique italienne et par les références aux travaux des mathématiciens italiens, Enriques ou Severi par exemple. Il se trouve également que toutes ces thèses sont soutenues simultanément pendant la seconde guerre mondiale entre 1943 et 1945. On pourrait lui raccrocher le premier des groupes, celui constitué par la thèse de Marcel Légaut, qui d'après le témoignage d'un contemporain de Légaut se fonderait également sur des méthodes de la géométrie algébrique italienne.

Les deux autres groupes correspondent à des sujets isolés dont il faudrait déterminer comment ils sont reliés à des intérêts de la recherche mathématique en France travaillés dans d'autres cadres que les doctorats<sup>346</sup>. Les réseaux de références sollicités par les doctorants diffèrent fortement entre eux et par rapport aux autres thèses classées en géométrie algébrique. Ils traitent en outre de thèmes dont certains semblent proches du domaine de la géométrie différentielle. Les théories qui y sont citées proviennent ainsi de travaux d'Élie Cartan (pour Nicoladzé et Wachs) ou de la géométrie conforme et des travaux de Vessiot pour Henri Adad.

### 4.3.3 Les thèses de topologie

Six mémoires sont classés dans la rubrique « topologie » construite à partir de la section correspondante du *Jahrbuch*<sup>347</sup>. Un doctorat se distingue de cet ensemble, celui d'un étudiant normalien, Sainte-Laguë<sup>348</sup>. Sainte-Laguë étudie la théorie des réseaux avec une approche décalée par rapport aux autres thèses classées en géométrie qui travaillent ce sujet<sup>349</sup>. D'après le rapport de Borel sur la thèse, le problème étudié par le doctorant est ainsi une question de géométrie de situation dont l'étude est connexe à des questions d'arithmétique supérieure. Sainte-Laguë définit dès son introduction une terminologie et des notions relatives à l'étude générale des réseaux à laquelle il entend procéder et qui ne trouvent aucun écho dans le reste du corpus des thèses. Il ne cite par ailleurs aucun mathématicien et aucune référence qui aurait influencé son travail.

On peut distinguer parmi les cinq autres doctorats deux groupes différents en se fondant sur les références mathématiques citées par les doctorants. Le premier se réfère à certains travaux de Maurice Fréchet, le second est lié à des travaux d'Élie

346. Ce qui n'est pas l'objectif de ma thèse.

347. Cette dernière si elle n'apparaît explicitement dans la classification du répertoire qu'en 1925 y voit cependant recenser la thèse de Sainte-Laguë, *Les réseaux*, pourtant soutenue en 1924. On pourrait se demander si certaines des thèses de géométrie soutenues avant 1925 pourraient être recensées également en « Topologie ». Pour pallier ce défaut, j'ai regardé pour la période précédente les classements des thèses de géométrie et aucune n'est classée dans une section qui semble *a priori* concerner des questions de topologie et aucune d'entre elles n'est d'ailleurs classée par le *Jahrbuch* dans la section « considérations théoriques de continuité et de théorie des ensembles – Analysis situs ».

348. *Les réseaux*, 1924.

349. Outre son approche qui se démarque des autres doctorats, précisons également que Sainte-Laguë n'obtient que la mention honorable pour son travail : c'est le seul normalien à obtenir une telle mention entre 1914 et 1945.

Cartan. Cette division se trouve être également thématique : les thèses du premier groupe étudient des ensembles abstraits, celle du second font une étude topologique de variétés.

### L'étude des ensembles abstraits : la référence à Fréchet

Deux doctorats abordent des questions relatives aux espaces abstraits en se référant à Maurice Fréchet. Il y a tout d'abord, en 1930, la thèse d'un étudiant japonais, Kijiro Kunugui, puis en 1934, celle d'un étudiant français, Antoine Appert, respectivement *Sur la théorie du nombre de dimensions*, 1930 et *Propriétés des espaces abstraits les plus généraux*, 1934. Ces deux doctorats sont fondés sur certains travaux de Maurice Fréchet, parmi lesquels la thèse de ce dernier de 1908 et surtout ses articles sur les ensembles abstraits parus dans les années 1920 et dont les résultats sont résumés sans démonstration par Fréchet dans *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale* en 1928<sup>350</sup>. Les deux doctorants, dès leur introduction, se réfèrent explicitement à ce livre qui apparaît comme l'ouvrage de référence sur la théorie des ensembles abstraits. Fréchet y fait d'ailleurs le point sur l'ensemble des publications sur le sujet<sup>351</sup>.

Kunugui et Appert s'intéressent plus particulièrement à deux points particuliers de la théorie des espaces abstraits de Maurice Fréchet.

Kinjiro Kunugui étudie la notion de dimension pour des espaces abstraits. Il en examine deux définitions différentes : la première donnée initialement par Fréchet en 1909, la seconde introduite par Poincaré en 1912, ensuite reprise par Brouwer, puis par Menger et Urysohn en 1922 et qui repose sur une définition par récurrence<sup>352</sup>. Après avoir rappelé les principes de la théorie des ensembles abstraits développée par Fréchet, Hausdorff, Riesz, Tietze et Urysohn, Kunugui propose une nouvelle définition de la notion de dimension, qui lui permet de relier les deux précédentes et de les unifier<sup>353</sup>. Kunugui ne cite comme travaux de Fréchet sur la théorie du nombre de dimensions que sa note aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* de 1909 et un article de 1910 dans les *Mathematischen Annalen*<sup>354</sup>. Depuis la publication de ces articles, Fréchet a

---

350. Cf. FRÉCHET 1928. C'est ce que revendique Maurice Fréchet dans la préface de son ouvrage.

351. Antoine Appert mentionne ainsi « la bibliographie très complète des publications se rapportant aux espaces abstraits » à la fin de l'ouvrage de Fréchet, APPERT 1934a, p. XI de l'Avant-Propos. Dans l'introduction de ce livre, Fréchet insiste également sur la bibliographie qu'il dresse en fin d'ouvrage et où il liste l'ensemble des publications françaises mais aussi très largement étrangères.

352. Cf. KUNUGUI 1930, p. 1-2.

353. C'est le résultat que Kunugui revendique, cf. KUNUGUI 1930, p. 3. L'absence de rapport sur la thèse ne me permet cependant pas d'avoir un autre avis sur la question. W. Hurewicz dans le rapport sur la thèse qu'il écrit pour le *Jahrbuch* affirme également que tel est le but de Kunugui et rien dans le rapport n'indique que le doctorant n'y est pas arrivé.

354. Les deux références sont les suivantes : M. Fréchet, 1909, « Une définition du nombre de dimensions d'un ensemble abstrait », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, (148), p.1152 et M. Fréchet, 1910, « Les dimensions d'un ensemble abstrait », *Mathematische Annalen*, (68), p.145-168.

cependant rassemblé et repris dans FRÉCHET 1928 les recherches entreprises sur ce sujet et il y a présenté de nouveau sa théorie<sup>355</sup>. Il n'expose pas la seconde définition par récurrence de la dimension mais la signale<sup>356</sup>. Il indique également que les autres définitions de la notion du nombre de dimensions « vaudraient [...] qu'on leur consacre une étude comparative spéciale ». Fréchet ne le fait pas dans son livre mais cette étude correspond au travail réalisé par Kunugui. On peut alors se demander quelle influence a exercé Fréchet sur l'étudiant japonais, venu travailler auprès de lui en 1928, d'abord à Strasbourg, puis à Paris<sup>357</sup>. Je n'ai cependant pas encore pu trouver de textes ou de correspondances renseignant davantage sur les liens probables entre le doctorant et le mathématicien.

Antoine Appert étudie certains espaces abstraits de Maurice Fréchet, notamment les espaces  $(\mathcal{V})$ . L'étude de ces espaces occupe plusieurs sections de la seconde partie de FRÉCHET 1928 et l'essentiel de la thèse d'Appert<sup>358</sup>. Plus encore que le mémoire de Kunugui, la thèse d'Appert est directement liée aux publications de Fréchet et notamment à FRÉCHET 1928. Fréchet est l'auteur qu'Appert cite le plus. Il mentionne également d'autres travaux comme ceux de Chittenden, Tychonoff et Vedenissou ou Haratomi<sup>359</sup>, mais ces citations occupent une place moins importante que celles relatives aux travaux de Fréchet. De plus, dans le rapport de thèse, Maurice Fréchet explique que lui-même a déjà obtenu des extensions des propriétés de l'espace linéaire aux espaces  $(\mathcal{V})$  les plus généraux et qu'il a « pu en rassembler un certain nombre dans [son] livre « Les Espaces abstraits ». Mais faute de place, [il] n'a pu y accueillir que les énoncés. Les démonstrations restaient éparses dans un grand nombre de périodiques ». Explicitant le rôle d'Appert, il écrit :

« C'est un premier mérite de M. Appert, d'avoir su réunir ici, en un exposé cohérent, énoncés et démonstrations de propriétés déjà connues des espaces  $(\mathcal{V})$ . Il ne pouvait s'agir d'une simple compilation. Les démonstrations publiées, dues à divers auteurs se chevauchaient l'une l'autre et faisaient usage de définitions encore différentes à un moment où la terminologie était en

---

Ce ne sont pas les seuls travaux de Fréchet que cite Kunugui. Comme je l'ai indiqué précédemment, il fait également référence à FRÉCHET 1928 dont il reprend la terminologie, cf. KUNUGUI 1930, p. 3.

355. Il y consacre la première section de sa première partie.

356. Il écrit ainsi : « Nous nous contenterons, dans ce qui suit, de préciser notre définition et d'en étudier les conséquences, ceci sans méconnaître l'intérêt que présentent les autres » (il en signale en effet une troisième définie par Hausdorff et Bouligand), cf. FRÉCHET 1928, p. 27-29.

357. Cf. PRZYTYSKI 2002, p. 2.

358. Appert dans son introduction et Fréchet dans le rapport sur la thèse présentent l'étude de ces espaces comme l'objet essentiel du mémoire et font le rapprochement entre la thèse et le livre de Fréchet. D'après le rapport de thèse, un espace  $(\mathcal{V})$  est un ensemble de points ou d'éléments de nature quelconque, où à chaque point  $a$  est attachée une famille d'ensembles appelés voisinages de  $a$ .

359. Cf. APPERT 1934a, p. VIII-IX. Fréchet les évoque également dans FRÉCHET 1928 lorsqu'il présente certaines propriétés des espaces  $\mathcal{V}$ .



cours d'évolution. M. Appert a su mener à bien ce travail grâce à un sens critique averti et à une rigueur toujours en éveil.

Mais M. Appert ne s'en est pas tenu à la rédaction de cet exposé, qui comblait une lacune. *Son second mérite* est d'avoir introduit des notions nouvelles et obtenu des propriétés intéressantes dans le domaine dont il dressait l'inventaire. »

Antoine Appert procède donc à une mise au clair de la théorie des ensembles ( $\mathcal{V}$ ) : il fait le point des résultats existants et démontre de nouvelles propriétés. Il réalise ce travail dans sa thèse et dans la publication qui en est faite dans les *Actualités scientifiques et industrielles*, APPERT 1934c,b. Cette dernière publication est préfacée par Maurice Fréchet : il y tient des propos semblables à ceux qu'il écrit dans le rapport de thèse<sup>360</sup>.

On peut rapprocher ces différentes thèses de celle de Ky Fan, *Sur quelques notions fondamentales de l'Analyse générale*. Dans son mémoire, soutenu plus tardivement, en 1941, le doctorant étudie certaines notions fondamentales de l'analyse générale qui se rattachent soit aux transformations continues, soit aux transformations bicontinues<sup>361</sup>. Les ensembles qui interviennent dans ses considérations sont des ensembles abstraits. Ky Fan obtient notamment un théorème d'existence des équations différentielles abstraites<sup>362</sup>. Certaines de ces notions sont développées par Fréchet dans FRÉCHET 1928. Le doctorant fait d'ailleurs référence à plusieurs reprises à cet ouvrage et fonde ses recherches pour l'essentiel sur les travaux du mathématicien<sup>363</sup>. Cette thèse n'est cependant pas classée comme les précédentes dans la rubrique « Topologie » par ma méthode de classement mais dans la section « Théorie des ensembles ». On atteint peut-être ici une des limites de ma classification fondée sur le *Jahrbuch*. Ky Fan étudie dans un des chapitres de sa thèse la notion du type de dimensions. Sous l'indication de Fréchet<sup>364</sup>, il introduit une nouvelle notion<sup>365</sup> qui complète des travaux de Fréchet sur le sujet et la thèse de Kunugui, que Ky Fan cite dans sa bibliographie<sup>366</sup>. Les deux travaux semblent ainsi liés et pourtant ils sont classés dans deux rubriques différentes.

360. Il n'y a aucune différence entre le manuscrit de la thèse et APPERT 1934c,b : même l'introduction du mémoire est laissée identique.

361. Cf. FAN 1941, p. 1.

362. D'après le rapport qu'écrit Fréchet sur le mémoire.

363. Dans son introduction Ky Fan précise ainsi que les travaux de Fréchet « sont à la base de toute l'Analyse générale », FAN 1941, p. 2. De plus, dans le rapport de thèse, Fréchet explique l'origine du travail de Ky Fan : ce dernier est venu lui « faire part de son désir de faire des recherches en Analyse générale ». Fréchet « lui [a] signalé quelques questions qui restaient à résoudre parmi celles qu'[il] avait posées dans [ses] publications ». D'après le mathématicien, les réponses apportées par Ky Fan constituent sa thèse.

364. Ky Fan l'explicite dans l'introduction de son mémoire et précise la publication de Fréchet où figure cette indication : « Sur les nombres de dimensions », *Fundamenta Mathematicae*, (11), 1928, p.287-290.

365. la notion de type de dimensions homogènes.

366. Cf. FAN 1941, p. 78.

La description que fait Ky Fan du dernier chapitre de sa thèse pose également des questions sur le classement du mémoire. Ky Fan écrit qu'il y donne « une caractérisation topologique pour l'arc simple ainsi que pour la demi-droite topologique, dans des espaces abstraits très généraux »<sup>367</sup>.

Un dernier doctorat, classé dans la rubrique « topologie » étudie des problèmes liés à des espaces abstraits. Il ne se réfère pas aux travaux de Maurice Fréchet mais, par sa thématique, il peut être rapproché des thèses de Kunugui et d'Appert. Il s'agit du travail de l'étudiant normalien Eugène Blanc, *Les espaces métriques quasi-convexes*, 1938. D'après Paul Montel<sup>368</sup>, Eugène Blanc « apporte une contribution importante à l'étude des caractères des notions de distance dans un espace abstrait ». Plus précisément, après avoir montré les singularités que peuvent présenter les « sphères » d'un espace métrique quelconque, Eugène Blanc introduit la condition de « quasi-convexité » que doivent vérifier les métriques des espaces pour empêcher ces anomalies de se produire : les sphères se comportent alors à peu près comme les sphères en géométrie euclidienne<sup>369</sup>. L'essentiel de son mémoire est consacré à la définition de cette condition et à l'étude des ensembles dont la métrique la vérifie.

Ce dernier mémoire ne se rapporte pas aux publications de Fréchet. Il a comme point de départ les anomalies constatées sur les sphères d'un espace métrique quelconque. Eugène Blanc en remarque notamment une en étudiant la limite d'une suite convergente d'ensembles C-M. de rayon  $\alpha$ <sup>370</sup>. Ces ensembles sont notamment étudiés par Georges Bouligand et Eugène Blanc fait référence à l'ouvrage du mathématicien *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, BOULIGAND 1932. Les relations entre le mathématicien et le doctorant sont établies : dans les années 1930, l'influence de Bouligand est importante à la faculté de Poitiers, comme je l'ai montré dans le troisième chapitre, et Eugène Blanc passe au moins une année à Poitiers en 1932-1933<sup>371</sup>. Henri Cartan dans CARTAN 1972, p. 79 précise que c'est à cette période qu'Eugène Blanc « a décidé de se mettre à la préparation d'une thèse sous l'impulsion de Georges Bouligand », ce que confirme Eugène Blanc lorsqu'il affirme que Bouligand « a donné à [ses] recherches leur élan initial ». La question se pose du rôle des travaux de Bouligand dans le développement de la théorie des espaces quasi-convexes par Eugène Blanc<sup>372</sup>. Le doctorant ne cite les travaux du mathématicien que comme point de départ de ses recherches. Il ne donne aucune autre référence mathématique pour l'élaboration de sa

---

367. Cf. FAN 1941, p. 2.

368. Cf. le rapport de thèse.

369. Cf. BLANC 1938, p. 1-2. Eugène Blanc appelle « sphère » dans un espace métrique quelconque l'ensemble des points dont la distance à un point donné est inférieure (ou inférieure ou égale) à un nombre donné.

370. Cf. BLANC 1938, p. 1-2. Les ensembles C.-M. désignent les ensembles de Cantor-Minkowski.

371. Cf. CARTAN 1972, p. 79.

372. La seule indication est le remerciement adressé par Eugène Blanc à Bouligand, affirmant que ce dernier « n'a cessé de s'intéresser à ses travaux ».

théorie. Il ne mentionne que d'autres notions de convexité introduites par Menger et Aronszajn. Il étudie alors les relations entre sa définition de la quasi-convexité et les définitions de convexité de ces derniers.

### L'étude topologique des variétés

La thématique étudiée par le second groupe de thèses classées en topologie concerne l'étude topologique de variétés réalisée notamment avec des notions de théorie des groupes. Ce second groupe est composé des thèses de Georges de Rham<sup>373</sup> et de Charles Ehresmann<sup>374</sup>. De Rham et Ehresmann ont des références communes. Tous les deux citent des travaux de Lefschetz<sup>375</sup>, des travaux d'Hermann Weyl<sup>376</sup> et également des travaux d'Élie Cartan, relatifs à l'analysis situs et au calcul des nombres de Betti de certains espaces<sup>377</sup>. Les deux mémoires sont en outre directement reliés, Charles Ehresmann citant la thèse de Georges de Rham, soutenue quatre ans avant son propre doctorat<sup>378</sup>.

Les deux mémoires ont certaines références communes ; ils n'adoptent cependant pas le même point de vue et n'étudient pas les mêmes objets mathématiques.

Georges de Rham reprend l'analysis situs combinatoire d'Hermann Weyl<sup>379</sup> et la théorie des intersections et des enlacements pour étudier les propriétés du champ d'intégration et des intégrales multiples dans une variété close à  $n$  dimensions. Il donne les démonstrations de théorèmes énoncés par Élie Cartan dans une note aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* « Sur les nombres de Betti des espaces de groupe

373. En 1931 dans *Sur l'Analysis situs des variétés à  $n$  dimensions*.

374. En 1934 dans *Sur la topologie de certains espaces homogènes*.

375. Ses ouvrages *Topology*, New York, American Mathematical Society (American Mathematical Society colloquium publications, vol.XII), 1930 et *Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1929, sont cités par les deux doctorants dans leur bibliographie ainsi qu'au cours de leur introduction (cf. DE RHAM 1931, p. 4 et EHRESMANN 1934a, p. 396-397).

376. Les travaux cités par les deux doctorants ne sont pas les mêmes. Ils dépendent des points de vue adoptés par chacun. Georges de Rham cite « Analysis situs combinatorio », *Revista Matemático Hispano-Americana*, (6), p.1-9, p.33-41, 1923 sur lequel il se fonde pour exposer son point de vue de l'Analysis situs combinatoire, DE RHAM 1931, p. 1. Charles Ehresmann se réfère à la théorie de Weyl de représentation des groupes et cite l'article suivant : « Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen », *Mathematische Zeitschrift*, (23), p.271-309, 1925.

377. De Rham comme Ehresmann mentionnent ainsi l'article « Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces », *Annales de Société Polonaise de Mathématiques*, (8), p.181-225, 1929. Ehresmann se réfère davantage aux travaux d'Élie Cartan que de Rham. Il cite notamment ceux qui concernent les propriétés des groupes opérant dans un ensemble et ceux qui étudient les relations entre ces propriétés et les propriétés de l'ensemble. Parmi les publications que cite Charles Ehresmann, mentionnons *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs*, Paris, Gauthier-Villars, Mémorial des sciences mathématiques, fasc. XLII, 1930 et « Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple », *Annales de l'École normale supérieure*, (44), p.345-467, 1927.

378. Cf. EHRESMANN 1934a, p. 397.

379. Où la variété est remplacée par un complexe défini arithmétiquement, d'après DE RHAM 1931, p. 1.

clos » en 1928<sup>380</sup>. C'est à l'occasion de ces démonstrations que de Rham introduit sa notion de courant, dont il affirme qu'elle a guidé ses recherches depuis 1928<sup>381</sup>. D'après de Rham, cette notion lui permet, dans une variété à  $n$  dimensions, de faire le lien entre un champ d'intégration à  $p$  dimensions et une forme différentielle extérieure de degré  $n - p$ , qui apparaissent comme deux aspects de cette même notion<sup>382</sup>.

Charles Ehresmann propose une approche davantage fondée sur la théorie des groupes. Pour qualifier le travail, Élie Cartan écrit ainsi qu'il se rattache non seulement à la topologie mais également « en un sens à la géométrie algébrique, en un autre sens à la théorie des groupes »<sup>383</sup>. Ehresmann étudie les propriétés topologiques de la classe des espaces riemanniens symétriques clos qui sont réalisés par des variétés complexes<sup>384</sup>. Dans le calcul des nombres de Betti de ces espaces, il élabore une méthode fondée sur celle d'Élie Cartan et qui consiste à décomposer certains groupes linéaires en groupes irréductibles. Il en élabore également une seconde qui utilise « les procédés habituels de la topologie »<sup>385</sup>. Il l'applique alors à tous les espaces précédents ainsi qu'à d'autres familles de variétés algébriques. D'après Élie Cartan<sup>386</sup>, cette seconde méthode et l'application qu'Ehresmann en fait constitue « la partie vraiment originale du travail », d'autant que cette méthode permet le calcul des nombres de Betti et également celui des coefficients de torsion, ce que ne permettait pas la première méthode<sup>387</sup>.

L'étude topologique de variétés et l'étude des invariants intégraux de certains espaces sont donc au centre de ces deux mémoires. Les travaux de Fréchet ne sont ici évoqués à aucun moment et l'approche des deux doctorants diffère sensiblement de celle des autres doctorants en topologie. Certains travaux d'Élie Cartan servent dans les deux mémoires de référence et de base à l'élaboration et à l'étude de nouvelles théories. Il ne s'agit pas des mêmes travaux qui sont cités dans les thèses classées en géométrie différentielle et qui ne concernaient pas le calcul des nombres de Betti de certains espaces. Il est difficile cependant de mesurer la nature exacte de l'influence

380. D'après Georges de Rham dans DE RHAM 1980, p. 25, il s'agit « de démontrer deux théorèmes qui permettent de définir les nombres de Betti à l'aide des formes différentielles ».

381. Cf. DE RHAM 1980, note 23, p.35. De Rham fournit alors la référence à l'introduction de son livre *Variétés différentiables*, Paris, Hermann, 1955. Il affirme à cette occasion que c'est l'introduction de la notion de distribution par Laurent Schwartz en 1945 qui a fourni à sa notion de courant une définition précise.

382. Cf. DE RHAM 1980, p. 25. Le rapport sur la thèse étant déclaré manquant aux Archives nationales, je ne sais pas comment Élie Cartan, rapporteur du mémoire d'après DE RHAM 1980, p. 26, rend compte de cette notion et juge de son importance et de sa portée.

383. Cf. le rapport de thèse.

384. D'après EHRESMANN 1934b, p. 396 et d'après le rapport de thèse.

385. Il s'agit d'après EHRESMANN 1934b, p. 396, d'utiliser « les déformations et les subdivisions en cellules ».

386. Cf. le rapport de thèse.

387. Signalons également qu'Ehresmann applique ces méthodes pour démontrer des résultats de géométrie énumérative de H. Schubert, cf. EHRESMANN 1934b, p. 396 et la rapport sur la thèse.

entre Élie Cartan et les doctorants. L'étude des introductions et des rapports montrent que ces derniers se réfèrent aux travaux du mathématicien ; l'essentiel des méthodes employées par Ehresmann sont ainsi fondées sur celles de Cartan. Jean Dieudonné dans la notice qu'il écrit sur Ehresmann<sup>388</sup> évoque également l'attraction qu'exerce les théories de Cartan sur le doctorant depuis ses études de licence. Cependant, rien n'est connu sur des échanges ou des relations entre Élie Cartan et les doctorants pendant l'élaboration du travail. Georges de Rham écrit dans DE RHAM 1980 qu'il a rencontré à plusieurs reprises Henri Lebesgue et que ce dernier lui a donné des conseils et des nouvelles directions de recherches quand les siennes aboutissaient dans des impasses<sup>389</sup>. Cependant, il n'évoque pas de rencontres avec Élie Cartan qui auraient influencé le cours de ses recherches. D'après DE RHAM 1980, p. 25, c'est presque un hasard s'il est « tombé » sur la note d'Élie Cartan de 1928<sup>390</sup>. Il ne rencontre Élie Cartan qu'une fois son manuscrit achevé, aux vacances de Pâques 1930 : de Rham est convoqué par le mathématicien à Versailles et il lui demande alors d'examiner son travail et d'être à la fois le rapporteur et le président du jury de sa thèse. D'après de Rham, certains théorèmes présents dans le manuscrit auraient alors provoqué des réactions immédiates de Cartan<sup>391</sup>. Ce dernier souvenir rapporté par de Rham paraît donner une indication de la proximité des thèmes de recherches du doctorant et de celui du mathématicien.

#### 4.3.4 Élie Cartan : le mathématicien influent en géométrie

L'analyse du corpus des thèses de géométrie soutenues à la Sorbonne révèle l'importance des théories d'Élie Cartan dans ce corpus. Elles sont à l'origine d'un tiers des doctorats classés en géométrie différentielle (pour 8 mémoires sur 24), en géométrie algébrique (3 sur les 9<sup>392</sup>) et également en topologie (2 sur 6) et donc de 13 thèses en tout. En comparaison, les travaux de Claude Guichard ne sont repris explicitement que dans 4 doctorats classés géométrie différentielle et ceux de Gambier dans 3. En géométrie algébrique, les travaux de mathématiciens italiens concernent 4 mémoires et, en topologie, ceux de Fréchet, 2.

De plus, les doctorants ne se réfèrent pas à un unique travail d'Élie Cartan ou à une seule de ses théories. Ils citent différents travaux à différentes périodes de l'entre-deux-guerres. Pendant les années 1920, la méthode du repère mobile et la théorie des systèmes de Pfaff en involution sont les théories de Cartan qui sont reprises dans les

388. Cf. DIEUDONNÉ et CHOQUET 1980, p. 69.

389. Cf. DE RHAM 1980, p. 23-25. adresse à Lebesgue des remerciements semblables à la fin de l'introduction de son mémoire : c'est « grâce à ses conseils et à ses critiques [qu'il a] pu s'orienter au début de [ses] recherches, et ses encouragements [l']ont fait persévérer », DE RHAM 1931, p. 3.

390. Georges de Rham qualifie alors ce moment de « chance de [sa] vie », DE RHAM 1980, p. 24.

391. Cf. DE RHAM 1980, p. 26. De Rham indique qu'Élie Cartan fait des applications de certains de ses théorèmes dès 1932.

392. En comptabilisant Féraud ici.

thèses classées en géométrie différentielle comme en géométrie algébrique. La référence à ces méthodes est essentiellement concentrée dans les doctorats de cette période. Elles continuent à être citées dans au moins une thèse des années 1930, celle de Mohsen Hachtroudi, mais ne constituent plus alors la principale méthode de référence.

Pendant les années 1930, d'autres travaux de Cartan sont repris. Au contraire des années 1920, les travaux cités dépendent des domaines dans lesquels sont classés les doctorats. La théorie des invariants intégraux de Cartan et sa méthode de calcul des nombres de Betti de certains espaces sont ainsi reprises dans les thèses de topologie de la première moitié des années 1930<sup>393</sup>. Ses travaux sur la géométrie projective complexe sont repris dans un mémoire classé en géométrie algébrique dans la seconde moitié des années 1930<sup>394</sup>. Enfin, sa théorie des espaces généralisés et sa notion de connexion sont retravaillées dans plusieurs doctorats de la fin des années 1930, après qu'un doctorat de la fin des années 1920 a abordé le sujet<sup>395</sup>.

L'influence intellectuelle d'Élie Cartan se traduit au niveau des sujets travaillés par les doctorants et des méthodes qu'ils emploient. Elle est en outre renforcée par l'omniprésence de ce dernier parmi les membres de jury des thèses de géométrie. Il occupe de façon écrasante les fonctions de rapporteur et de président pour les thèses classées en géométrie. En effet, entre 1914 et 1945, il occupe la fonction de président à 25 reprises et celle de rapporteur à au moins 20 reprises alors que 41 doctorats sont soutenus<sup>396</sup>.

La présence de Cartan parmi les membres de jurys est encore plus marquée si on divise la période en fonction de la disparition de Claude Guichard. Entre 1914 et 1923, Cartan ne préside le jury d'aucune thèse ; ce sont Gabriel Koenigs et Émile Picard qui occupent davantage cette fonction (5 et 4 fois respectivement)<sup>397</sup>. Dans le même temps, il n'est le rapporteur que de deux thèses, toutes les deux soutenues en 1923. Claude Guichard rapporte sur 7 des 8 autres thèses<sup>398</sup>. De 1924 à 1945, Cartan occupe en revanche la fonction de président pour 25 des 31 doctorats soutenus<sup>399</sup> et il est le rapporteur d'au moins 18 doctorats et également le seul mathématicien à écrire plus d'un rapport sur une thèse classée en géométrie<sup>400</sup>.

---

393. Celles de de Rham et d'Ehresmann.

394. Celui de Wachs.

395. Celui de Paul Delens.

396. En effet les rapports pour les thèses soutenues en 1930 et 1931 étant déclarés manquants aux Archives Nationales, l'identité du rapporteur n'est pas connue pour les thèses correspondantes.

397. Après 1925, ni Picard, ni Koenigs n'exercent plus cette fonction.

398. L'exception est la thèse de Besserve soutenue en 1915 dont le rapporteur est Ernest Vessiot.

399. Durant la même période, les seuls autres présidents de jury en géométrie sont Goursat (1 en 1930), Julia (1 en 1936), Borel (2 en 1924 et 1938) et Montel (3 en 1938, 1939, 1943).

400. Dans le même temps, Borel en 1924, Picard en 1925, Fréchet en 1934, Garnier en 1936, Denjoy et Montel en 1938, Bouligand en 1939, Henri Cartan et René Garnier en 1943 rapportent chacun sur un unique mémoire.

Élie Cartan occupe donc pour l'ensemble de la période les deux fonctions de président et de rapporteur de façon conséquente pour le domaine de la géométrie et surtout à partir du milieu des années 1920 et à partir de la disparition de Guichard. Il exerce ainsi un poids institutionnel fort sur la faculté des sciences de Paris, d'autant que l'omniprésence d'Élie Cartan parmi les jurys de thèses s'étend à l'ensemble des doctorats parisiens entre 1914 et 1945<sup>401</sup>.

Le corpus des thèses de géométrie permet donc d'affiner l'image d'Élie Cartan. Dans LELOUP et GISPert prévu pour 2009, Hélène Gispert et moi-même avons montré que la période de l'entre-deux-guerres voit s'affirmer la stature d'Élie Cartan comme un membre institutionnel et intellectuel du milieu mathématique académique. Cette stature se trouvait renforcée par la reconnaissance internationale du mathématicien, qu'illustrent ses participations aux Congrès internationaux des mathématiciens ou ses relations avec Albert Einstein et Hermann Weyl. De plus, Élie Cartan entretient une complicité intellectuelle avec les premiers membres du groupe Bourbaki<sup>402</sup>. Ces derniers, en retour, le distinguent parmi la population des « patrons » français de l'entre-deux-guerres. Son oeuvre est ainsi le sujet étudié au Séminaire Julia en 1936-1937 alors que ce n'est le cas de l'oeuvre d'aucun autre « patron » mathématique français de l'entre-deux-guerres. Cependant, les premiers membres de Bourbaki, à l'instar de Jean Dieudonné ou André Weil, ont décrit Élie Cartan comme un mathématicien « vingt ans en avance sur son temps et qui n'était compris par strictement personne »<sup>403</sup>.

L'analyse des thèses de géométrie permet ainsi de montrer que ses théories sont abordées par plusieurs doctorats, à plusieurs reprises et pendant tout l'entre-deux-guerres. L'influence du mathématicien dépasse le cadre de ses enseignements, qui, selon Georges Bruhat lors du jubilé de Cartan, ou Henri Poincaré dans son rapport sur le mathématicien en 1912<sup>404</sup>, rencontrent un réel succès. De plus, les exemples d'Alexandre Pantazi ou d'Otokar Boruvka indiquent qu'Élie Cartan n'est pas un mathématicien inaccessible. L'influence intellectuelle du mathématicien sur les thèmes abordés par les doctorants de géométrie n'est ainsi pas uniquement une influence de ses idées. Pour certains doctorants, il semble avoir eu un rôle directeur. Le terme de « direction » des recherches est ainsi employé à plusieurs reprises dans les mémoires dont le sujet se rapportent directement à ses théories et ses méthodes, comme ceux de Mohsen Hachtroudi ou de Robert Potier. Ce dernier est d'ailleurs plus explicite que les autres doctorants sur le rôle qu'a pu jouer Élie Cartan dans l'élaboration de son travail<sup>405</sup>.

401. Cf. LELOUP et GISPert prévu pour 2009. Il est le mathématicien qui préside le plus de jurys et qui rapporte sur le plus grand nombre de mémoires.

402. Cf. LELOUP et GISPert prévu pour 2009.

403. Cf. DUGAC 1995, p. 93. Cf. également WEIL 1991.

404. Cf. Rapport de Poincaré sur Élie Cartan, Conseil de faculté des sciences de Paris AJ/16/5123, séance du 6 juillet 1912. Pièces annexes du conseil de faculté AJ/16/5129 A. Ce rapport est également retranscrit dans le livre de Avikis et Rosenfeld, AKIVIS et ROSENFELD 1993.

405. Il écrit ainsi POTIER 1940, p. 1-2 :

On pourrait avancer une raison à la faible connaissance contemporaine des travaux du mathématicien en France. Cette raison se trouverait dans la suite de la carrière mathématique des doctorants qui élaborent leur thèse à partir de ses travaux de Cartan. Peu d'entre eux ont poursuivi dans l'enseignement supérieur français, ou ont continué à investir le milieu de la recherche en géométrie pendant l'entre-deux-guerres, ou ont eu une position suffisamment importante dans ce milieu pour que leur recherche rencontre un écho. Une telle position est la plupart du temps occupé par des étudiants issus de l'École normale supérieure pendant l'entre-deux-guerres. Or, seuls trois étudiants normaliens écrivent une thèse à partir des travaux d'Élie Cartan (Lucien Féraud en 1928, Charles Ehresmann en 1934 et Octave Galvani en 1944). Parmi eux, Octave Galvani soutient trop tard pour exercer une influence perceptible dans l'entre-deux-guerres et Lucien Féraud ne continue pas à travailler dans le domaine de la géométrie. En outre, les étudiants étrangers sont retournés dans leur pays une fois leur thèse soutenue, pour ceux dont les informations sont connues, et j'ai n'ai pu trouver de renseignements pour les autres doctorants.

## 4.4 Conclusion générale

L'analyse des rapports et des avant-propos des thèses d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie a permis de révéler des phénomènes communs à ces deux domaines.

Les premières thèses soutenues dans chacun de ces domaines correspondent ainsi à un élan de la recherche qui trouve son origine à la fin du XIX<sup>ème</sup> et au début du XX<sup>ème</sup> siècle. En arithmétique et en algèbre, il se développe autour de l'étude des formes, en géométrie autour des travaux de Darboux et de Guichard sur l'étude des surfaces et des congruences. Ce premier élan s'éteint au milieu des années 1920. La rupture est alors nette avec les doctorats qui sont ensuite soutenus au niveau des thématiques étudiées et des références citées. On observe alors un deuxième élan de la recherche.

Il débute plus tôt en géométrie et les travaux d'Élie Cartan le marquent fortement. Du milieu des années 1920 à 1945, différents travaux du mathématicien vont être étudiés par plusieurs groupes de thèses. Chaque groupe correspond à des méthodes et des théories particulières de Cartan, et à une période particulière de l'entre-deux-guerres. On distingue principalement deux Cartan : le Cartan des années 1920 avec la méthode

---

« Enfin, il nous faut signaler qu'au cours de cette recherche nous avons été conseillé et encouragé à tout instant par M. Cartan lui-même.

Ceux qui ont travaillé sous la direction de notre Maître savent combien il est impossible de payer la dette de reconnaissance contractée à son égard à l'aide d'une quelconque formule de remerciements.

C'est pourquoi nous lui demandons simplement ici de croire à la sincérité du sentiment d'affection respectueuse que nous avons pour lui. »



du repère mobile et les invariants de Pfaff et le Cartan des années 1930 avec sa théorie des espaces généralisés.

Le deuxième élan en arithmétique et en algèbre débute plus tardivement. Il émerge surtout dans les années 1930 au moment où de nouveaux sujets sont abordés par les doctorants autour de la théorie des idéaux. Le changement est radical avec les thèses précédentes. L'essentiel des méthodes sont maintenant inspirées par des travaux allemands comme ceux de Van der Waerden et Emmy Noether. Certaines thèses classées en géométrie algébrique lui font écho ou l'annoncent : celle de Marcel Légaut en 1925<sup>406</sup> et les quatre dernières thèses classées en géométrie algébrique qui sont soutenues pendant la seconde guerre mondiale<sup>407</sup>. Cet élan de recherche est porté pour le domaine de l'arithmétique et de l'algèbre comme pour celui de la géométrie algébrique par un groupe d'étudiants tous issus de l'École normale. Le groupe des thèses classées en géométrie algébrique se caractérise par l'utilisation de références nouvelles, dont certaines sont parfois empruntées à des mathématiciens allemands, mais dont l'essentiel est tiré de travaux des géomètres italiens. Les sources nouvelles que citent les doctorants (en arithmétique/algèbre et en géométrie) sont pour l'essentiel puisées dans les voyages à l'étranger réalisés par les doctorants auprès des mathématiciens allemands ou italiens<sup>408</sup>.

Les changements des références utilisées par les doctorants, l'évolution des thèmes qu'ils étudient rythment la période et révèlent ainsi plusieurs dynamiques de recherche. Ils mettent également en évidence une périodisation nette de l'entre-deux-guerres et une certaine rupture au milieu des années 1920.

---

406. À laquelle on peut faire correspondre la thèse d'André Weil.

407. Celles d'Eger, d'Orgeval, Gauthier, Lesieur.

408. dont certains sont financés par la fondation Rockefeller. Ce dernier fait confirme d'ailleurs l'origine normalienne des doctorants qui portent cet élan de la recherche. Les étudiants de l'École normale sont les principaux bénéficiaires de financements pour voyager à l'étranger.

# Chapitre 5

## Les thèses en théorie des fonctions

### Sommaire

---

5.1	Des thèses sur des fonctions particulières : l'influence de Paul Appell . . . . .	227
5.2	La théorie des fonctions de la variable réelle . . . . .	231
5.3	La théorie des fonctions de la variable complexe . . . . .	251
5.4	Doctorants et membres de jury . . . . .	338
5.5	Les dynamiques de recherches en théorie des fonctions . .	347

---

Le deuxième niveau d'analyse est maintenant appliqué au corpus des 38 thèses classées dans le domaine de la « théorie des fonctions », domaine de la section « analyse » correspondant à un deuxième niveau de mot-clé<sup>1</sup>.

Les images de l'entre-deux-guerres mathématique<sup>2</sup> décrivent ce domaine de la théorie des fonctions comme l'un des principaux domaines de la recherche mathématique en France et comme l'une des vitrines des mathématiques françaises en France et à l'étranger, alors que, dans le même temps, les sciences mathématiques sont décrites « en déclin ». Les noms de mathématiciens français qui apparaissent dans ces images comme les plus connus et reconnus en France et à l'étranger sont, pour l'essentiel, ceux d'analystes tels Émile Borel, Jacques Hadamard, Paul Montel, Maurice Fréchet<sup>3</sup>. Il s'agit de mathématiciens qui ont participé à l'« âge d'or »<sup>4</sup> de l'analyse française pendant le premier quart du XX<sup>ème</sup> siècle. Certains, comme Montel, se sont fait connaître à cette époque par leurs travaux en théorie des fonctions ; d'autres, déjà reconnus à la

---

1. Le nombre de thèses classées en théorie des fonctions représente 55% du nombre de doctorats classés en analyse (69) et 19% de celui de l'ensemble des thèses soutenues à la faculté des sciences de Paris entre 1914 et 1945 (203).

2. Ces images sont principalement constituées à partir de témoignages et de souvenirs d'acteurs de l'époque et proviennent en partie de la « mémoire collective » du groupe Bourbaki (cf. l'introduction). Elles sont également produites par la biographie d'Hadamard, MAZ'YA et SHAPOSHNIKOVA 2005, et par des discours hagiographiques prononcés lors de jubilés, etc. J'ai révélé une image produite par ces discours, biographies et autobiographies dans mon DEA, cf. LELOUP 2004.

3. Une exception est cependant Élie Cartan, reconnu notamment pour ses travaux en géométrie.

4. Selon le terme employé par Hélène Gispert dans GISPERT 1991.

fin du XIX<sup>ème</sup> siècle pour leurs résultats, tels Hadamard ou Borel, ont publié pendant cette même période des travaux présentés comme essentiels en théorie des fonctions<sup>5</sup>. Leur position dominante sur la scène des mathématiques françaises s'exerce surtout pendant la première partie de l'entre-deux-guerres. De plus, selon les souvenirs d'étudiants de cette époque tels André Weil, Laurent Schwartz<sup>6</sup> ou Jacqueline Ferrand<sup>7</sup> le domaine de la théorie des fonctions et en particulier le domaine de la théorie des fonctions de la variable complexe est, pendant l'entre-deux-guerres, l'un des domaines qui attire les jeunes étudiants et qui est sur le front avancé de la recherche mathématique en France.

Le deuxième chapitre de la présente thèse a déjà permis de réévaluer en partie ces images et il a montré que d'autres domaines étaient travaillés à côté de celui de l'analyse. L'étude quantitative de l'origine des doctorants met parallèlement en évidence une reconnaissance internationale de la recherche en théorie des fonctions en France. La part des étudiants étrangers en théorie des fonctions est ainsi de 45% alors qu'ils représentent 29% de l'ensemble des doctorants parisiens<sup>8</sup>. En revanche, la part des étudiants normaliens en théorie des fonctions est quasiment inchangée par rapport à celle de l'ensemble des doctorants (respectivement 37% et 36%). Elle n'est donc pas, à ce stade de l'analyse, révélatrice d'un intérêt particulier des normaliens pour ce domaine.

Le deuxième niveau d'analyse permet d'étudier les sujets de recherche abordés par les étudiants, de mieux saisir les références qu'ils citent et la façon dont elles sont citées, les méthodes qu'ils utilisent, les théories qu'ils appliquent. L'idée est de mettre en évidence certains élans de la recherche en théorie des fonctions, s'ils existent, de saisir les diverses influences intellectuelles qui s'exercent sur les doctorants. L'étude des références mathématiques citées par les doctorants, des théories qu'ils utilisent devraient également permettre de déterminer quel rôle jouent les analystes français et notamment ceux qui sont membres de jury des thèses. Leur fonction est-elle principalement institutionnelle ? Ont-ils une influence intellectuelle sur l'élaboration des mémoires ? Quel est le rapport entre leur propre recherche et les travaux des étudiants ? Il s'agit également de tenter de comprendre pourquoi les images de l'entre-deux-guerres reconstruites *a posteriori* à partir de souvenirs décrivent ce domaine comme le domaine à la pointe de la recherche mathématique en France.

Pour répondre plus précisément à ces objectifs, j'ai tout d'abord considéré les trois domaines inclus dans celui de la théorie des fonctions, correspondant au troisième

---

5. Je détaillerai ce dernier point notamment dans la partie relative aux fonctions de la variable complexe.

6. Dans leur biographie respective.

7. Que ce soit dans l'interview qu'elle a eu l'amabilité de m'accorder le vendredi 22 décembre 2006 ou dans les notices nécrologiques qu'elle écrit pour ses camarades de l'École Normale supérieure (par exemple COLMEZ ET AL. 1990).

8. À l'inverse, ce fait suggère que les thèses d'analyse ne participeront pas de la même façon à la dynamique en France.

niveau de mots-clés<sup>9</sup> et construits à partir de la structuration du *Jahrbuch*<sup>10</sup> : les « fonctions particulières », la « théorie générale des fonctions réelles » et la « théorie générale des fonctions de la variable complexe ».

J'étudie alors les introductions et les rapports des thèses classées dans chacun de ces trois domaines. Cette étude permet de regrouper certains doctorats et de révéler une structuration particulière de chacun d'entre eux autour de sujets, de théories et de réseaux de textes auxquels se réfèrent les doctorants. On peut remarquer, dès à présent, que le domaine de la « théorie générale des fonctions de la variable complexe » est le plus important en nombre de doctorats qui y sont classés : 25 tandis que 4 le sont en « fonctions particulières » et 9 en « théorie générale des fonctions réelles ».

## 5.1 Des thèses sur des fonctions particulières : l'influence de Paul Appell

Trois des quatre premières thèses en théorie des fonctions qui sont soutenues pendant la première guerre mondiale sont classées en « fonctions particulières » : celles de Kampé de Fériet, *Sur les fonctions hypersphériques*, 1915, de Georges Giraud, *Sur une classe de groupes discontinus de transformations birationnelles quadratiques et sur les fonctions de trois variables indépendantes restant invariables par ces transformations*, 1916, et d'Angelisco, *Sur les polynômes généralisant les polynômes de Legendre et d'Hermite et sur le calcul approché des intégrales multiples*, 1916. Durant tout l'entre-deux-guerres, un seul autre mémoire de doctorat sera classé dans ce domaine : celui de Benjamin Jekhowsky, un étudiant d'origine russe, naturalisé français, qui soutient son doctorat en tant qu'aide-astronome de l'Observatoire d'Alger, *Étude sur les transcendentes Fourier-Bessel à plusieurs variables*, 1927.

Ces quatre mémoires se distinguent par plusieurs aspects. En premier lieu, ils se distinguent par leur sujet particulier, par leur contenu mathématique, par les outils et notions qu'ils travaillent et qui ne se retrouvent dans aucune des autres thèses de théorie des fonctions durant toute la période de l'entre-deux-guerres. On retrouve en revanche certaines thématiques traitées dans des doctorats de la première partie du XX<sup>ème</sup> siècle, par exemple dans ceux de Gaston Cotty<sup>11</sup>, de L. Rémy<sup>12</sup> ou encore E.

9. Cf. Le deuxième chapitre et la partie 2.3.2 pour la construction de ces domaines.

10. Ces domaines correspondent à des rubriques du *Jahrbuch* qui restent stables pendant toute la période de 1916 à 1939, date à laquelle le répertoire est réorganisé totalement. Les rubriques que j'inclus alors dans cette sous-section sont « fonctions de la variable complexe », « dérivation et intégration des fonctions réelles », « approximation des fonctions réelles », « fonctions particulières de l'analyse réelle ».

11. *Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres*, 1912.

12. *Sur une classe de surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois*, 1908.

Traynard<sup>13</sup>. De plus, les rapporteurs de ces quatre doctorats classés en « fonctions particulières » ne sont pas les mathématiciens que l'on attend le plus pour des thèses d'analyse : Émile Picard pour la thèse de Giraud, Paul Appell pour les thèses de Kampé de Fériet et d'Angelesco et Andoyer pour le mémoire de Jekhowski<sup>14</sup>. Enfin sur les quatre doctorats, deux, Angelesco et Jekhowski, ne se voient attribués que la mention honorable et ils seront les seuls pour l'ensemble des doctorants en théorie des fonctions<sup>15</sup>.

La thèse de Georges Giraud traite bien sûr de questions que l'on retrouve dans des thèses d'algèbre et d'arithmétique de la même période, comme par exemple dans les thèses de Got, Chapelon, Julia<sup>16</sup>. Giraud s'intéresse en effet à certaines transformations ( $T$ ) qui conservent des formes quadratiques ternaires ou des formes quadratiques quaternaires. Il reprend des recherches d'Hermite sur la transformation des fonctions abéliennes, de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes et les groupes fuchsien et de Picard sur les fonctions hyperfuchsiennes et les fonctions hyperabéliennes. Son approche et ses méthodes semblent comparables à celles qu'adoptent Got, Chapelon ou Julia<sup>17</sup>. De même que Julia dans son doctorat, Giraud s'intéresse également à la recherche du polyèdre fondamental d'un groupe discontinu selon la méthode du rayonnement<sup>18</sup>. Un autre argument permet en outre de rapprocher le travail de Giraud à ceux de Got, Chapelon et Julia : la présence d'Humbert parmi les membres du jury de la thèse ainsi que la reconnaissance que lui adresse Giraud à la fin de son introduction<sup>19</sup>.

La thèse de Giraud illustre ainsi le problème de la frontière pour les mathématiques françaises entre les domaines de l'analyse et de l'arithmétique et de l'algèbre.

13. *Sur les fonctions thêta de deux variables et les surfaces hyperelliptiques*, 1907.

14. Appell comme Andoyer n'écriront d'ailleurs aucun autre rapport pour une thèse classée en théorie des fonctions.

15. La mention n'est pas connue pour les mémoires de F. Marty, normalien, en 1931 et Raphaël Salem en 1939 ; elle n'est indiquée ni sur le rapport (déclaré manquant pour Marty), ni sur le procès verbal d'examen (dont est dispensé Raphaël Salem). Mais les rapports très positifs qui sont écrits sur ces deux mémoires permettent de supposer qu'ils ont obtenu la mention très honorable.

16. Cf. la partie 4.2 du quatrième chapitre sur les thèses d'arithmétique et d'algèbre. Catherine Goldstein dans GOLDSTEIN à paraître parle d'ailleurs du travail de Giraud comme d'un travail de théorie des nombres.

17. Cf. l'avant-propos de la thèse et le rapport de Picard.

18. méthode identique à celle que Julia, inspiré par Poincaré, avait utilisé dans sa thèse pour les groupes fuchsien.

19. Cf. GIRAUD 1916, p. 8 :

« J'assure également M. Humbert de toute ma reconnaissance pour le bienveillant intérêt qu'il m'a continuellement témoigné ; l'exposition qu'il a faite en 1911-1912 de la théorie des groupes fuchsien dans son Cours du Collège de France m'a été d'une très grande utilité. »

On pourrait en outre mentionner que Picard est à la fois rapporteur et président de la thèse de Giraud comme pour Got et Chapelon, alors que par exemple, en 1914, il n'est que président de la thèse de Valiron, qui s'intéresse aux fonctions de la variable complexe (Borel en est le rapporteur). Cependant le contexte particulier de la première guerre mondiale peut également expliquer la présence de Picard à ces deux fonctions.

L'arithmétique et l'algèbre sont d'ailleurs des rubriques du chapitre « Analyse » dans l'*Index du répertoire bibliographique*, notamment dans son édition de 1916<sup>20</sup>. Émile Picard souligne l'appartenance du travail aux deux domaines<sup>21</sup> :

« De grandes difficultés ont donc été surmontées par M. Giraud dont le travail est très intéressant à la fois au point de vue *arithmétique* et au point de vue *fonctionnel*. »

Kampé de Fériet et Angelesco s'intéressent à la théorie de certaines fonctions. Ces fonctions ont leur origine dans les recherches d'Hermite sur les polynômes de plusieurs variables. Elles ont été depuis retravaillées par Paul Appell.

D'après le rapport de Paul Appell, Kampé de Fériet prolonge ainsi les travaux d'Hermite sur les polynômes de deux variables<sup>22</sup> dans une voie qu'Appell a lui-même inspirée en théorie du potentiel de l'espace à 4 dimensions<sup>23</sup> et donc dans la voie des fonctions harmoniques. Les polynômes à  $n$  variables considérés sont alors des fonctions hypersphériques<sup>24</sup>. D'après Kampé de Fériet<sup>25</sup>, l'étude qu'il mène est « entreprise sur les conseils de M. Appell, en prenant pour base son Mémoire des *Rendiconti* ». Elle est centrée sur les fonctions hypersphériques, dont il cherche à établir les propriétés les plus générales. Au cours de son travail, il obtient notamment le développement d'une fonction hypersphérique quelconque selon de nouvelles classes de polynômes et le développement d'une fonction arbitraire de  $n$  variables en série de polynômes hypersphériques particuliers, les polynômes hypersphériques zonaux<sup>26</sup>.

Même s'il ne se place pas comme Kampé de Fériet dans le cadre de la théorie du potentiel, Angelesco s'intéresse également à certaines classes de polynômes à une ou plusieurs variables qui se rattachent au développement de formes quadratiques à plusieurs variables. Il essaie d'étendre pour différentes classes de polynômes intervenant dans le développement de certaines formes quadratiques des résultats relatifs aux poly-

20. Cf. RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES 1898 and 1908 and 1916. Cf. également GOLDSTEIN et SCHAPPACHER 2007 où Catherine Goldstein et Norbert Schappacher parlent de ce point particulier.

21. Cf. le rapport de thèse.

22. polynômes qui déjà généralisaient les polynômes de Legendre et qui ont ensuite été étendus par Didon au cas  $n$  variables. Selon la définition qu'Appell et Kampé de Fériet donnent dans leur ouvrage *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite*, cf. APPELL et KAMPÉ DE FÉRIET 1926, Introduction, p.6, il s'agit des polynômes à une variable qui correspondent aux valeurs prises sur une sphère de rayon un par des polynômes homogènes de trois variables vérifiant l'équation de Laplace et qui interviennent dans l'étude du potentiel newtonien de l'espace à trois dimensions.

23. ou dans l'espace à  $n + 2$  dimensions pour les polynômes étendus de Didon.

24. c'est-à-dire la valeur prise dans l'espace à  $n + 2$  dimension sur une hypersphère de rayon 1 par certains polynômes homogènes vérifiant l'équation de Laplace, cf. APPELL et KAMPÉ DE FÉRIET 1926, Introduction, p.6 ou p.204.

25. Ce dernier n'ayant pas écrit d'introduction, cette citation provient du chapitre II de la thèse, cf. KAMPÉ DE FÉRIET 1915, p. 28.

26. Il s'agit selon la terminologie employée par Kampé de Fériet de polynômes d'« ordre » nul, cf. KAMPÉ DE FÉRIET 1915, p. 17 ou APPELL et KAMPÉ DE FÉRIET 1926, p. 213.

nômes de Legendre, aux polynômes d'Hermite, étendus ensuite par Didon<sup>27</sup>. Il cherche également à généraliser des résultats déjà établis par Appell dans le cas de 2 variables en 1890<sup>28</sup>. D'après Paul Appell, la thèse d'Angelesco n'est pas suffisamment riche en résultats nouveaux pour mériter la mention très honorable. Cependant le mathématicien reprendra certains de ses résultats dans son ouvrage de 1925, APPELL 1925, p. 68 où il cite explicitement la thèse d'Angelesco. De plus, dans l'ouvrage qu'il écrit en 1926 Appell avec la collaboration de Kampé de Fériet, Appell évoque à nouveau le travail d'Angelesco et en reprend une partie dans une note de l'ouvrage, la partie relative à l'application de certaines classes de polynômes au calcul approché d'intégrales multiples<sup>29</sup>.

Enfin, la thèse de Jekhowski, soutenue 9 années plus tard, en 1927, se rapporte également à l'étude de fonctions particulières, les transcendentes de Fourier-Bessel à plusieurs variables, en prenant comme point de départ la formule intégrale<sup>30</sup> indiquée par Appell dans APPELL 1915, p. 422. Jekhowsky étudie dans le cas de  $n$  variables certaines propriétés générales, certaines équations différentielles vérifiées par ces fonctions particulières ainsi que le développement en série de certaines expressions en fonction des transcendentes de Fourier-Bessel. Il explicite et détaille ces résultats dans le cas de deux variables.

On peut cependant s'interroger sur la portée de ce travail dans le cadre de la recherche mathématique universitaire française de l'entre-deux-guerres. Non seulement cette thèse n'obtient que la mention honorable, mais elle se distingue également par les commentaires que porte le rapporteur sur ce travail. Paul Appell souligne en effet surtout les conditions difficiles auxquelles le candidat<sup>31</sup> a été confronté<sup>32</sup>.

---

27. Cf. ANGELESCO 1916, p. 2.

28. Selon Angelesco, cf. ANGELESCO 1916, p. 2, dans le mémoire d'Appell : *Sur une classe de polynômes à deux variables et sur le calcul approché des intégrales doubles*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 1890.

29. Cf. APPELL et KAMPÉ DE FÉRIET 1926, Introduction p.VII. Il l'évoque en ces termes :

« une application des polynômes d'Hermite aux quadratures mécaniques des fonctions de plusieurs variables, question étudiée par M. Angelescu dans sa Thèse (1916) (Note V). »

30.  $J_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(ku - x_1 \sin u - x_2 \sin 2u - \dots - x_n \sin nu) du$ .

31. par ailleurs déjà docteur de l'Université de Paris, comme Appell l'évoque dès l'entame du rapport. En effet, B. Jekhowsky a obtenu en 1916 le titre de « docteur de l'université » (et non pas de docteur-ès-sciences mathématiques) pour son mémoire intitulé *Applications d'une méthode nouvelle pour le calcul des perturbations d'une petite planète ou d'une comète et pour la détermination de l'orbite d'une comète*. Le jury était alors composé de Paul Appell comme président, Andoyer et Cartan comme examinateurs. On peut remarquer que le titre des propositions données par la faculté était déjà « Fonctions de Bessel », sujet sur lequel il soutient son doctorat d'Etat en 1927.

32. Paul Appell conclut ainsi son rapport par ses mots :

« L'effort de M. Jekhowsky est louable. Sans doute, son exposition est souvent imparfaite et manque de la précision que l'on est en droit de réclamer d'un candidat aux fonctions de l'enseignement supérieur ; mais il a fait preuve d'habileté dans le maniement de formules délicates ; les résultats qu'il a obtenus ne sont pas sans intérêt ; et, par-dessus tout, son

Cet ensemble de quatre mémoires s'attache donc à l'étude de fonctions particulières. Si la thèse de Giraud semble davantage se rapprocher des doctorats classés précédemment dans le domaine de l'arithmétique et de l'algèbre, l'ensemble formé par les mémoires de Kampé de Fériet, Angelesco et Jekhowski ont en commun les liens importants de leurs recherches aux travaux d'Appell. Elles témoignent de l'influence de ce dernier sur leurs travaux. Réciproquement, Appell reprend en effet certains de leurs résultats dans quelques-unes de ses publications et dans le livre qu'il publie avec Kampé de Fériet en 1926, APPELL et KAMPÉ DE FÉRIET 1926<sup>33</sup>. Ils y font le point sur les fonctions hypergéométriques et hypersphériques et sur les polynômes d'Hermite. Ils ne semblent pas indiquer d'avancées majeures par rapport aux thèses d'Angelesco et de Kampé de Fériet, mises à part certaines généralisations des fonctions hypersphériques établies par Pierre Humbert au début des années 1920 et une « étude approfondie des polynômes d'Hermite à une variable [...] faite par M. Niels Nielsen (1918) »<sup>34</sup>. Les méthodes employées pour ces théories ne paraissent pas avoir été reprises par de nombreux mathématiciens entre 1916 et 1926. Elles ne sont d'ailleurs pas utilisées parmi d'autres thèses en théorie des fonctions ni dans cet intervalle de temps, ni pendant le reste de l'entre-deux-guerres. Les thèses de Kampé de Fériet, Angelesco apparaissent ainsi comme la fin d'un élan de la recherche sur les fonctions particulières<sup>35</sup>, initié par Hermite, prolongé par Appell et qui se développe essentiellement pendant le premier quart du XX<sup>ème</sup> siècle. La thèse de Jekhowski en est le dernier écho pendant l'entre-deux-guerres.

## 5.2 La théorie des fonctions de la variable réelle

Neuf thèses sont classées pendant l'entre-deux-guerres en théorie des fonctions de la variable réelle. Parmi ces neuf doctorants, deux seulement sont normaliens : André Marchaud et Jean Favard. André Marchaud est cependant un étudiant particulier : entré à l'École Normale Supérieure en 1909, il ne soutient une thèse qu'en 1927 à l'âge

---

mérite est très grand d'avoir pu surmonter, par un travail opiniâtre, les obstacles que les circonstances particulièrement difficiles et mêmes cruelles lui ont opposées depuis 1914. »

33. La thèse de Kampé de Fériet est d'ailleurs presque reprise intégralement dans la deuxième partie de cet ouvrage.

34. Cf. APPELL et KAMPÉ DE FÉRIET 1926, Introduction p.VII. On peut d'ailleurs s'interroger sur l'importance de ces travaux sur la recherche mathématique française ou internationale à la lecture de la conclusion de l'introduction de cet ouvrage, en 1926 :

« Nous pardonnera-t-on enfin de remarquer que, dans cet exposé succinct, à l'origine des théories qui constituent l'objet de cet Ouvrage, nous n'avons guère rencontré sous notre plume que des noms de mathématiciens français ? »

P. Appell et J. Kampé de Fériet

35. Ceci ne préjuge pas de développements ultérieurs de ces travaux.



de 40 ans. Entre les deux dates, il a été fait prisonnier pendant la guerre et, après 1918, il a notamment occupé des fonctions au ministère de l'armement et au ministère de la reconstruction industrielle. Six des sept autres doctorants sont d'origine étrangère. Vasilescu, Froda et Popoviciu sont roumains<sup>36</sup>, Azyk Gorny est polonais, Kogbeliantz est russe<sup>37</sup>, Prasad est indien. Même si Popoviciu n'est pas normalien, il semble qu'il a suivi des cours à l'École normale supérieure<sup>38</sup>. Le dernier, Raphaël Salem, a une formation d'ingénieur des Arts et Manufactures de l'École centrale. Pendant toute la période précédant sa soutenance, de 1921 à 1928, il travaille en outre à la direction de la Banque de Paris et des Pays-Bas<sup>39</sup>. Le nombre important d'étudiants étrangers parmi les doctorants en théorie des fonctions de la variable réelle (6 sur 9) permet de supposer que, de l'étranger (et en Roumanie particulièrement), ce domaine est encore vu pendant l'entre-deux-guerres comme un domaine d'excellence de la recherche mathématique française.

Cependant, le nombre de doctorats classés dans ce domaine est faible en comparaison du nombre de doctorats classés en théorie des fonctions de la variable complexe (25). L'importance moindre de cette théorie parmi les sujets de thèses, et notamment parmi ceux choisis par les étudiants de l'École normale supérieure, se retrouve dans l'article qu'a écrit Paul Lévy à l'occasion du troisième centenaire de l'Académie des sciences, en 1966. Dans la partie qu'il consacre aux « Fonctions d'une variable réelle, intégration, dérivation et analyse harmonique », LÉVY 1967, p. 163-172, il n'évoque pas ou peu d'évolutions de cette théorie dans la période de l'entre-deux-guerres.

En effet, il explique tout d'abord comment la théorie des ensembles de Cantor a eu des répercussions très importantes sur la théorie des fonctions. Elle est reprise par Baire à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle et ce dernier l'applique à la théorie des fonctions de la variable réelle pour élaborer sa théorie des classes de fonctions. Cette dernière théorie a alors une influence forte sur l'analyse française et elle est retravaillée ensuite par Borel et par Lebesgue<sup>40</sup>. Ces deux mathématiciens élaborent la théorie de la mesure qui joue un rôle central en analyse en France au tournant du XX<sup>ème</sup> siècle. Selon Paul Lévy, elle a eu une influence profonde sur la théorie des fonctions et de l'intégration. Elle conduit à la définition de l'intégrale de Stieljes et de l'intégrale de Lebesgue, définitions qui datent de la fin du XIX<sup>ème</sup> et du début du XX<sup>ème</sup> siècle. La théorie de Lebesgue, prolongeant celle de Riemann, est elle-même étendue par les travaux de Denjoy sur la totalisation,

---

36. Froda et Popoviciu ne resteront en France que le temps de leur thèse. Ils auront une carrière scientifique en Roumanie. Vasilescu, quant à lui, restera dans l'enseignement supérieur français. Pour davantage de détails, je renvoie aux différents fichiers sur les doctorants présentés en annexe.

37. Il se présente sur sa thèse comme « Privatdozent de l'Université de Moscou.

38. Cette information provient du site internet <http://www.ictp.acad.ro/tpbiog.htm>. Je n'ai cependant pas pu en trouver la confirmation dans les archives de l'École Normale Supérieure (Cartons 61 AJ et plus particulièrement le carton 61 AJ 193 sur les étudiants étrangers de l'ENS).

39. Cf. SALEM 1967.

40. D'après Paul Lévy et également Alain Michel dans MICHEL 1992, p. 74.

qui pour l'essentiel sont publiés pendant le premier quart du XX<sup>ème</sup> siècle et au début des années 1920<sup>41</sup>. Le tournant entre le XIX<sup>ème</sup> et le XX<sup>ème</sup> siècle apparaît donc comme une période « d'éclosion de la théorie des variables réelles »<sup>42</sup>.

Pour les avancées de la théorie des fonctions de la variable réelle pendant l'entre-deux-guerres, Paul Lévy parle des prolongements de l'intégrale de Stieltjes réalisés par Laurence Chisholm (à la fin des années 1920) et par lui-même dans les années 1940. Ce sont les deux seuls résultats qu'il mentionne en plus des travaux de Denjoy sur la totalisation.

Parallèlement, dans son article « Intégration et Mesure 1900-1950 », PIER 1994b, Jean-Paul Pier retrace l'histoire de ces deux notions. Il résume les contributions des mathématiciens à la définition de nouvelles intégrales et aux démonstrations des liens entre les unes et les autres. Parmi les auteurs publiant sur le sujet dans l'entre-deux-guerres, Jean-Paul Pier cite Caratheodory, de la Vallée Poussin, Hahn, Bauer, Lusin, Sierpiński, Alexandrov, Tonelli, Riesz, etc. et ne mentionne presque aucun mathématicien français. Il ne signale que les travaux de Fréchet de 1915, sur la théorie de l'intégration pour une mesure abstraite non nécessairement définie sur des ensembles mesurables au sens de Lebesgue ainsi que ceux de Denjoy de la fin des années 1920 sur la dérivation et son calcul inverse<sup>43</sup>. Selon Paul Lévy, après les travaux de Denjoy, l'étape suivante dans la généralisation de la dérivation est franchie par la théorie des distributions de Sobolev et de Laurent Schwartz, thème davantage développé au lendemain du second conflit mondial mais qui est travaillé dès les années 1940.

Enfin Paul Lévy évoque une autre direction de recherche en théorie des fonctions réelles : l'analyse harmonique et les séries trigonométriques. Ces dernières sont présentées comme le sujet de recherche le plus ancien, davantage travaillé en France dans la deuxième moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle et dont la « période faste » selon Jean-Pierre Kahane date des années 1872-1873<sup>44</sup>. Paul Lévy en parle lorsqu'il aborde les séries de Fourier et la représentation d'une fonction réelle en séries de fonctions. Il cite les travaux de Denjoy et de Lebesgue du début du XX<sup>ème</sup> siècle<sup>45</sup> ainsi que ceux de Féjer et de Fatou.

---

41. Il y introduit une nouvelle façon d'intégrer. La première version de ses recherches sur la totalisation date de 1912, la deuxième de 1921 où il présente la totalisation complète qui permet l'intégration des dérivées secondes symétriques, cf. KAHANE 1998, p. 77. Je ne cherche pas ici à faire un bilan historiographique sur l'intégrale de Lebesgue ou sur la théorie de l'intégration. D'autres ouvrages sont déjà écrits à ce sujet. Parmi eux figurent KAHANE 2004, LEBESGUE 2004, HAWKINS 2002, MICHEL 1992, BURK 1998, et également un article écrit dès 1949 par Frédéric Riesz, « l'évolution de la notion d'intégrale depuis Lebesgue », RIESZ 1949.

42. Cf. Alain Michel, MICHEL 1992, p. 74.

43. Cf. PIER 1994b, p. 540-541.

44. Cf. KAHANE 1991, p. 281. Dans l'ouvrage KAHANE 1998, p.149, Kahane va même jusque'à décrire les séries trigonométriques comme un « sujet peu recommandable » en 1900, qui « éveille la défiance », un sujet « stagnant et passé de mode ». Certains résultats sont intéressants selon Kahane mais ils n'attirent pas l'attention, cf. KAHANE 1998, p. 151. Il faut cependant signaler que dans ses articles, Jean-Pierre Kahane arrête son étude vers les années 1910.

45. Cf. LÉVY 1967, p. 169.

Féjer introduit les procédés de sommation dans la théorie des séries de Fourier. L'intégrale de Lebesgue y joue un rôle particulier, notamment dans les calculs des coefficients. Denjoy présente une théorie de la totalisation qui permet de calculer les coefficients d'une série trigonométrique partout où elle est donnée. En revanche, Lévy n'évoque pas de travaux français sur la théorie des séries de Fourier pendant l'entre-deux-guerres. En conclusion de son article, Jean-Pierre Kahane affirme que les travaux de Lebesgue et Denjoy ne sont pas travaillés en France avant la deuxième moitié du XX<sup>ème</sup> siècle<sup>46</sup>.

D'après ce bref bilan historiographique, l'apogée des recherches françaises dans le domaine des fonctions de la variable réelle date de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle et du début du XX<sup>ème</sup>.

L'analyse au deuxième niveau des neuf doctorats classés en théorie des fonctions de la variable réelle permet cependant de mettre en évidence certains sujets qui sont abordés par les doctorants de l'entre-deux-guerres. Ces neuf doctorats peuvent ainsi être divisés en plusieurs groupes.

### 5.2.1 Étude des propriétés différentielles de fonctions : la référence à Paul Montel

L'étude des références citées par les doctorants permet tout d'abord de distinguer deux thèses qui se fondent sur des travaux de Paul Montel, celle d'André Marchaud, *Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles*, 1927, et celle de Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, 1933. Ces deux mémoires ne font pas que citer des travaux d'un même mathématicien, ils portent également sur des thèmes communs. Marchaud et Popoviciu s'intéressent en effet aux propriétés différentielles et aux notions de continuité et de dérivabilité pour une classe de fonctions.

D'après Paul Montel<sup>47</sup> et André Marchaud<sup>48</sup>, l'objet principal de la thèse de Marchaud est d'étudier « des relations entre les propriétés différentielles des fonctions de variables réelles et celles de leurs différences, considérées comme fonctions des accroissements »<sup>49</sup>. André Marchaud considère comme dérivée des fonctions les dérivées généralisées de Riemann-Liouville<sup>50</sup>. D'après Paul Montel, les « principaux résultats

46. Kahane affirme alors, KAHANE 1991, p. 287, que « leur influence s'exerce en France à travers les travaux hongrois, russes et anglais » et que « la théorie des séries trigonométriques [...] est presque ignorée en France. »

47. Dans le rapport de thèse.

48. Dans l'introduction de sa thèse.

49. Cf. MARCHAUD 1927, p. 1.

50. Il donne ainsi dans le premier chapitre de son travail les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de dérivées continues jusqu'à un ordre  $\alpha$ , pour  $\alpha$  un réel quelconque. Ces conditions nécessaires et suffisantes font intervenir une certaine combinaison linéaire de fonctions déduites de  $f$ , qui ne dépend pas alors des différences de la fonction, cf. MARCHAUD 1927, p. 2.

obtenus » permettent de faire le lien entre l'existence de la dérivée d'ordre  $\alpha$  de la fonction en  $x$  et la convergence uniforme de l'intégrale  $\int_0^\infty t^{-\alpha-1}g(x,t)dt$  où  $g(x,t)$  est une différence d'ordre  $n$  de la fonction  $f$ <sup>51</sup>. Dans son mémoire, André Marchaud étend également ses résultats aux fonctions de deux variables. Il y utilise la notion de différence mêlée pour la fonction dans un carré. Il établit alors un résultat donnant les conditions nécessaires et suffisantes à l'existence de dérivées continues suivant les deux variables pour des ordres quelconques. Ces conditions sont liées à la convergence d'une certaine intégrale dépendant des différences mêlées.

Que ce soit pour les fonctions d'une variable ou pour les fonctions de deux variables, les polynômes<sup>52</sup> jouent un rôle central dans ses recherches<sup>53</sup>. Une partie du travail de Marchaud à ce sujet se fonde sur l'article de Paul Montel, « Sur les polynômes d'approximation », MONTEL 1918. André Marchaud s'y réfère à plusieurs reprises dans le cadre de son avant-propos et dans le mémoire lui-même. C'est la seule référence du mathématicien qu'il cite, mais elle intervient fréquemment. Il prolonge certains résultats énoncés par Montel. Son théorème reliant l'existence de dérivées à la convergence d'intégrales faisant intervenir des différences de la fonction d'une variable vient ainsi compléter des propositions que Paul Montel a déduites dans MONTEL 1918 des propriétés de l'approximation d'une fonction bornée par des polynômes<sup>54</sup>.

Dans le commentaire que Marchaud écrit en 1947 sur cet article de Montel pour les *Selecta* du mathématicien<sup>55</sup>, il établit explicitement le lien entre les travaux du mathématicien et les recherches qu'il a présentées dans son doctorat<sup>56</sup>. Il décrit comment ses travaux ont étendu ceux de Montel<sup>57</sup> :

« Indépendamment de leur utilité pratique, les méthodes d'approximation ont une valeur théorique d'autant plus grande qu'elles serrent de plus près leur objet. Maniées avec habileté, elles conduisent souvent – par une voie détournée dans doute – à la découverte de propriétés nouvelles. C'est ce qui arrive dans le Mémoire reproduit plus haut, consacré par M. P. Montel à l'approximation des fonctions de variables réelles par des polynômes. M. P. Montel a perfectionné les méthodes de Serge Bernstein et de Dun-

---

51. Cf. le rapport sur la thèse de Marchaud et cf. MARCHAUD 1927, p. 2. André Marchaud ne précise explicitement à aucun moment quelle définition de l'intégrale il utilise. Comme la première intégrale qu'il mentionne est celle qui donne la définition de la dérivée généralisée de Riemann-Liouville, il semble que ce soit l'intégrale de Riemann qui est utilisée par le doctorant.

52. ou les pseudo-polynômes dans le cas de deux variables.

53. En effet dans le cas d'une variable les polynômes sont les seules fonctions qui peuvent avoir des différences identiquement nulles.

54. Cf. MARCHAUD 1927, p. 2.

55. Cf. MONTEL 1947b, p. 198-200.

56. Et qu'il a également publié dans le *Journal des mathématiques pures et appliquées* : Marchaud, A., 1927, « Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (9) 6, 337-425.

57. Cf. MONTEL 1947b, p. 198.

ham Jackson et apporté plus de précision dans les résultats en introduisant la dérivée généralisée de Riemann-Liouville. Les relations obtenues entre l'ordre infinitésimal des différences, considérées comme fonction des accroissements, et l'existence des dérivées doivent évidemment pouvoir s'établir directement. Le problème a été complètement résolu pour les fonctions bornées par A. Marchaud (*Journ. Math.*, 6 (1927)), qui a considéré également, dans le cas de plusieurs variables, les différences mêlées ; ses conclusions valent dans tout le domaine fermé, intervalle ou rectangle de côtés parallèles aux axes, où les hypothèses sont satisfaites. M. P. Montel pouvait conclure seulement pour l'intérieur parce que la dérivée d'ordre  $\alpha$  d'un polynôme de degré  $n$  de module moindre que  $M$  sur un intervalle fermé ne peut être bornée par une expression de la forme  $k.Mn^\alpha$  que dans un intervalle intérieur. »

On remarque donc ici le lien intellectuel qui existe entre les recherches entreprises par le doctorant et par Montel. Ce dernier mentionne en outre la thèse de Marchaud dans sa *Notice sur les Travaux scientifiques*, MONTEL 1933b, p. 31<sup>58</sup>. Certains qualifient d'ailleurs André Marchaud d'« élève de Montel »<sup>59</sup>. Les remerciements à la fin de l'introduction du mémoire n'apportent cependant pas de confirmation<sup>60</sup>. On peut se demander si la qualification d'« élève de Montel » ne s'applique pas surtout pour les travaux suivants de Marchaud en géométrie finie où ce dernier étend les recherches de Juel sur les conseils de Picard<sup>61</sup>.

En 1933, Tibère Popoviciu, dans sa thèse, va suivre un principe de raisonnement proche de celui d'André Marchaud. Il utilise également des résultats obtenus sur les polynômes pour obtenir des résultats sur des fonctions plus générales à une ou deux variables<sup>62</sup>. Tibère Popoviciu ne considère cependant pas les mêmes différences que Marchaud. Il introduit et considère pour les fonctions d'une variable les « différences

58. Il signale ainsi que ce doctorat a été engendré par ses propres travaux sur les polynômes d'approximation.

59. C'est en tout cas ce qu'écrit le fils d'André Marchaud, dans une correspondance à Jean-Pierre Aubin, datée du 11 avril 2006 : « Je pense que sur le plan mathématique, mon père a été, sinon l'élève, du moins un très proche disciple de Paul Montel pour lequel il avait une grande admiration. »

60. Leur formulation reste très formelle, cf. MARCHAUD 1927, p. 4.

61. En effet, dans CARTAN 1976, p. 34, Henri Cartan écrit que Montel est « en partie responsable des beaux résultats obtenus par Marchaud dans ce domaine. » Dans la notice nécrologique pour l'Association amicale de secours des anciens élèves de l'Ecole Normale supérieure, DUCASSE 1974, André Ducasse ne mentionne cependant pas de relations particulières entre les deux mathématiciens.

62. C'est d'ailleurs une volonté revendiquée par le doctorant puisqu'il commence son introduction par ces mots, cf. POPOVICIU 1933, p. 1 :

« Dans la théorie des fonctions on cherche à approfondir l'étude des fonctions très générales qui se rapprochent, d'une certaine manière, de fonctions connues. Les fonctions les plus simples sont les polynomes, il est donc tout naturel d'étudier les fonctions auxquelles certaines propriétés des polynomes s'appliquent. »

divisées d'ordre  $n$  » de la fonction  $f(x)$ , notée  $\Delta_n$  ainsi que la «  $n$ -ième variation totale de la fonction », notée  $V_n$ <sup>63</sup>. Il étudie les propriétés de ces nombres pour la fonction  $f$ . Il regarde également les fonctions dont la variation totale d'ordre  $n$  est bornée.

Dans un deuxième temps, il définit les classes des fonctions d'ordre  $n$  de la variable réelle et notamment la classe des fonctions convexes d'ordre  $n$  à partir du signe des différences divisées d'ordre  $n + 1$  sur tous les groupes de  $n + 2$  points de l'ensemble de définition<sup>64</sup>. Il étudie ensuite certaines propriétés de ces classes de fonctions. Il relie les dérivées d'ordre  $n$  d'une fonction d'une variable réelle en  $x$  à l'existence de la limite de la différence divisée d'ordre  $n$  de la fonction lorsque les points tendent d'une manière quelconque vers  $x$ <sup>65</sup>. Il retrouve ainsi non seulement certains résultats établis par Stieljès pour l'existence de la dérivée  $n$ -ième, mais aussi ceux établis par Paul Montel dans MONTEL 1918<sup>66</sup> pour l'existence de dérivée d'ordre  $\alpha$ . Popoviciu mentionne à cette occasion la possibilité de retrouver les critères donnés par Marchaud dans son doctorat et il renvoie au mémoire de celui-ci sans développer davantage<sup>67</sup>.

Dans la deuxième partie de son mémoire, tout comme Marchaud, Tibère Popoviciu essaie d'étendre les résultats obtenus pour les fonctions d'une variable réelle aux fonctions de deux variables réelles. Il généralise la notion de différence divisée d'ordre  $(m, n)$  de  $f(x, y)$ . Il établit une analogie avec les résultats obtenus pour les fonctions d'une variable. Il en déduit ainsi des propriétés de continuité et de dérivabilité des fonctions d'ordre  $(m, n)$ . Il retrouve alors certains résultats de Paul Montel et d'André Marchaud. Il utilise d'ailleurs comme les deux mathématiciens la notion de pseudo-polynômes pour établir des propriétés différentielles des fonctions de plusieurs variables.

Popoviciu étend également la notion de convexité d'ordre quelconque pour les fonctions de deux variables indépendantes et généralise les « fonctions *doublement convexes* de deux variables introduites par Paul Montel » dans « Sur les fonctions convexes et les fonctions sous-harmoniques », *Journal de Mathématiques*, (9) 7 (1928)

---

63. Pour une définition précise de  $\Delta_n$  et de  $V_n$ , cf. POPOVICIU 1933, p. 1 et p.4. À cette occasion, Popoviciu précise qu'il utilise les notations et les notions déjà introduites par N.E. Nörlund dans *Leçons sur les séries d'interpolation*, 1926, Paris, Gauthier-Villars. Paul Montel donne une définition de ces notions dans le rapport de thèse :

- la *différence divisée d'ordre  $n$*  est le quotient la différence  $n^{\text{ème}}$  de la fonction, prise pour  $n + 1$  valeurs de la variable, par la différence  $n^{\text{ème}}$  de  $x^n$ , prise pour les mêmes valeurs.
- la *variation totale d'ordre  $n$*  est la variation totale première des différences divisées d'ordre  $n - 1$ .

64. Cf. POPOVICIU 1933, p. 18.

65. Cf. POPOVICIU 1933, p. 31.

66. Cf. POPOVICIU 1933, p. 39.

67. Cf. POPOVICIU 1933, p. 39 :

« Il est possible par diverses transformations d'en déduire les critères donnés par M. Marchaud. Nous n'insistons pas sur cette question qui nous éloignerait trop de notre sujet et nous renverrons au mémoire de M. A. Marchaud. »

29-60, et « Sur les fonctions doublement convexes et les fonctions doublement sous-harmoniques », *Praktika de l'Académie d'Athènes* 6 (1931) 374-385<sup>68</sup>.

Une grande partie des recherches de Popoviciu se fonde donc sur les travaux de Paul Montel. Dans son mémoire, il généralise certains résultats de ce mathématicien. Les travaux de Paul Montel sont les seules références mathématiques citées par Popoviciu dans l'introduction de son mémoire<sup>69</sup>.

En outre, dans sa *Notice sur les Travaux scientifiques*, MONTEL 1933b, p. 31, Montel mentionne les recherches du doctorant sur les fonctions convexes d'ordre général. Dans le dossier biographique « Paul Montel », consultable aux archives de l'Académie des sciences, figure également une lettre de condoléances envoyée par Octav Onicescu, membre de l'Académie Roumaine<sup>70</sup> à la mort de Montel. Onicescu évoque Tibère Popoviciu parmi les mathématiciens roumains que Montel connaissait, et il précise d'ailleurs qu'il était « son élève favori »<sup>71</sup>. Il existe ainsi un lien intellectuel fort entre Popoviciu et Montel.

Les deux mémoires de Marchaud et de Popoviciu, respectivement de 1927 et de 1933, se réfèrent principalement aux travaux de Montel. L'article sur les polynômes d'approximation, MONTEL 1918, est repris et retravaillé dans les deux doctorats<sup>72</sup>. Parmi les sept autres doctorats, classés dans ce domaine, l'influence de Montel n'apparaît cependant pas aussi clairement. Le mathématicien est le rapporteur de plusieurs d'entre eux. Cependant, aucun de ces doctorants ne fonde ses recherches sur celles du mathématicien. D'ailleurs, aucun d'entre eux n'est mentionné par Paul Montel dans ses *Notices sur Travaux*.

### 5.2.2 Classification de familles de fonctions

L'étude des références citées dans les doctorats permet ensuite de distinguer deux thèses qui citent certains travaux d'Henri Lebesgue et René Baire : celles de deux étudiants roumains, Florin Vasilescu et Alexandre Froda. Le rapprochement entre ces deux mémoires est également thématique. Les deux doctorants s'intéressent à la classification de fonctions selon des critères plus ou moins différents. Le point de vue qu'ils adoptent se rapproche de thématiques de l'analyse fonctionnelle et de la théorie des

68. Il l'écrit d'ailleurs explicitement dans l'introduction de son mémoire, cf. POPOVICIU 1933, p. 2.

69. Popoviciu lui adresse également un hommage appuyé en conclusion de son avant-propos, POPOVICIU 1933, p. 2. Les remerciements y sont moins formels que dans les autres doctorats.

70. Lettre datée du 10 février 1975

71. Popoviciu restera d'ailleurs en contact avec Paul Montel pendant le reste de l'entre-deux-guerres. Ainsi, lors de la cérémonie de remise de l'épée d'Académicien français à Paul Montel en 1938 à Bucarest, Georges Bratu signale dans son discours que Tibère Popoviciu a rédigé en 1937 les leçons de Montel, « Sur les fonctions presque-périodiques » qui ont paru en roumain dans le premier volume des « Monographies Mathématiques » éditées à Cluj, cf. MONTEL 1938, p. 14.

72. Les articles de Montel sur les fonctions convexes que cite Popoviciu datent de 1928 et de 1931 : ils ne sont donc pas encore publiés au moment où Marchaud soutient son doctorat.

ensembles de fonctions, telles qu'elles ont été travaillées par Baire et Lebesgue au début du XX<sup>ème</sup> siècle.

Dans sa thèse<sup>73</sup>, Florin Vasilescu s'intéresse plus particulièrement aux fonctions multiformes<sup>74</sup>. Selon le doctorant et selon Paul Montel, rapporteur de la thèse, ce sujet n'a pas encore fait l'objet d'une étude systématique et directe. Le mémoire est ici le lieu d'exposition d'une nouvelle théorie.

Toute une partie du manuscrit est ainsi consacrée à l'extension aux fonctions multiformes des notions les plus simples relatives aux fonctions ordinaires<sup>75</sup> ainsi qu'à la généralisation des considérations sur les fonctions uniformes qui ne font intervenir que l'idée de limites. Vasilescu établit et démontre notamment des théorèmes établissant une classification des fonctions multiformes analogue à celle de Baire pour les fonctions uniformes. Il définit ainsi les « fonctions multiformes représentables analytiquement »<sup>76</sup>. Dans ses démonstrations, le doctorant revendique l'influence des méthodes employées au début du XX<sup>ème</sup> siècle par Lebesgue pour démontrer des propositions de Baire<sup>77</sup>. D'ailleurs Lebesgue est le mathématicien auquel se réfère le plus Vasilescu et c'est le seul mathématicien français qu'il cite explicitement. Il en revendique l'influence à plusieurs reprises au cours de son manuscrit<sup>78</sup>. Et c'est l'un des seuls doctorants en théorie des fonctions à la revendiquer explicitement<sup>79</sup>. Soulignons que ce ne sont pas les travaux de Lebesgue en théorie de l'intégration qui sont cités par Vasilescu, mais ses recherches sur la classification des fonctions de la variable réelle.

Vasilescu présente donc une « étude préparatoire » sur la théorie des fonctions multiformes, pour reprendre ses propres termes<sup>80</sup>. Cette description est d'ailleurs confirmée par Montel en conclusion du rapport. Il y affirme que l'étude des fonctions multiformes « devra être poursuivie pour permettre [de les] utiliser vraiment ». C'est donc un travail qui propose une nouvelle théorie en en présentant les bases. Si ce sujet ne fait l'objet d'aucun autre travail de thèse pendant l'entre-deux-guerres, certaines des notions,

73. *Essai sur les fonctions multiformes de variables réelles*, 1925.

74. Vasilescu désigne par *fonctions multiformes* une correspondance entre un nombre fini de variables et plusieurs « nombres valeurs de la fonction », cf. VASILESCU 1925, p. 2.

75. telles que la continuité, la construction et la représentation des fonctions uniformes.

76. Cf. VASILESCU 1925, p. 4 et chapitre 5.

77. dans *Sur les fonctions représentables analytiquement*, 1905, Journal de Mathématiques. Vasilescu y fait référence à plusieurs reprises et notamment au début de son chapitre qui porte sur les classifications, VASILESCU 1925, p. 59, note 1. Il écrit notamment : « la méthode que nous emploierons dans ce Chapitre pour arriver au théorème de Baire est analogue à celle que M. Lebesgue a utilisé pour les fonctions uniformes ».

78. Il le remercie également en toute fin de son avant-propos, cf. VASILESCU 1925, p. 6.

La charge occupée en 1925 par Lebesgue au Collège de France l'a sans doute empêché de faire partie du jury, puisque ce n'était pas un usage habituel. Les relations d'amitié et les liens scientifiques entre Montel et Lebesgue pourraient expliquer la fonction de rapporteur qu'exerce Montel.

79. Quelques rares autres doctorants évoquent également le rôle du mathématicien dans l'élaboration de leur recherche. Citons parmi eux, Georges de Rham pour sa recherche en géométrie, en Analysis situs plus précisément.

80. VASILESCU 1925, p. 3.



certaines des résultats établis par Vasilescu vont être réutilisés dans le cadre d'autres thèses ou d'autres publications mathématiques. Alexandre Froda réutilise en 1929 certains résultats relatifs à des propriétés de discontinuité de certaines fonctions multiformes, FRODA 1929, p. 37. Georges Bouligand reprend également certaines notions introduites par Vasilescu telles que l'*écart entre deux ensembles*, VASILESCU 1925, p. 7-12. Il présente cette notion dans BOULIGAND 1931 et la décrit comme une « nouvelle conception de la notion d'ensemble limite ». Georges Durand, un des étudiants de Bouligand, reprendra également cette notion dans sa classification des surfaces convexes, DURAND 1931. La thèse de Vasilescu apparaît alors comme le point de départ d'un nouveau sujet de recherche dont on suit le développement dans d'autres doctorats et qui dépasse également le cadre des thèses.

Dans sa thèse<sup>81</sup>, Alexandre Froda ne cherche pas à « distinguer les fonctions en différentes catégories, suivant qu'elles possèdent ou ne possèdent pas telle ou telle propriété »<sup>82</sup>. Au contraire, il veut s'« appliquer à distinguer des propositions concernant toutes les fonctions de variables réelles, définies au sens de *Dirichlet*, c'est-à-dire sans restriction préalable »<sup>83</sup>. Il considère non seulement les fonctions uniformes de la variables réelles mais également les fonctions multiformes, fonctions plus particulièrement étudiées dans la thèse de Vasilescu<sup>84</sup>. Froda cherche à énoncer des « propriétés de voisinage » pour ces fonctions, c'est-à-dire des propriétés générales qui « se définissent en chaque point à l'aide des valeurs de la fonction aux points infiniment voisins »<sup>85</sup>. L'ensemble  $E$  des points où sera vérifiée cette propriété aura dans tous les énoncés de Froda un « caractère spécial » de distribution<sup>86</sup>. D'après Arnaud Denjoy<sup>87</sup>, Froda s'intéresse particulièrement aux propriétés applicables à toutes les fonctions et dont l'exactitude présente « une vérité statistique ». Les propriétés énoncées par l'étudiant concernent les valeurs des fonctions en certains points, les ensembles-limites de  $f(M)$  quand  $M$  tend vers  $P$ , ainsi que les maxima et les minima des fonctions continues. Froda caractérise également les points de discontinuité de la fonction  $f$ . Il termine son exposé par l'étude abstraite des propriétés de voisinage et de leur distribution. Selon Arnaud Denjoy, c'est principalement dans ces dernières considérations que le travail de Froda révèle son originalité.

Hormis René Baire et Henri Lebesgue dont Alexandre Froda cite les travaux pour situer ses recherches dans un effort de généralisation de leurs classifications, le doctorant

---

81. *Sur la distribution des propriétés de voisinage des fonctions de variables réelles*, soutenue en 1929.

82. Cette citation retranscrite par Froda dans son manuscrit, FRODA 1929, p. 1 est extraite de l'introduction de la thèse de René Baire, *Sur les fonctions de variables réelles*, 1899.

83. Cf. FRODA 1929, p. 2.

84. Cf. FRODA 1929, p. 5.

85. Cf. FRODA 1929, p. 2.

86. que Froda appelle « caractère de distribution », cf. FRODA 1929, p. 2.

87. Dans le rapport de thèse.

ne se réfère à aucun autre mathématicien. Il cite seulement à une reprise « quelques résultats simples de même nature » présentés par W.H. Young lors d'une conférence de l'Université de Strasbourg sur « La symétrie de structure des fonctions de variables réelles »<sup>88</sup>. Dans le rapport de thèse, Denjoy signale également les recherches de Young mais il n'évoque aucune collaboration entre Froda et le mathématicien anglais. Il ne mentionne qu'une question de priorité de résultats. Il semble que Froda ait travaillé de façon isolée pour son doctorat : il ne remercie d'ailleurs personne à la fin de son mémoire<sup>89</sup>.

Un dernier doctorat peut enfin être rattaché à l'ensemble formé par les thèses de Froda et Vasilescu : celui d'Azyzk Gorny<sup>90</sup> qui s'intéresse également à la classification des fonctions de la variable réelle. Le rapprochement entre ces mémoires est cependant seulement thématique. Gorny ne se réfère pas aux travaux de Baire et de Lebesgue. Il situe l'origine de son travail dans les récentes publications de Denjoy, Carleman et Mandelbrojt sur la théorie des fonctions quasi-analytiques<sup>91</sup>. Les résultats que présente Gorny pour son doctorat ne concernent toutefois pas directement cette dernière théorie.

D'après Azyzk Gorny, l'objectif de son mémoire est « d'apporter une contribution à l'étude et à la classification des fonctions d'une variable réelle » en accordant une « place relativement importante [...] aux classes de fonctions indéfiniment dérivables »<sup>92</sup>. Gorny commence donc par améliorer des inégalités entre les maxima des modules des dérivées d'une fonction de la variable réelle. D'après Paul Montel<sup>93</sup> et Azyzk Gorny, de telles inégalités ont déjà été établies par plusieurs mathématiciens dont Landau, en 1913, Hadamard, en 1914, Hardy et Littlewood en 1912 et Neder en 1930<sup>94</sup>. Mais le doctorant cherche à améliorer ces inégalités pour les appliquer ensuite à l'étude de classes de fonctions indéfiniment dérivables d'une variable réelle. Comme Montel le souligne explicitement dans le rapport, les inégalités obtenues par Gorny, publiées avant la soutenance dans deux notes aux CRAS en 1938, ont été immédiatement reprises par Henri Cartan en 1939 et améliorées par Kolmogoroff en 1940<sup>95</sup>.

88. publiés dans le Bulletin des Sciences Mathématiques, tome LII, juillet 1928, un an avant la soutenance de Froda, cf. FRODA 1929, note 1, p.3.

89. Il adresse cependant deux dédicaces : la première au président de son jury de thèse, Émile Borel qui préside le jury de sa thèse, la seconde à Dimitri Pompeiu, professeur à l'Université de Bucarest dont Froda a, selon toute vraisemblance, suivi les cours pendant sa formation mathématique en Roumanie.

On peut d'ailleurs se demander si Émile Borel préside le jury de thèse en raison du contenu du mémoire. En effet, l'étude abstraite de la distribution des propriétés de voisinage des fonctions arbitraires se trouve à l'interface entre les champs de la théorie des fonctions, de la théorie des ensembles, mais également de la théorie de la mesure et des probabilités. La thèse est soutenue en 1929, à peine un an après la création de l'Institut Henri Poincaré et c'est la première thèse en théorie des fonctions à utiliser des concepts « statistiques », pour reprendre l'expression de Denjoy.

90. *Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle*, 1940.

91. Paul Montel le confirme d'ailleurs dans le rapport de thèse.

92. Cf. AZYZK 1939, p. 318.

93. Cf. le rapport de thèse.

94. Cf. AZYZK 1939, p. 319.

95. Cf. également AZYZK 1939, p. 319.

Les recherches entreprises par Gorny s'inscrivent donc dans un élan de recherche qui dépasse le corpus des thèses d'État et qui se développe dans le milieu de la recherche internationale.

Dans un second temps, Gorny énonce des résultats sur les classes de fonctions indéfiniment dérivables. Il donne notamment une condition nécessaire et suffisante pour que deux classes de fonctions définies sur tout  $\mathbb{R}$  soient identiques<sup>96</sup>. Selon le doctorant, il améliore des résultats déjà établis par Mandelbrojt dans plusieurs notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* de 1939<sup>97</sup>. Il démontre également la stabilité par produit de ces classes de fonctions dans le cas où l'intervalle de départ est  $\mathbb{R}$ <sup>98</sup>. Il regarde ensuite plus précisément une classe particulière de fonctions, celles qui sont représentables par une intégrale de Stieltjes  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} dV(t)$ , et il établit des inégalités entre les différences finies de la fonction  $V$  et les bornes des dérivées successives de la fonction. Gorny ne recourt pas ici à l'approximation des fonctions par des polynômes, comme le faisaient Marchaud et Popoviciu lorsqu'ils considéraient des différences de fonctions.

Dans la dernière partie du mémoire, Gorny généralise des théorèmes de Serge Bernstein et de la Vallée Poussin en montrant la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle limites de suites de fonctions analytiques quelconques<sup>99</sup>. Il cherche aussi à donner des bornes aux dérivées successives des fonctions limites<sup>100</sup>.

Gorny se réfère ainsi principalement aux résultats et méthodes de Szolem Mandelbrojt, d'Henri Cartan et également aux résultats de Serge Bernstein et de Charles de la Vallée Poussin. Il utilise également certaines méthodes propres aux fonctions de la variable complexe, ce qui n'est pas le cas dans les mémoires précédents. Parmi les mathématiciens français évoqués par Azyk Gorny dans l'introduction de sa thèse,

---

96. Gorny appelle classe  $\{m_n\}$  de fonctions un ensemble de fonctions de la variable réelle  $x$  indéfiniment dérivables dans un intervalle et vérifiant les limitations suivantes :

$$|f^{(n)}(x)| \leq c^n m_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

la suite  $m_n$  étant une suite de nombres positifs et  $c$  une constante indépendante de  $n$ , cf. AZYK 1939, p. 327. À titre d'exemples, Gorny fournit dans son mémoire non seulement la classe des fonctions analytiques obtenues en posant  $m_n = n!$ , mais également les classes de fonctions quasi-analytiques de MM. Denjoy et Carleman, AZYK 1939, p. 327, classes qui ont été à l'origine de ses recherches selon ses propres propos.

97. Cf. AZYK 1939, p. 327.

98. Les méthodes utilisées dans ces démonstrations reposent principalement sur les inégalités qu'il a établies et également sur la considération de suites construites à partir des suites  $m_n$  et  $m'_n$  relatives aux classes de fonctions qu'il cherche à identifier.

99. Selon Gorny, AZYK 1939, p. 345-346, ces théorèmes concernaient la dérivabilité des fonctions limites de suites de polynômes ou d'expressions trigonométriques.

100. Les méthodes employées dans ce dernier chapitre se rapprochent de méthodes utilisées pour les fonctions de la variable complexe, notamment parce que les fonctions considérées sont définies dans le plan. Mais Gorny ne regarde la valeur de la limite que sur l'axe réel ou sur un intervalle de l'axe réel. Dans ses démonstrations Gorny revendique explicitement s'être inspiré des méthodes d'Ostrowski pour établir une relation entre les zéros des fonctions analytiques de la suite donnée et la dérivabilité de la fonction limite, cf. AZYK 1939, p. 346.

Mandelbrojt semble être celui qui exerce la plus forte influence intellectuelle sur le jeune doctorant<sup>101</sup>. C'est d'ailleurs essentiellement à lui que s'adresse la gratitude à la fin de l'avant-propos<sup>102</sup>. Une autre indication des liens intellectuels entre le doctorant et le mathématicien pourrait être vue dans l'autobiographie de Laurent Schwartz, ce dernier décrivant Gorny comme un « élève de Mandelbrojt »<sup>103</sup>.

### 5.2.3 Les séries trigonométriques

Un troisième groupe se distingue parmi les thèses classées en théorie des fonctions de la variable réelle. Trois doctorats, ceux de Kogbeliantz, Prasad et Salem ont en effet un sujet commun, l'étude de problèmes sur les séries trigonométriques et les séries de Fourier. Les références citées par chacun de ces doctorants diffèrent, le rapprochement entre les trois mémoires est thématique. On peut remarquer qu'aucun des trois n'est normalien, ce qui peut être interprété comme un signe de l'absence de la théorie des séries trigonométriques parmi le front avancé de la recherche universitaire française de l'entre-deux-guerres<sup>104</sup>, investi traditionnellement depuis le début du XX<sup>ème</sup> siècle par des mathématiciens issus de l'École normale supérieure.

En 1923, dans sa thèse, *Sur les séries trigonométriques et la série de Laplace*, Ervand Kogbeliantz cherche à « étendre aux séries de polynômes ultrasphériques des propriétés connues de la sommabilité des séries trigonométriques », d'après Borel dans le rapport de thèse<sup>105</sup>. À l'aide d'une série intermédiaire, Kogbeliantz veut faire une analogie entre les deux classes de séries du point de vue de la sommabilité  $(C, \delta)$  par le procédé des moyennes arithmétiques<sup>106</sup>.

101. On peut d'ailleurs s'interroger sur l'existence de liens autres qu'intellectuels qui pourraient exister entre Gorny et Mandelbrojt, tous deux d'origine polonaise. L'origine de Gorny est connue non seulement par le procès-verbal de soutenance mais elle est également précisée dans AUDIN 2007, p. 30.

102. Cf. AZYZK 1939, p. 318. Montel et Hadamard ne sont remerciés que pour avoir présentés les notes de Gorny à l'Académie des sciences. Mandelbrojt est depuis 1938 professeur au Collège de France. Il occupait pendant la période précédente, de 1930 à 1938, un poste de professeur à la faculté des sciences de Clermont-Ferrand. Les ouvrages ne sont pas très clairs à ce sujet mais il semblerait qu'Azyzk Gorny ait passé le temps de l'élaboration de son mémoire à Clermont-Ferrand. L'indication sur le manuscrit de la thèse le confirme. Le nom de Gorny comme étudiant à la faculté de Clermont-Ferrand est également mentionné dans plusieurs ouvrages tels que la biographie de Laurent Schwartz, SCHWARTZ 1997, la biographie de Feldbau, AUDIN 2007, p. 30, ou COUTY ET AL. 1995. C'est dans cette université qu'il aurait alors rencontré le mathématicien. Ce dernier une fois nommé au Collège de France aurait fait soutenir Gorny à la faculté des sciences de la Sorbonne.

103. Michèle Audin reprend cette indication dans son texte, AUDIN 2007, p. 30.

104. Ce signe confirme le bilan historiographique que j'ai dressé précédemment.

105. D'après, KOGBELIANTZ 1923b, p. 1, les polynômes ultrasphériques  $P_n^{(\lambda)}(x)$ ,  $(n = 0, 1, 2, \dots, \infty)$  sont définis par la fonction génératrice de  $(1 - 2xz + z^2)^{-\lambda}$  :  $\frac{1}{(1 - 2xz + z^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n^{(\lambda)}(x)$  ( $\lambda > 0$ ).

106. Il s'agit ici de la méthode de convergence étudiée par Kogbeliantz. Elle est notamment décrite dans KOGBELIANTZ 1923b, p. 6-7 et dans KOGBELIANTZ 1923a, p. 246. La série  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  est dite sommable  $(C, \delta)$  avec la somme  $s$ , si la limite pour  $n \rightarrow \infty$  de la moyenne arithmétique  $s_n^{(\delta)}$  d'ordre  $\delta$  existe où  $s_n^{(\delta)} = u_0 + \sum_{m=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{(n+\delta)(n-1+\delta)\dots(n-m+1+\delta)} u_m$ .

D'après Kogbeliantz<sup>107</sup>, cette méthode de sommabilité a été étudiée au préalable par Hobson et Gromwall. Ces deux mathématiciens sont d'ailleurs les seuls que cite Kogbeliantz dans l'introduction de son doctorat et par Borel dans le rapport. Dans le cours de la thèse, ainsi que dans l'article que publie Kogbeliantz en 1923, KOGBELIANTZ 1923a, le doctorant mentionne quelques autres résultats établis pour certaines valeurs de  $\delta$  dans l'étude de la sommabilité  $(C, \delta)$  de séries de Laplace. Il cite notamment les recherches de Féjer, Haar, Chapman, Gromwall et de lui-même<sup>108</sup>. Kogbeliantz reprend et étudie explicitement certains des travaux et méthodes de Chapman, Hobson et Gromwall, notamment dans le cas des séries de Legendre, mais il ne procède pas de même pour les autres mathématiciens évoqués. Parmi les mathématiciens dont Kogbeliantz retravaille les travaux, Hobson et Chapman, deux mathématiciens anglais, occupent ainsi une place particulière à côté de Gromwall.

Dans l'ensemble de la thèse comme dans le rapport, aucun travail d'un mathématicien français n'est mentionné. Aucun n'apparaît comme une source d'influence pour le doctorant. Kogbeliantz adresse seulement une dédicace en début de manuscrit à Paul Appell et à Émile Borel<sup>109</sup>. Cette absence de référence à des mathématiciens français confirme l'absence des séries trigonométriques sur le front de la recherche française.

Neuf années après Kogbeliantz, en 1932, Prasad étudie des notions et des outils mathématiques directement en relation avec les séries trigonométriques<sup>110</sup>. Comme il l'affirme lui-même<sup>111</sup>, « l'objet du présent travail est d'étudier quelques questions relatives à la convergence et à la sommabilité de la série conjuguée d'une série de Fourier »<sup>112</sup>. Il cherche à obtenir des résultats de grande précision sur la convergence de cette série conjuguée à partir d'hypothèses les plus générales possibles pour la fonction  $f$ . Dans l'introduction de sa thèse, Prasad fournit une bibliographie abondante des

107. Cf. l'avant-propos de la thèse.

108. Cf. KOGBELIANTZ 1923b, p. 23.

109. Le lien de Kogbeliantz avec ces deux mathématiciens peut d'ailleurs trouver diverses explications. Tout d'abord, Borel est le président et le rapporteur du mémoire de l'étudiant. Ensuite d'après le *Jahrbuch*, Paul Appell a publié notamment dans les années 1910 et en 1920 divers travaux sur le développement en série d'inverses de polynômes qui sont à la base de la définition des polynômes ultrasphériques utilisée par Kogbeliantz. Le répertoire bibliographique recense deux articles intitulés *Développement en série procédant suivant les inverses de polynômes données*, l'un publié dans le Bulletin de Darboux, 1913, 37, p. 345-350, l'autre dans les C.R., 1913, 157, p. 5-7, ainsi que deux articles intitulés *Sur les développements en série suivant les inverses de polynômes donnés*, l'un publié dans le Bulletin de la S.M.F., 1920, 48, p. 1-8, l'autre également dans le Bulletin de la S.M.F., 1923, 51, p. 189-191). Enfin, c'est également Paul Appell et Émile Borel qui ont présenté pour la première fois Ervand Kogbeliantz, alors professeur à l'Université d'Erivan, à la séance du 14 décembre 1921 pour l'élection de membre de la Société mathématique de France, cf. SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 1921, p. 52.

110. Dans sa thèse *Contribution à l'étude de la série conjuguée d'une série de Fourier*, 1932.

111. Ce que reprend d'ailleurs Denjoy dans le rapport de thèse ; cf. PRASAD 1932, p. 1.

112. C'est-à-dire la convergence et la sommabilité d'une série trigonométrique particulière.

études réalisées sur le sujet des séries conjuguées d'une série de Fourier<sup>113</sup>. Il ne reprend cependant pas tous ces travaux. Comme le confirme Denjoy dans le rapport, il fonde son travail sur la théorie de la convergence et de la sommabilité des séries conjuguées des séries de Fourier établie par Young<sup>114</sup>, après les premières ébauches de Pringsheim<sup>115</sup>. Cette théorie est basée sur l'étude d'une certaine fonction  $g$ , obtenue à partir de la fonction  $f$  initialement considérée<sup>116</sup>. L'existence d'une telle fonction a en effet des conséquences pour la convergence de la série conjuguée. En regardant la convergence et la sommabilité de la série conjuguée en des points  $x$  où l'intégrale définissant  $g$  n'existe pas et en considérant alors une fonction  $G$  plus générale, Prasad étend les résultats de Young pour la sommabilité  $(C, 1)$  de la série conjuguée<sup>117</sup>.

La suite de son travail consiste principalement à approfondir divers résultats de convergence et de sommabilité établis par Hardy, Littlewood et Paley au cours des années 1920 et des années 1930<sup>118</sup>. B.N. Prasad s'intéresse ainsi à la question de la convergence simple de la série conjuguée et à celle de sa sommabilité  $(C, r)$ , pour  $r$  entier et  $(C, \delta)$ , où  $\delta$  est un nombre positif quelconque. Il s'attache également à étendre divers résultats établis antérieurement par Fatou, en 1906, par Lichtenstein, en 1912, et par Plessner, en 1923. Selon les propos qu'il tient dans son introduction<sup>119</sup>, Prasad ne s'est pas directement inspiré de leurs méthodes. Les théorèmes qui généralisent ces résultats sont des résultats parmi d'autres obtenus par son approche inspirée des travaux de Hardy, Littlewood et Paley.

Les travaux de ces trois mathématiciens anglais semblent ainsi exercer une influence particulière sur la recherche de Prasad.

Parmi les références citées par Prasad, une faible place est accordée aux mathématiciens français<sup>120</sup>. L'essentiel des mathématiciens dont il s'inspire et dont il prolonge les travaux sont anglais : William Henry Young, puis Hardy, Littlewood et Paley. Ces quatre mathématiciens appartiennent à une même tradition de recherche. Les travaux de Young sur les séries de Fourier et les séries orthogonales sont repris par Hardy et Littlewood dont Paley est l'un des élèves. De plus, Hardy, Littlewood et Paley se trouvaient tous les trois, à l'université de Cambridge dans la seconde moitié des années

113. Il cite parmi les mathématiciens les plus connus Fatou (notamment sa thèse de 1906, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*), Féjer Hardy, Littlewood, Lebesgue, Young, Zygmund, cf. PRASAD 1932, p. 49-53.

114. Dans les années 1912, 1913, selon les textes auxquels se réfère Prasad dans la bibliographie qu'il établit, PRASAD 1932, p. 49-53.

115. Cf. PRASAD 1932, p. 7.

116. La fonction  $g$  est donnée quand l'intégrale converge par la formule suivante :  $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \cotg \frac{t}{2} dt$ , PRASAD 1932, p. 2.

117. La fonction  $G$  est définie par :  $G(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \Psi(t) \operatorname{cosec}^2 \frac{t}{2} dt$  où  $\operatorname{cosec} = \frac{1}{\sin}$ ,  $\Psi(t) = \int_0^t \psi(u) du$  et  $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t)$ , cf. PRASAD 1932, p. 8-9.

118. Les ouvrages et articles cités par B.N. Prasad au cours de son introduction et dans sa bibliographie, PRASAD 1932, p. 49-53, en témoigne.

119. Cf. PRASAD 1932, p. 12-13.

120. Denjoy est certes remercié à la fin de l'introduction mais en tant que rapporteur de la thèse.

1920. Ils ont collaboré à cette période sur différents sujets mathématiques et notamment en théorie des séries de Fourier <sup>121</sup>. La thèse de Prasad s'inscrit ainsi dans cet élan anglais de la recherche sur les séries trigonométriques.

On peut alors s'interroger sur la raison qui pousse cet étudiant à soutenir sa thèse en France. Dans quelle mesure peut-on expliquer la soutenance de ce grade en France par des raisons politiques, scientifiques, etc. ? En effet, le titre de Phd ne représente pas dans l'entre-deux-guerres un équivalent au grade de docteur ès-sciences mathématiques français <sup>122</sup>. Si l'étudiant a une stratégie pour une future carrière dans l'enseignement supérieur de son pays, la soutenance d'une thèse d'Etat française pourrait-elle à cet égard représenter davantage d'intérêt ? Une dernière hypothèse peut être évoquée : la réputation de l'analyse française et de la recherche française en théorie des fonctions héritée du début du XX<sup>ème</sup> siècle serait un argument en faveur de la venue d'étudiants étrangers pour soutenir une thèse en ce domaine. Pourtant, aucune autre thèse antérieurement soutenue ne traite de sujets semblables à ceux de Prasad.

Dans les thèses de Kogbeliantz et Prasad, les séries trigonométriques servent de point de départ ou de point de comparaison dans l'élaboration de leurs travaux. Le doctorat que Raphaël Salem publie en 1940 <sup>123</sup> est lui centré sur l'étude des séries trigonométriques. Les questions étudiées se rapportent au calcul des coefficients de ces séries et aussi à la convergence de ces séries. Raphaël Salem donne ainsi dans le cadre de son mémoire les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite infinie de nombres  $(a_n, b_n)$  tendant vers  $(0, 0)$  soient les coefficients de Fourier d'une fonction sommable <sup>124</sup>, ces conditions nécessaires *et* suffisantes, n'étant pas encore connues au moment de la parution du doctorat <sup>125</sup>. Raphaël Salem énonce également les conditions que doit vérifier une suite  $\rho_n$  pour qu'il soit possible de choisir les arguments  $\alpha_n$  tels que la série  $\sum \rho_n \cos(nx - \alpha_n)$  soit la série de Fourier d'une fonction continue <sup>126</sup>.

Parallèlement à ces résultats sur les coefficients de Fourier, Raphaël Salem généralise des théorèmes sur la convergence absolue et sur la convergence uniforme des séries de Fourier <sup>127</sup>.

121. Cf. le site [http ://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/](http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/), où les biographies de ces trois mathématiciens sont consultables. Ils ont d'ailleurs continué à publier sur le sujet de la théorie des séries trigonométriques par la suite.

122. comme je l'ai indiqué dans le premier chapitre de cette thèse en présentant le corpus des thèses mathématiques.

123. *Essais sur les fonctions trigonométriques*, 1939. Selon le procès verbal d'examen consultable aux archives nationales, série AJ/16/5518, Raphaël Salem a en effet été dispensé de soutenance.

124. et donc que la série trigonométrique  $\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  soit la série de Fourier d'une telle fonction.

125. Dans le rapport sur la thèse de Salem, Denjoy souligne d'ailleurs en quoi le chapitre de la thèse de Salem comportant ces résultats est « extrêmement remarquable ».

126. Selon le rapport de Denjoy et SALEM 1940, p. 2. Salem complète ainsi les conditions nécessaires déjà établies par Fisher-Riesz sur les modules des coefficients de Fourier.

127. Selon Salem, SALEM 1940, p. 2 et le rapport de Denjoy, l'étudiant généralise les critères de Dini et de Jordan pour la convergence uniforme des séries de Fourier en donnant un test de convergence

Tout comme Kogbeliantz et Prasad, Raphaël Salem ne mentionne pas dans le cadre de l'introduction de sa thèse des résultats de mathématiciens français ou des références françaises à ses recherches. Il ne le fait d'ailleurs pas non plus dans le mémoire en lui-même, n'évoquant que ponctuellement son utilisation de l'intégrale de Lebesgue dans le calcul des coefficients<sup>128</sup>. Dans le cadre de son introduction, Salem ne cite en fait que très peu de noms de mathématiciens<sup>129</sup>. À part les critères de Fisher-Riesz sur les modules des coefficients de Fourier, les critères de Dini et de Jordan pour la convergence uniforme de la série de Fourier d'une fonction continue, ainsi que des théorèmes de Serge Bernstein relatifs à la convergence absolue d'une série de Fourier, il ne mentionne que le livre de Zygmund, publié en 1935, Zygmund Antoni *Trigonometrical Series*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwow. Cette publication fait le point sur l'essentiel des résultats mathématiques obtenus sur les séries trigonométriques jusqu'en 1935<sup>130</sup>. Dans le rapport de thèse, Denjoy situe le travail de Salem dans la suite des efforts des analystes tels que Hardy, Littlewood et Serge Bernstein. Il reconnaît explicitement l'absence de recherche française dans ce domaine écrivant ainsi que la thèse de ce dernier est « une contribution française digne de grands éloges à une théorie fâcheusement délaissée chez nous depuis trop longtemps ».

Un aspect de ce délaissement de cette théorie est donné par la liste des publications des mathématiciens français identifiés comme des « patrons » du milieu mathématique français de l'entre-deux-guerres<sup>131</sup>, spécialisés en analyse, tels qu'Émile Borel, Jacques Hadamard, Paul Montel, Gaston Julia et Arnaud Denjoy : Arnaud Denjoy semble être l'un des seuls à écrire sur les séries trigonométriques<sup>132</sup>.

---

uniforme plus général. De plus il prolonge certains théorèmes de Serge Bernstein pour la convergence absolue de la série trigonométrique d'une fonction continue.

128. Selon Paul Lévy dans LÉVY 1967 et Jean-Pierre Kahane dans KAHANE 1991, cette utilisation est classique depuis le début du XX<sup>ème</sup> siècle.

129. Raphaël Salem étant banquier à l'origine, il n'est sans doute pas au courant de l'usage qui veut qu'en général, dans l'introduction de la thèse, les doctorants situent leur travail par rapport à d'autres publications sur le sujet. Pour des renseignements biographiques sur Raphaël Salem, cf. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Salem.html>.

130. Zygmund explicite dans la préface de son livre le rôle d'ouvrage de référence qu'il lui attribue, cf. ZYGMUND 1935, Preface : « the object of this treatise is to give an account of the present state of the theory ; but, owing to the wide extent of the subject, it has been impossible to treat all parts in equal detail. In particular Fourier's integral, whose importance is more and more apparent, certainly deserves more space ; but an adequate treatment would require a separate book ». Les réimpressions successives de cet ouvrage en 1960 et en 2002, ainsi que les différents commentaires sur cet ouvrage, notamment retranscrits dans la biographie du mathématicien consultable sur le site : <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Zygmund.html> témoignent que cet objectif est atteint.

131. Cf. LELOUP et GISPERT prévu pour 2009.

132. D'ailleurs, d'après la notice nécrologique parue sur ce dernier en 1974, SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 1975, p. 14-18, et écrite par Henri Cartan, « Denjoy considérait que sa contribution la plus importante à l'Analyse était le calcul des coefficients d'une série trigonométrique en fonction de la somme  $f$  de cette série (supposée convergente) ». Ces travaux ont été menés par Denjoy entre 1919 et 1921 et exceptées quelques notes au CRAS (une en 1933, « Sur le calcul des coefficients des séries trigonométriques », *C.R.* 196 (1933) 237-239, deux en 1938, « Sur la convergence des séries trigonométriques. I, II », *C.R.* 207 (1938) 210-213 et 316-318) aucune autre production mathématique



Comme Prasad, Salem ne remercie Denjoy<sup>133</sup> que pour l'intérêt que ce dernier a porté « à ces exercices » et son « [encouragement] à les publier »<sup>134</sup>. Il ne fait pas référence aux travaux du mathématicien.

On peut relier à cet ensemble de thèses sur les séries trigonométriques le doctorat d'un étudiant normalien, Jean Favard, *Sur les fonctions harmoniques presque périodiques*, 1927<sup>135</sup>. Dans la description du travail que fait Ernest Vessiot dans le rapport de soutenance, il parle de questions concernant notamment « la caractérisation de fonctions nouvelles par les procédés réguliers d'approximation », c'est-à-dire de procédés qu'on peut rapprocher de l'analyse de Fourier des fonctions périodiques<sup>136</sup>.

Jean Favard s'est initié à la théorie des fonctions harmoniques presque périodiques auprès du mathématicien danois Harald Bohr, qui l'a créée entre les années 1923 et 1926. Le doctorant a bénéficié d'une bourse Rockefeller pendant l'année 1925-1926 et il a principalement passé cette période à Copenhague auprès de Bohr<sup>137</sup>. Il revendique

---

ne concerne le sujet avant la parution de la thèse de Salem en 1939-1940. Paul Lévy dans LÉVY 1967 et Jean-Pierre Kahane dans KAHANE 1991 confirment également ce fait.

133. Cf. SALEM 1940, p. 3.

134. Ses remerciements semblent cependant authentiques et non pas simplement formels. L'existence de relations entre Salem et Denjoy est en effet connue. Henri Cartan dans la *Notice nécrologique sur Arnaud Denjoy*, publiée aux, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 279 (14 octobre 1974), cf. SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 1975, p. 14-18 et p.17, écrit ainsi :

« Denjoy ne se contenta pas de découvrir de nouveaux domaines des mathématiques ; il sut aussi susciter des vocations et encourager des disciples à en découvrir eux-aussi. Je me contenterai de rappeler qu'ayant decelé chez un ami banquier des dons indiscutables, il réussit à le convaincre d'entreprendre une carrière scientifique : grâce à Denjoy, l'analyse harmonique s'est enrichie des découvertes de Raphaël Salem, un collègue trop tôt disparu qui laisse un nom. »

De même la biographie du mathématicien publiée sur le site <http://www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Salem.html>, témoigne de l'influence de Denjoy sur la carrière de Salem de la même façon que le rapporte Antoni Zygmund dans la préface des *Oeuvres mathématiques de Raphaël Salem*, SALEM 1967, p. 15-16. Zygmund écrit d'ailleurs sur Salem les propos suivants :

« Although he read some of the current literature on Fourier series, he apparently worked all alone ; in any case, the papers on that period would not indicate personal collaboration with others (the only exception here is [one] paper written jointly with Marcinkiewicz, who in 1939 spent some time in Paris). But he had considerable encouragement from Professor Denjoy whom he always remembered with respect and gratitude and with whom he kept personal contact all his life. It was on the insistence of Denjoy that Salem finally decided to seek a doctorate in Mathematics. He obtained the degree of Docteur ès sciences mathématiques in 1940 after the outbreak of the war. »

135. Cette théorie ne fait d'ailleurs l'objet d'aucun autre travail de thèse pendant l'entre-deux-guerres. La définition d'une fonction presque périodique est rappelée FAVARD 1927, p. 2 : « Une fonction, réelle ou complexe, d'une variable réelle  $t$  définie et continue dans tout intervalle  $-\infty < t < +\infty$  :  $f(t) = u(t) + iv(t)$ , est dite presque périodique lorsqu'à tout nombre  $\epsilon$  ( $> 0$  mais aussi petit que l'on veut) on peut faire correspondre une longueur  $l = l(f, \epsilon) > 0$ , telle que tout intervalle de longueur  $l$  ( $t_1 < t < t_2$  avec  $t_2 - t_1 = l$ ) contienne au moins une période  $\tau$  appartenant à  $\epsilon$ , c'est-à-dire un nombre  $\tau(f, \epsilon)$  pour lequel on a l'inégalité  $|f(t + \tau) - f(t)| \leq \epsilon$  dans tout l'intervalle :  $-\infty < t < +\infty$ . »

136. De plus, Paul Lévy comme Gaston Julia, respectivement LÉVY 1967 et JULIA 1932, évoquent les travaux de Bohr en relation avec les fonctions trigonométriques.

137. Cf. SIEGMUND-SCHULTZE 2001, p. 288-301. Il semble d'ailleurs si on se réfère à l'inscription figurant à la fin de l'introduction du mémoire, FAVARD 1927, p. 16, (« Copenhague, février 1926 »), que

entièrement l'influence du mathématicien sur ses recherches<sup>138</sup>. Il consacre ainsi son mémoire à l'exposé et à l'approfondissement de cette théorie très récente. La première partie de l'introduction rappelle ainsi les résultats fondamentaux établis par Bohr dans ses articles fondateurs parus dans *Acta mathematica*.

Dans le cadre de son mémoire, Jean Favard utilise principalement les parties de la théorie de Bohr qui concernent les fonctions analytiques presque périodiques d'une variable complexe dans une bande parallèle à l'axe des  $y$  pour  $(\alpha < x < \beta)$ <sup>139</sup>. Il considère plus particulièrement les fonctions harmoniques presque périodiques. Il étudie si ces fonctions admettent un développement semblable à celui que peut avoir la partie réelle d'une fonction analytique presque périodique<sup>140</sup>. Il se demande également si toute fonction harmonique presque périodique des deux variables  $x$  et  $y$  est toujours la partie réelle d'une fonction analytique presque périodique. Dans le cadre de son mémoire, Favard fournit un développement de la fonction harmonique analogue à un développement trigonométrique<sup>141</sup>. En partant d'une fonction presque périodique réelle  $f(y)$  de la variable  $y$  et en formant la fonction harmonique presque périodique définie et bornée dans le demi-plan  $x \geq 0$  qui se réduit à  $f(y)$  quand  $x$  tend vers zéro, il considère la conjuguée de cette fonction. Il en étudie la presque-périodicité et sa limite quand  $x$  tend vers zéro. Si cette limite existe et si cette limite est presque périodique, Favard montre qu'elle admet le développement conjugué de  $g$ <sup>142</sup>.

Enfin Favard étend sa théorie et celle de Bohr aux fonctions harmoniques de trois variables presque périodiques par rapport à l'une d'entre elles ou à deux d'entre elles. Pour ce faire, il établit des développements en série analogues à ceux trouvés pour les fonctions harmoniques presque périodiques de deux variables<sup>143</sup>.

Ainsi, si Favard ne s'intéresse pas exclusivement aux séries trigonométriques, il développe l'analyse de Fourier créée par Bohr autour des fonctions presque périodiques.

le manuscrit ait été écrit sur place. Jean Favard débute d'ailleurs son mémoire en attribuant à Harold Bohr la création de la théorie des fonctions harmoniques presque périodiques et en citant explicitement les mémoires fondateurs du mathématicien, FAVARD 1927, p. 1. Les biographies du mathématicien ([http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Bohr\\_Harald.html](http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Bohr_Harald.html) et dans le *Dictionary of Scientific Biography* lui attribuent également la paternité de cette théorie.).

138. Le remerciement prononcé qu'il lui adresse à la fin de son introduction en témoigne également, cf. FAVARD 1927, p. 16.

139. Cf. FAVARD 1927, p. 13. Favard utilise ainsi les résultats suivants : à toute fonction presque périodique dans une bande correspond un développement unique de la forme  $f(x) \sim \sum A_n e^{\Lambda_n x}$ , où les  $A_n$  sont des constantes et les  $\Lambda_n$  des réels et toute fonction presque périodique peut être approchée uniformément dans toute bande intérieure à la première par une suite de polynômes exponentiels.

140. Le développement est alors fourni par le développement d'une fonction analytique presque périodique, donné dans la note précédente.

141. Il montre ainsi que la fonction  $u(x, y)$  peut-être développée sous la forme :

$$u(x, y) \sim kx + l + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n^+ e^{\lambda_n x} + A_n^- e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y + (B_n^+ e^{\lambda_n x} + B_n^- e^{-\lambda_n x}) \sin \lambda_n y]$$

avec  $\lambda_n > 0$ , cf. FAVARD 1927, p. 15.

142. Cf. FAVARD 1927, p. 15.

143. Cf. le rapport qu'écrit Denjoy ainsi que FAVARD 1927, p. 16.

L'étude des développements en séries des fonctions harmoniques et l'étude de leur approximation par des polynômes exponentiels rapprochent alors le mémoire de Favard des trois autres précédemment présentés, même si aucune référence n'est commune à ces doctorats.

Parmi cet ensemble de quatre doctorats, on remarque une certaine influence de travaux anglais sur deux d'entre eux, ceux de Kogbeliantz et de Prasad. Le phénomène commun à cet ensemble est l'absence de référence à des mathématiciens français. Chaque travail se fonde sur des recherches réalisées à l'étranger. On peut alors se demander ce qui a pu pousser ces quatre doctorants à s'intéresser à leur sujet de thèse. Une hypothèse peut être considérée : le séminaire Hadamard aurait pu jouer un rôle dans leur choix. En effet durant les années 1920 et le début des années 1930, même si les résumés qui figurent dans les annuaires du Collège de France ne sont pas toujours précis, le thème des séries trigonométriques apparaît à plusieurs reprises parmi les thèmes abordés lors de séances de séminaire<sup>144</sup>. La théorie de Bohr sur les fonctions presque-périodiques est présentée au séminaire Hadamard pendant l'année scolaire 1927-1928<sup>145</sup>. En outre au moins deux de ces quatre doctorants ont exposé leur recherche au séminaire Hadamard. En 1931-1932, « Prasad, d'Allahabad » a présenté ses « recherches sur les séries trigonométriques auxquelles il a, comme on sait, consacré une importante thèse, soutenue récemment en Sorbonne »<sup>146</sup>. En 1933-1934, « les notes présentées par M. Salem aux Comptes rendus, et qu'il a exposées dans l'une [des] séances, ont, comme nous avons eu l'occasion de l'apprendre récemment excité le plus haut intérêt de M. Serge Bernstein, l'un des maîtres qui font le plus autorité en la matière. »

L'étude des thèses en théorie des fonctions de la variable réelle révèle donc plusieurs thématiques différentes. La première concerne l'étude de propriétés différentielles vérifiées par ces fonctions et les travaux de Paul Montel y ont une influence certaine. La seconde participe à un effort de classification des fonctions. Certaines des recherches réalisées sur ce thème se situent dans la suite des travaux de Baire et de Lebesgue de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle et du début du XX<sup>ème</sup> siècle. Un troisième groupe de thèses est centré sur l'étude des séries trigonométriques. Parmi les sujets abordés par les doctorants, on relève l'absence de la théorie de la mesure ou de la théorie de l'intégration. Ce n'est

---

144. L'étude des méthodes de sommation généralisée figure parmi le thème de conférences pour l'année 1925-1926. En 1926-1927, certaines analyses de mémoires scientifiques rendent compte du « progrès [des] connaissances sur les séries trigonométriques positives dans leurs relations avec les propriétés du corps convexe, des notions nouvelles de fonctions sur et sous-harmoniques et de fonctions presque périodiques ; de la question de l'unicité du développement trigonométrique. », cf. les annuaires du Collège de France des années correspondantes.

145. L'*Annuaire du Collège de France* n'est pas claire sur l'identité du conférencier. On peut penser qu'il s'agit de Favard.

146. Cf. l'*Annuaire du Collège de France*.

pas dans le cadre des thèses en théorie des fonctions de la variable réelle que de tels thèmes sont traités. On y voit la confirmation de l'absence de recherche française dans ce champ particulier qu'indiquait déjà le bilan historiographique. Cependant, aucun des trois thèmes abordés dans les thèses classées en théorie des fonctions de la variable réelle n'est présenté dans ce bilan comme l'un des sujets abordés pendant l'entre-deux-guerres. Les questions de classification des fonctions et les séries trigonométriques sont décrits comme des domaines absents de la scène mathématique en France entre 1914 et 1945, mais qui ont été travaillés à fin du XIX<sup>ème</sup> siècle et du début du XX<sup>ème</sup> siècle. L'étude des propriétés différentielles de fonctions et le nom de Paul Montel n'y sont même pas présentés. Pourtant, les travaux de ce dernier influencent directement deux doctorats. Il est en outre le rapporteur de quatre de ces mémoires, autant que Denjoy<sup>147</sup>. Les deux mathématiciens semblent cependant jouer un rôle différent. Denjoy est mentionné dans le bilan historiographique pour ses travaux sur les séries trigonométriques du début du XX<sup>ème</sup> siècle et pour ses travaux sur la totalisation. Pourtant, aucun de ses travaux ne semble influencer directement les thèses classées en théorie des fonctions de la variable réelle. Les rapports qu'il rédige concernent pour l'essentiel les séries trigonométriques. C'est seulement en tant que spécialiste de ce sujet qu'il occupe alors sa fonction de rapporteur, alors qu'il ne semble plus sur le front avancé de la recherche sur ce domaine.

### 5.3 La théorie des fonctions de la variable complexe

Sur les 38 thèses classées en théorie des fonctions, 25 le sont en théorie des fonctions de la variable complexe. Ce domaine est donc le plus important en nombre. Les acteurs du milieu mathématique de l'entre-deux-guerres le décrivent également comme le domaine principal de la théorie des fonctions. Par exemple, dans son autobiographie, Laurent Schwartz parle des cours et des séminaires qu'il a suivis lors de sa scolarité à l'École normale supérieure. Il ne mentionne pour l'essentiel que des sujets de théorie des fonctions complexes parmi les sujets qui lui sont présentés<sup>148</sup>.

---

147. Montel est ainsi le rapporteur de quatre de ces thèses : celles de Florin Vasilescu, André Marchaud, Tibère Popoviciu, et Gorny ; Denjoy celui de la thèse d'Alexandre Froda, de Prasad, de Salem et de Favard. Borel est le dernier rapporteur.

148. Cf. C. SCHWARTZ 1997, p. 75-76. Il parle notamment, p. 76, d'un « séminaire Valiron » où lui sont présentés « les résultats sur l'ordre des fonctions entières, qui, par la décroissance des coefficients de la série de Taylor, la croissance du maximum du module sur les cercles concentriques, la répartition des zéros, forment un ensemble de théorèmes [qu'il trouva] fort stimulant ». Il évoque à cette occasion le théorème de Picard sur les fonctions entières qu'il qualifie d'« un des plus beaux théorèmes des mathématiques ». Jacqueline Ferrand décrit également en ces termes le domaine de la théorie des fonctions de la variable complexe lors de l'entretien qu'elle m'a accordé.

L'étude des références citées<sup>149</sup> permet dans un premier temps de dégager plusieurs groupes à l'intérieur de ce corpus de 25 doctorats. Les groupes ainsi formés sont tous relatifs à l'étude de thèmes particuliers. L'analyse des sujets traités permet ensuite de compléter certains de ces groupes : certaines thèses sont ainsi rattachées aux groupes déjà existants, d'autres restent isolées.

Quatre premiers groupes thématiques se distinguent alors et peuvent être regroupés dans un plus grand ensemble, composé de 13 doctorats. Chacun de ces groupes examine en effet des problèmes liés à l'étude de propriétés générales des fonctions de la variable complexe. Le premier se rapporte à l'étude de questions de croissance et d'ordre de fonctions, de densité de distribution des valeurs de la fonction. Ce groupe est constitué par des doctorats qui citent des travaux de Picard, Landau, Schottky et Borel comme origine de leur travail. Le deuxième est composé par des thèses sur des questions d'univalence, qui se réfèrent principalement aux travaux de Montel. Un troisième est relatif à des problèmes de représentation conforme. Un quatrième étudie la description topologique des domaines couverts par les valeurs de la fonction à partir des travaux de Lars Ahlfors.

Les autres groupes de doctorats ne peuvent être réunis de la même façon en un plus gros ensemble. L'un est composé de 4 doctorats qui étudient les domaines de convergence des séries (séries de Taylor, séries de Dirichlet) et les points de singularité de ces séries. Un autre est constitué par trois doctorats qui analysent et utilisent une certaine notion de dérivée pour les fonctions de la variable complexe d'après les travaux d'un mathématicien roumain, Dimitri Pompeiu. Un dernier rassemble enfin cinq thèses qui abordent des sujets isolés qui ne sont rattachées à aucun des groupes précédents.

Tous ces groupes n'ont pas la même importance, tant au niveau du nombre que des thèmes abordés. Les sujets abordés par les thèses réunies dans le grand ensemble sont en effet les seuls qui sont décrits dans les souvenirs et les témoignages des acteurs de l'entre-deux-guerres. C'est également celui qui est mis en évidence par l'historiographie sur le domaine de la théorie des fonctions de la variable complexe<sup>150</sup>. Il convient alors de l'étudier de façon plus approfondie. L'échelle d'analyse est donc augmentée et le troisième niveau d'analyse appliqué aux treize doctorats qui le composent. Les autres groupes sont en revanche étudiés au deuxième niveau d'analyse.

Avant d'examiner plus précisément quelles sont les idées et les sujets travaillés, les méthodes utilisées dans le cadre de ces treize thèses, je commence par dresser un bilan historiographique du domaine de la théorie des fonctions complexes sur une période qui débute avec les premiers résultats cités par les doctorants dans leurs mémoires, c'est-

---

149. J'entends ici, comme cela a été le cas jusqu'à présent, le terme référence comme texte mathématique. Par exemple des publications de Montel sur les fonctions univalentes et des publications de Montel sur les familles normales de fonctions sont considérées comme des références distinctes.

150. Je reviendrai dans la sous-partie suivante sur cette historiographie pour en dresser un bilan.

à-dire les théorèmes de Picard de 1880, et qui va jusqu'à la fin de l'entre-deux-guerres. Ce bilan permettra ensuite de comparer les travaux cités dans les thèses et ceux qui sont mis en évidence dans ce bilan, et ainsi d'étudier comment les doctorants français s'approprient et utilisent certaines des méthodes, certaines des théories décrites comme importantes dans l'historiographie du domaine.

### 5.3.1 Un bilan historiographique

Si on s'intéresse à l'historiographie de la théorie des fonctions de la variable complexe entre les années 1880 et 1950 et plus particulièrement celle qui est élaborée en France<sup>151</sup>, force est de constater que peu d'articles ou d'ouvrages existent à ce sujet. Les ouvrages tels que *A history of Analysis* de Jahnke JAHNKE 2003 ou *Geschichte der Analysis* de Klaus Volkert, VOLKERT 1988, les actes du colloque *History of Analysis* de 1978 à Houston, STANTON et WELLS 1978, n'évoquent pas la théorie des fonctions de la variable complexe en France comme à l'étranger dans la période que j'étudie, de 1880 à 1945. Le dépouillement de périodiques ou d'ouvrages contemporains de la période, tels que le *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* ou les Comptes rendus des Congrès internationaux de mathématiciens, ou celui de périodiques d'histoire des mathématiques récents<sup>152</sup> n'ont donné que peu de résultats<sup>153</sup>. Un certain nombre de publications n'évoque pas les développements de la théorie des fonctions de la variable complexe au-delà des résultats et énoncés fondateurs de Cauchy, Riemann et Weierstrass. Quelques textes évoquent uniquement la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. Il en est ainsi dans les *Éléments d'histoire des mathématiques* de Bourbaki ou dans les livres de Jean Dieudonné comme le *Panorama des mathématiques pures, le choix bourbachique* ou *History of functional analysis*<sup>154</sup>.

Les textes sur lesquels je me fonde pour résumer l'historiographie existante sur le domaine des fonctions d'une variable complexe proviennent à la fois de discours d'acteurs de la période comme Gaston Julia et Paul Lévy, discours prononcés pendant l'entre-deux-guerres (dans le cas de Julia) ou discours prononcés rétrospectivement

---

151. Ce qui exclut les ouvrages historiographiques sur les travaux fondateurs de Riemann, Cauchy et Weierstrass, travaux sur lesquels existe en revanche une historiographie conséquente.

152. tels que les différentes publications de la Société Mathématique de France dont la *Revue d'histoire des mathématiques* et la *Gazette des mathématiciens* ou encore les revues *Historia mathematica*, *Archives for History of Exact Sciences*, *Philosophia scientia*, *Isis*.

153. Le dépouillement du *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* n'a permis de trouver que l'article de Fantappiè, FANTAPPIÈ 1934 qui concerne l'histoire de l'analyse fonctionnelle sans références aux fonctions de la variable complexe telles qu'elles figurent dans les thèses françaises de l'entre-deux-guerres.

154. Ou encore l'*Abrégé d'Histoire des mathématiques* de Dieudonné. Cf. respectivement BOURBAKI 1984; DIEUDONNÉ 1977, 1981, 1978.

(dans le cas de Lévy) ainsi que d'ouvrages historiographiques actuels. Il s'agit des articles et textes suivants<sup>155</sup> :

- *Développement de la théorie des fonctions de variables complexes* de Gaston Julia, discours prononcé à l'occasion du Congrès International des Mathématiciens en 1932 à Zürich,
- le paragraphe « Fonctions analytiques » dans *Les Mathématiques* écrit par Paul Lévy à l'occasion du tri-centenaire de l'Institut de France,
- *Function Theory 1900-1950* de Walter Hayman dans l'ouvrage de Jean-Paul Pier *Development of Mathematics 1900-1950*,
- *Über die Entwicklung der Funktionentheorie in Deutschland von 1890 bis 1950* de Dieter Gaier écrit à l'occasion du centenaire de la Deutsche Mathematiker Vereinigung,
- les paragraphes historiques écrits par Rheinhard Remmert dans son *Classical Topics in Complex Function Theory*, et enfin
- *Some Points of Analysis and Their History* de Lars Gårding.

À l'exception de Gaston Julia, qui évoque chronologiquement le développement de la théorie des fonctions de variables complexes, les autres ouvrages procèdent en regroupant thématiquement les différents travaux produits pendant la période, suivant les objets étudiés et développés, sans respecter un ordre chronologique dans la présentation de ces derniers, mais en précisant toujours les auteurs de ces résultats<sup>156</sup>. Les différents articles et notamment celui de Dieter Gaier renseignent donc sur les milieux mathématiques français comme étrangers pendant l'entre-deux-guerres et sur les relations qui peuvent exister entre les milieux. Dieter Gaier évoque ainsi dans son texte, centré sur le milieu allemand, certaines théories françaises et étrangères qui ont passé les frontières. Dans le cas des thèses françaises de théorie de fonctions de la variable complexe, je regarderai également comment les apports allemands et étrangers à la théorie des fonctions analytiques y sont intégrés et travaillés.

Mon but n'est pas de faire à partir de ces textes un bilan exhaustif de tous les résultats successivement démontrés et établis en théorie des fonctions de la variable complexe. J'insisterai davantage sur les résultats qui sont à l'origine des thèses françaises que j'ai classées dans ce domaine et qui sont rapportés dans les différents ouvrages his-

155. Cf. respectivement JULIA 1932; LÉVY 1967; GAIER 1990; HAYMAN 1994; REMMERT 1998; GÅRDING 1997.

156. Walter Hayman annonce ainsi qu'il s'intéresse plus particulièrement à trois domaines particuliers : celui des fonctions entières, celui des fonctions méromorphes et celui des fonctions analytiques définies dans le cercle unité. Dans son ouvrage destiné prioritairement aux mathématiciens, Rheinhold Remmert organise ses chapitres autour de résultats et de théories comme « les théorèmes de Montel et de Vitali », « le théorème de représentation conforme de Riemann », « les théorèmes de Bloch, Picard et Schottky ». Il en est de même dans l'article écrit par Dieter Gaier. Ce dernier même s'il dit s'intéresser au développement de la théorie des fonctions en Allemagne de 1890 à 1950 évoque cependant de nombreux résultats et théories élaborés à l'étranger mais qui ont ensuite été repris par des mathématiciens allemands.

toriographiques. Je mentionnerai plus succinctement quelques autres tendances fortes de la théorie des fonctions de la variable complexe<sup>157</sup>.

Il faut signaler la faible part accordée dans cette historiographie aux travaux sur les séries de fonctions<sup>158</sup>. Ils ne sont, pour l'essentiel, mentionnés que par Lévy et par Julia<sup>159</sup>.

Les séries de Taylor sont présentées comme un des principaux sujets de recherche de la fin du XIX<sup>ème</sup> et du début du XX<sup>ème</sup> siècle en lien avec la théorie du prolongement analytique<sup>160</sup>. Les travaux d'Hadamard et de Borel de cette période sont déterminants sur ce sujet<sup>161</sup>. En 1892, dans sa thèse, Hadamard donne la valeur du rayon de convergence de la série de Taylor et précise le cercle dans laquelle la série coïncide avec la fonction. Borel publie au même moment des recherches sur le prolongement analytique au-delà des coupures essentielles du domaine de convergence et son travail ne concerne pas seulement les séries de Taylor. Selon Paul Lévy et Gaston Julia<sup>162</sup>, ces travaux sont à l'origine de recherches sur la détermination des singularités à partir de l'étude des coefficients de Taylor réalisées pendant l'entre-deux-guerres et auxquelles a notamment participé Szolem Mandelbrojt. En 1932, Julia qualifie de « récents » des travaux sur les séries non prolongeables, sur les séries lacunaires (avec les contributions de Pólya et Ostrowski) et sur le comportement de séries sur leur cercle de convergence (avec celles de Fatou, Hurwitz, Polya, Borel, etc.). Les travaux les plus récents que citent Gaston Julia et Paul Lévy sur la question du prolongement analytique de séries sont ceux de Porter, Jentzsch et Ostrowski<sup>163</sup>, et notamment ceux sur le phénomène d'ultraconvergence des sommes partielles mis en évidence par Ostrowski. Paul Lévy cite parmi les mathématiciens qui ont continué à étudier ce sujet Bourion, Julia et Mandelbrojt<sup>164</sup>. Julia mentionne encore d'autres travaux qui semblent avoir été traités au XX<sup>ème</sup> siècle : ceux sur les séries asymptotiques et le développement asymptotique de fonctions auxquels ont contribué Watson, F. et R. Nevanlinna ainsi que Carleman et Ostrowski.

---

157. Je ne m'intéresse en effet qu'au développement de la théorie de la fonction d'**une** variable complexe car c'est celle qui est étudiée dans les thèses françaises. À l'exception de la thèse de Pierre Lelong, *Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes*, LELONG 1941, aucun autre doctorat ne s'y intéresse.

158. Tels que les travaux sur les séries de Taylor, de Dirichlet, sur leur domaine de convergence, sur le développement en série de Taylor.

159. Cf. LÉVY 1967, p. 175-176 ou dans JULIA 1932, p. 110-115.

160. Par Julia et Lévy et également par Kahane dans KAHANE 1994 et KAHANE 1991.

161. D'après Paul Lévy, dans LÉVY 1967.

162. Cf. également KAHANE 1991, p. 289.

163. Cf. JULIA 1932, p. 112.

164. Davantage de travaux sont mentionnés dans LÉVY 1967; JULIA 1932; KAHANE 1991. Une partie d'entre eux date de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle et du début du XX<sup>ème</sup> siècle. Je ne les rapporte pas, les thèses que j'étudie étant soutenues pendant l'entre-deux-guerres. Je renvoie donc à ces articles pour plus de précisions.



L'émergence de la théorie des séries de Dirichlet (comme fonctions de variable complexe) est postérieure<sup>165</sup>. L'intérêt pour ce thème grandit surtout au début du XX<sup>ème</sup> siècle avec les travaux de Landau sur la multiplication des séries de Dirichlet. Le sujet est ensuite travaillé par des mathématiciens tels Hardy, Littlewood, Pólya, Ostrowski, Bohr, Bernstein et Mandelbrojt<sup>166</sup>. L'un des buts est de « caractériser les fonctions admettant de tels développements en série »<sup>167</sup>. D'autres travaux sont liés à la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann. Le rôle des séries de Dirichlet est également important dans la représentation de certaines fonctions analytiques à droite d'une droite de convergence<sup>168</sup>. Les recherches sur de telles séries et leurs applications sont décrites à l'interface de la théorie des nombres et de la théorie des fonctions.

Les séries de Taylor et les séries de Dirichlet apparaissent ainsi comme un sujet spécifique qui est peu présent dans l'historiographie de la théorie des fonctions de la variable complexe. Dans son *Essai*, Gaston Julia aborde d'ailleurs le développement des questions relatives aux séries et à leur convergence dans des parties distinctes<sup>169</sup>. La suite du bilan historiographique ne les abordera plus.

Dieter Gaier dans *Über die Entwicklung der Funktionentheorie in Deutschland von 1890 bis 1950* parle de trois « théorèmes-sources » datant du XIX<sup>ème</sup> et qui ont alimenté la recherche ultérieure en théorie des fonctions jusque pendant le XX<sup>ème</sup> siècle<sup>170</sup>. Parmi ces trois sources, deux sont directement reprises dans les thèses françaises, classées en théorie des fonctions de l'entre-deux-guerres : le théorème de Picard de 1879 sur les valeurs prises par une fonction méromorphe au voisinage d'une singularité essentielle et le théorème de Riemann de 1851 sur la représentation conforme d'un domaine connexe de  $\mathbb{C}$  sur le cercle unité<sup>171</sup>. Cette séparation en deux sources distinctes me sert à présenter le bilan historiographique.

---

165. Cf. KAHANE 1991.

166. Selon Paul Lévy, Jean-Pierre Kahane et Gaston Julia.

167. Cf. JULIA 1932, p. 114.

168. D'après Paul Lévy, cf. LÉVY 1967, p. 181.

169. Il mentionne le développement des travaux sur les séries dans ses cinquième et sixième paragraphes tout deux intitulés « le prolongement analytique » JULIA 1932, p. 109-115. De même, dans les *Development of Mathematics 1900-1950* édités par Jean-Paul Pier, la théorie des fonctions de la variable complexe et la théorie des séries de Taylor sont les sujets de deux articles distincts « Function Theory 1900-1950 » de Walter Hayman et « Des séries de Taylor au mouvement brownien, avec un aperçu sur le retour » de Jean-Pierre Kahane. Cependant ce dernier s'arrête aux années 1910. Dans son article, Walter Hayman n'évoque pas les questions des développements en série de fonctions. Il ne parle pas non plus de convergence de séries.

170. Cf. GAIER 1990, p. 363.

171. La troisième source identifiée par Gaier concerne la théorie classique du potentiel qui ne se trouve pas travaillée dans les thèses que j'ai classées dans le domaine de la théorie des fonctions.

### Les théorèmes de Picard et ses prolongements par Landau, Schottky, Nevanlinna et Montel

L'un des événements les plus marquants dans la théorie des fonctions de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle est l'énoncé par Émile Picard en 1879 et en 1880 de ses théorèmes sur le nombre de valeurs exceptionnelles d'une fonction entière et le nombre de valeurs exceptionnelles d'une fonction méromorphe ou analytique au voisinage d'un de ses points singuliers essentiels. En 1943, dans la notice nécrologique qu'il écrit pour Picard<sup>172</sup>, Jacques Hadamard présente ces théorèmes comme « la découverte de Picard qui a exercé la plus puissante influence sur le progrès de la Science mathématique dans ce dernier demi-siècle »<sup>173</sup>.

#### Les théorèmes de Picard et leurs conséquences directes sur l'évolution des recherches

Dans la première de ses notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* de 1879, « Sur une propriété des fonctions entières », PICARD 1879c, Émile Picard écrit ainsi qu'« il ne peut y avoir plus d'une valeur que ne soit susceptible de prendre pour une valeur finie de la variable une fonction entière », et il démontre qu'« une fonction [entière]  $G(z)$  qui ne deviendrait jamais égale ni à  $a$ , ni à  $b$ , serait nécessairement une constante. » Picard prolonge dans un premier temps son théorème dans une deuxième note, « Sur les fonctions entières », PICARD 1879b, où il démontre que pour une fonction entière, il ne peut y avoir plus d'une valeur finie  $a$  pour laquelle l'équation  $G(z) = a$  n'admet qu'un nombre limité de racines à moins que  $G(z)$  ne soit un polynôme. Il étend enfin ce résultat aux fonctions analytiques dans une troisième note « Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier uniforme », PICARD 1879a où il montre que pour une fonction analytique uniforme  $f(x)$ , au voisinage d'un point singulier essentiel  $A$ , si  $a$  est une constante quelconque, « il y a toujours une infinité de points pour lesquels  $f(x)$  prend *rigoureusement* la valeur  $a$ , une exception pouvant se produire seulement pour deux valeurs de  $a$  »<sup>174</sup>.

Les preuves initiales données par Émile Picard recourent à l'utilisation de fonctions modulaires. Comme l'écrit notamment Hadamard dans la notice nécrologique et comme le confirment divers ouvrages sur le sujet<sup>175</sup>, la recherche de démonstrations directes

172. qui paraît dans le *Journal of the London Mathematical Society*, 18 (1943), PICARD 1978, p. XVIII-XXXII.

173. C'est en des termes semblables qu'en rendent également compte Julia dans JULIA 1932, p. 105 et Paul Lévy dans LÉVY 1967, p. 176. Ces deux derniers précisent également l'apport que représentent ces derniers résultats par rapport à l'énoncé de Weierstrass selon lequel n'importe quelle fonction entière  $f(z)$  prend des valeurs arbitrairement voisines de n'importe quelle valeur donnée.

174. Le théorème énoncé par Émile Picard s'applique donc aux fonctions méromorphes au voisinage d'un point singulier essentiel qui n'est pas un pôle. On rappelle ici que le terme de fonction analytique au point  $z$  désigne une fonction dont le rapport  $\frac{\Delta f}{\Delta z}$  à une limite unique pour chaque point où la fonction  $f$  est définie, cf. GOURSAT 1918, p. 8.

175. Comme ALEXANDER 1994 ou HAYMAN 1994.

de ces théorèmes à partir de considérations d'analyse a alors directement suscité de nombreux travaux sur les fonctions analytiques à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle et dans la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle<sup>176</sup>. Ainsi, selon Dieter Gaier<sup>177</sup>, les théorèmes de Picard ont permis le développement et l'étude de plusieurs thèmes tels que :

- la construction de la théorie des fonctions entières et méromorphes,
- la répartition des valeurs et le comportement aux limites des fonctions analytiques dans  $\mathbb{C}$ ,
- la répartition des valeurs et le comportement à la frontière des fonctions analytiques dans  $\mathbb{D}$ ,
- les familles normales<sup>178</sup>.

Selon l'ensemble des ouvrages historiographiques consultés, ces derniers thèmes sont davantage travaillés en France qu'en l'Allemagne, surtout au début du XX<sup>ème</sup> siècle.

La recherche de démonstrations directes des théorèmes de Picard conduit parallèlement à l'étude générale des fonctions entières dont on cherche notamment à estimer la croissance. Hadamard introduit ainsi en 1893<sup>179</sup> le module maximum d'une fonction

$$M(r, f) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

pour définir l'ordre d'une fonction

$$\lambda = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r}$$

Il utilise ces notions pour prolonger les résultats de Weierstrass sur l'expression d'une fonction entière d'ordre  $\lambda$  sous la forme  $f(z) = e^{P(z)} z^a \prod_{\nu=1}^{\infty} E(\frac{z}{z_{\nu}}, q)$  où  $q = [\lambda]$ ,  $P$  est un polynôme de degré au plus  $q$  et  $E(z, q) = (1 - z) \exp \left( z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^q}{q} \right)$ . Il montre par ailleurs que cette expression est unique. Pour cela, il introduit le module minimum de la fonction

$$\mu(r, f) = \inf_{|z|=r} |f(z)|.$$

L'étude de ce module minimum et l'étude comparée de  $\mu(r, f)$  et de  $M(r, f)$  est l'occasion de nombreux travaux au début du XX<sup>ème</sup> siècle dont ceux de Wiman, de Littlewood et Valiron sur le comportement de  $\frac{\log \mu(r, f)}{\log M(r, f)}$  lorsque  $r$  tend vers l'infini<sup>180</sup>.

176. Ce sont certains de ces travaux qui sont cités dans quelques doctorats français de théorie des fonctions, ceux de Valiron, Milloux, Cartan, Rauch et Hiong. D'ailleurs dans le *Cours d'Analyse* de Goursat de 1918, tome II, GOURSAT 1918, p. 651-663, ce n'est pas la démonstration de Picard qui est présentée mais celle de Schottky de 1906 réalisée à partir de considérations d'analyse.

177. Cf. GAIER 1990, p. 364.

178. Le texte initial évoque les termes respectifs suivants : « Aufbau der Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen, Werteverteilung und Randverhalten analytischer Funktionen in  $\mathbb{C}$ , Werteverteilung und Randverhalten analytischer Funktionen in  $\mathbb{D}$ , normale Familien ».

179. D'après Walter Hayman, cf. HAYMAN 1994, p. 369.

180. D'après Walter Hayman. D'autres sujets d'études sur les fonctions entières font l'objet de publications comme les valeurs asymptotiques prises par une fonction le long d'un chemin, leur nombre, etc. Walther Hayman en évoque encore d'autres dans HAYMAN 1994, p. 372-373.

En parallèle, Poincaré établit une relation entre la croissance du module maximum  $M(r, f)$  d'une fonction entière et l'allure asymptotique des coefficients de Taylor du développement de la fonction entière<sup>181</sup>. Hadamard montre ensuite que la croissance de  $M(r, f)$  renseigne sur l'allure des modules des zéros de la fonction et donne pour  $M(r, f)$  une borne inférieure sur des cercles indéfiniment croissants.

Muni de ces nouvelles notions et partant des résultats établis par Hadamard et Poincaré<sup>182</sup>, Émile Borel, en 1897<sup>183</sup>, donne une démonstration directe des deux théorèmes de Picard sur les fonctions entières à partir de considérations sur la croissance de fonctions entières. Il donne alors une relation entre l'ordre de grandeur des fonctions entières et d'une part le nombre de ses zéros et d'autre part la croissance de  $M(r, f)$ . Il classe ensuite les fonctions selon leur croissance et selon leur ordre. Borel introduit également l'ordre *réel* d'une fonction entière comme un nombre réel  $\rho$  défini par la condition que la série  $\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho+\epsilon}}$  soit convergente et la série  $\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho-\epsilon}}$  soit divergente, quelque petit que soit le nombre positif  $\epsilon$  quand la suite  $a_n$  désigne les zéros de la fonction  $f$ <sup>184</sup>. Cette définition est distincte de la définition de l'ordre donnée précédemment par Hadamard et que Borel désigne sous le terme d'*ordre apparent*<sup>185</sup>. Elle est ensuite reprise par le milieu mathématique et notamment dans certains doctorats de théorie des fonctions<sup>186</sup>. Borel donne également d'autres relations, entre  $M(r, f)$  et le plus grand terme de la série de Taylor de la fonction par exemple<sup>187</sup>. Il fournit des méthodes et des principes pour l'étude des fonctions entières que reprendront et développeront ultérieurement d'autres mathématiciens comme Lindelöf, Boutroux ou Wiman<sup>188</sup>. La théorie des fonctions entières d'Hadamard et de Borel est développée à la fin du XIX<sup>ème</sup> et au début du XX<sup>ème</sup> siècle dans de nombreux travaux<sup>189</sup>. Certains mathématiciens comme Lindelöf, Blumenthal, Denjoy, Maillet, Littlewood ... étudient les fonctions d'ordre entier, d'ordre infini, d'ordre nul et précisent les relations entre la

181. Selon JULIA 1932, p. 105. Gaston Julia évoque également la relation entre  $M(r, f)$  et le *genre* de la fonction  $f$ . Comme la notion de *genre* d'une fonction n'est pas utilisée dans les doctorats français de l'entre-deux-guerres, je ne la reprends pas ici. Plus généralement, je n'approfondis ou n'explique pas systématiquement les sujets qui ne sont pas abordés dans les thèses. Je ne questionne pas les absences. Répondre à ces questions nécessiterait en effet une autre enquête historiographique que je n'ai pas faite.

182. Comme Borel le revendique lui-même, BOREL 1897, p. 359.

183. Dans *Sur les zéros des fonctions entières*, BOREL 1897.

184. Cf. BOREL 1897, p. 359-360 et p.396.

185. Dans BOREL 1897, Borel montre cependant que les deux ordres coïncident quand l'ordre apparent n'est pas un entier.

186. Cette notion joue un rôle important dans plusieurs mémoires de doctorat dont au moins ceux de Valiron, Milloux et surtout Rauch.

187. Si le développement en série de Taylor de la fonction entière  $f$  s'écrit  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ , le « plus grand terme » pour un complexe de module  $r$  désigne le maximum de la suite  $|c_n| r^n$ .

188. Cf. JULIA 1932, p. 106.

189. Cf. JULIA 1932, p. 116.

croissance et la densité des zéros<sup>190</sup>. L'étude du comportement d'une fonction entière au voisinage de l'infini commence également par être abordée au début du XX<sup>ème</sup> siècle par Lindelöf et ses étudiants.

**Les théorèmes de Landau et de Schottky** La recherche de nouvelles démonstrations directes et de généralisations des théorèmes de Picard continue parallèlement à ces travaux sur les fonctions entières. Elle concerne alors les fonctions holomorphes et méromorphes définies dans  $\mathbb{C}$  ou dans  $\mathbb{D}$ . En 1904, Landau puis Schottky<sup>191</sup>, ce dernier généralisant le résultat de Landau<sup>192</sup>, apportent des précisions quantitatives aux théorèmes de Picard. Celui de Landau qui concerne les fonctions holomorphes définies dans le cercle de rayon quelconque précise les premiers théorèmes de Picard sur les fonctions entières. De celui de Schottky, qui concerne uniquement les fonctions holomorphes sur le cercle unité, on peut déduire le troisième théorème sur le voisinage des singularités essentielles d'une fonction<sup>193</sup>.

Le théorème de Landau s'énonce sous la forme suivante<sup>194</sup> :

**Théorème de Landau (1904).** *Soit une fonction  $f(z) = a_0 + a_1z + \dots$  holomorphe dans  $\mathbb{D}$  et  $a_0 \neq 0$ ,  $a_1 \neq 1$ , alors on a*

$$|a_1| \leq H(a_0),$$

où  $H$  ne dépend que de  $a_0$ .

Il se généralise directement au cas des fonctions holomorphes dans un cercle de rayon  $R$ <sup>195</sup>. Si la fonction  $f$  admet le même développement que précédemment, on obtient alors l'inégalité suivante :  $R \leq \frac{H(a_0)}{a_1}$ . Et le théorème de Picard sur les fonctions entières s'en déduit directement.

Le théorème de Schottky, « décisif »<sup>196</sup> pour démontrer le troisième théorème de Picard<sup>197</sup>, s'énonce ainsi<sup>198</sup> :

**Théorème de Schottky (1904).** *Soit une fonction  $f(z) = a_0 + a_1z + \dots$  holomorphe dans  $\mathbb{D}$  et  $a_0 \neq 0$ ,  $a_1 \neq 1$ , alors on a*

190. La croissance des fonctions désigne comme précédemment la croissance du module maximum  $M(r, f)$  de la fonction. Pour évaluer la densité des zéros de la fonction entière, on étudie la fonction  $n(r, f)$  qui dénombre le nombre de zéros de la fonction dont le module est inférieur au réel positif  $r$ .

191. Respectivement Landau, E., « Über eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes », *S.B. Preuss. Akad. Wiss.* (1904) 1118-1133, et Schottky, F., « Über den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen », *S.B. Preuss. Akad. Wiss.* (1904) 1244-1263.

192. Selon Reinhard Remmert dans REMMERT 1998, p. 240.

193. Pour voir comment le troisième théorème de Picard se déduit du théorème de Schottky, on peut consulter l'ouvrage de Lars Gårding GÅRDING 1997, p. 6-7.

194. Cf. GAIER 1990, p. 401.

195. Cf. Dieter Gaier, GAIER 1990, p. 401.

196. Selon Dieter Gaier, GAIER 1990, p. 401.

197. Désigné parfois comme le « grand théorème de Picard » par opposition au « petit théorème de Picard » qui concerne les fonctions entières. On le trouve ainsi désigné dans GAIER 1990; HAYMAN 1994 et dans des mémoires de doctorat (par exemple ceux de Valiron, de Milloux).

198. Cf. GAIER 1990, p. 401.

$$|f(z)| \leq M(a_0, r), \text{ pour } |z| \leq r \leq 1,$$

où  $M$  ne dépend que de  $a_0$  et de  $r$ .

Parallèlement, Carathéodory, relevant le rôle de la fonction modulaire, précise notamment la fonction  $H$  qui intervient dans le théorème de Landau et donne des inégalités précises sur le rayon du cercle d'holomorphie ou sur le maximum du module<sup>199</sup>. Carathéodory en 1912, comme ensuite Ostrowski en 1926 ou Landau en 1929, renforceront quantitativement le « grand » théorème de Picard en apportant notamment des précisions sur les bornes d'une fonction holomorphe dans le cercle unité et prenant des valeurs différentes de zéro et de 1.

Les théorèmes de Landau et de Schottky évoqués précédemment peuvent également être considérés comme des théorèmes de recouvrement de certains disques si on recherche les meilleurs limites aux valeurs bornant le module de la fonction  $f$ <sup>200</sup>. André Bloch en 1926 démontre un autre théorème de recouvrement sur les fonctions définies dans le cercle unité  $D$  et dont le développement en série de Taylor commence par  $f(z) = z + \dots$  : de telles fonctions régulières dans  $D$  recouvrent uniformément un sous-domaine de  $D$  sur un disque de rayon  $B$ . En 1938, Ahlfors donne une minoration de cette borne du module de la fonction<sup>201</sup>.

**La théorie de Nevanlinna pour les fonctions méromorphes** Les théorèmes de Picard sont évoqués dans certains ouvrages historiographiques (par exemple HAYMAN 1994 ou GAIER 1990) comme à l'origine d'une tendance de la recherche en analyse complexe qui a trouvé son aboutissement dans la théorie des fonctions méromorphes élaborée par Rolf Nevanlinna en 1925. Selon ces deux auteurs, cette théorie étend l'ensemble des résultats obtenus antérieurement sur les fonctions entières<sup>202</sup>. Selon

199. Cf. JULIA 1932, p. 117 et GAIER 1990, p. 401.

200. Cf. HAYMAN 1994, p. 379.

201. Il convient de faire ici un bref résumé biographique sur André Bloch. Ce résumé sort du contexte du bilan historiographique mais il est d'importance. En effet, André Bloch, contrairement aux autres mathématiciens cités dans toute cette partie, n'occupe aucune chaire dans une faculté de Sciences. Déclaré irresponsable après le meurtre de son frère, de son oncle et de sa tante en 1917, il est interné à l'hôpital psychiatrique de Saint-Maurice jusqu'en 1948, date de sa mort. C'est en ce lieu qu'il écrit plusieurs mémoires sur les fonctions holomorphes ou méromorphes ou en géométrie ainsi que et de nombreux articles sur des sujets divers tels que la théorie des fonctions, la théorie des nombres, la géométrie, les équations algébriques, la cinématique, CARTAN et FERRAND 1988, p. 2. (On trouve également mention de l'histoire de ce mathématicien notamment dans MAZ'YA et SHAPOSHNIKOVA 2005).

202. C'est en ces termes que l'écrit Walter Hayman, reprenant à son compte des propos tenus par Hermann Weyl en 1943. Ce dernier qualifiait la publication de Nevanlinna de 1925 comme « l'un des rares événements mathématiques importants de notre siècle ». (Cf. HAYMAN 1994, p. 374 : « Rolf Nevanlinna achieved a precision and beauty in his (1925) paper which led Hermann Weyl to call it (1943) « One of the few great mathematical events of our century ». »). C'est aussi comme cela que le présente Lars Gårding dans GÅRDING 1997, p. 23 : il y affirme que la théorie de Nevanlinna a été inspirée par les théorèmes de Picard et qu'elle les contient en tant que cas particulier. La publication de Nevanlinna à laquelle se réfèrent Hayman, Weyl ou Garding est la suivante : Nevanlinna, R., *Zur Theorie der meromorphen Funktionen*, 1925, Acta Mathematica, NEVANLINNA 1925. Reinhold

Dieter Gaier, le but de Nevanlinna est de relier au moyen de formules des propriétés de croissance des fonctions méromorphes avec certaines caractéristiques de la distribution des valeurs dans  $\mathbb{C}$  de ces fonctions. Il s'agit également de « déterminer la densité des racines de l'équation  $f(x) = z$  où  $z$  désigne un nombre quelconque fini ou infini et de comparer entre elles les distributions des racines pour diverses valeurs de  $z$  »<sup>203</sup>.

Pour élaborer sa théorie, Rolf Nevanlinna part de la formule de la moyenne de Jensen (1899) pour les fonctions méromorphes qui donne une relation entre le nombre de zéros et le nombre de pôles de la fonction  $f$  à l'intérieur d'un disque  $\mathcal{C} : |z| \leq r$  et la valeur moyenne de  $\log |f|$  sur le cercle frontière quand la fonction  $f$  admet  $a_1, \dots, a_n \neq 0$  comme zéros de module  $\neq r$  et  $b_1, \dots, b_m$  comme pôles à l'intérieur de  $\mathcal{C}$ <sup>204</sup> :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| + \log \frac{r^n}{|a_1 \dots a_n|} - \log \frac{r^m}{|b_1 \dots b_m|}$$

La nouveauté importante de la théorie de Nevanlinna consiste à introduire une nouvelle fonction  $T(r, f)$ , appelée *fonction caractéristique* qui caractérise la croissance pour les fonctions méromorphes dans un disque ou au voisinage de l'infini. Elle se définit à partir de deux termes  $m(r, f)$  et  $N(r, f)$  :

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$$

où, si on désigne par  $\log^+$  la part positive du logarithme comme Nevanlinna dans NEVANLINNA 1929<sup>205</sup>,  $m(r, f)$  désigne la valeur moyenne de la part positive de  $\log f$  sur le cercle  $|z| = r$  :

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

On pose également pour tout complexe  $a \in \mathbb{C}$ <sup>206</sup> :

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\theta}) - a} \right| d\theta$$

Le deuxième terme,  $N(r, f)$  est lié au nombre de fois que la fonction  $f$  atteint l'infini dans le cercle de rayon  $r$ . Si  $n(r, a)$  désigne le nombre des racines comprises dans le cercle  $|z| \leq r$  de l'équation  $f(z) = a$  ( $a$  pouvant valoir  $\infty$ ), chaque racine étant comptée autant de fois que son ordre l'indique :

---

Remmert, quant à lui, n'évoque pas la théorie de Nevanlinna dans son ouvrage REMMERT 1998, cette théorie n'étant pas reprise dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes.

203. Cf. NEVANLINNA 1929, p. 6. La citation à laquelle je me réfère ici, NEVANLINNA 1929, n'est pas la publication originale de Nevanlinna. En 1929, ce dernier a fait de son article paru initialement dans les *Acta Mathematica* un ouvrage publié en France dans la *Collection de Monographies sur la théorie des fonctions* d'Émile Borel, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*. Dans la préface que Rolf Nevanlinna écrit pour cet ouvrage, il situe son travail comme un prolongement des questions se rattachant aux théorèmes de Picard, déjà abordées par Hadamard et par Borel en 1896.

204. Cf. HAYMAN 1994, p. 374 et GÅRDING 1997, p. 24.

205. Ou Lars Gårding dans GÅRDING 1997, p. 25.

206. La formule précédente correspond au cas où  $a = \infty$ .

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} dt + n(0, \infty) \log r.$$

Et on pose pour tout complexe  $a \in \mathbb{C}$  <sup>207</sup> :

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \log r.$$

Dans la théorie élaborée par Nevanlinna, ce dernier montre que la fonction  $T(r, f)$  est croissante en  $r$  et énonce surtout deux théorèmes principaux qui permettront d'étendre, en particulier, les résultats précédemment établis pour les fonctions entières <sup>208</sup>.

Si on pose pour  $a \in \mathbb{C}$ ,  $T(r, a, f) = m(r, a, f) + N(r, a, f)$ , alors le premier théorème s'énonce sous la forme :

**Théorème 1** : *La fonction  $f(x)$  étant méromorphe et ne se réduisant pas à une constante, il existe une fonction croissante et convexe de  $\log(r)$ ,  $T(r, f)$ , telle qu'on ait pour toute valeur donnée (finie ou infinie) de  $a$  :*

$$m(r, a, f) + N(r, a) = T(r, f) + h(r, a),$$

où  $h$  représente une fonction de  $r$  restant bornée lorsque  $r$  tend vers l'infini.

Ce théorème caractérise donc l'invariance, à un terme borné près, de la somme  $m(r, a, f) + N(r, a, f)$ . En outre, le terme  $m(r, a, f)$  étant en général assez petit, ce théorème donne une limite supérieure au terme  $N(r, a, f)$  <sup>209</sup>.

Le deuxième théorème de Nevanlinna, considéré comme central par Dieter Gaier, donne des propriétés asymptotiques des expressions  $m(r, a, f)$  et  $N(r, a, f)$ . Il permet également d'obtenir une estimation du nombre de cas où  $N(r, a, f)$  n'approche pas sa limite supérieure  $T(r, f)$ . Cette estimation passe par l'étude du « défaut de la valeur  $a$  » <sup>210</sup> qui est mesuré par la fonction  $\delta(a, f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)} = 1 - \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)}$  et par la fonction  $\theta(a, f) = 1 - \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}(r, a, f)}{T(r, f)}$  où dans l'expression donnant  $\overline{N}(r, a, f)$  ne sont comptés qu'une seule fois les zéros multiples <sup>211</sup>.

Le second théorème fondamental de Nevanlinna conduit alors à la relation suivante pour tous complexes deux à deux distincts,  $a_1, a_1, \dots, a_q$  :

$$\sum_{p=1}^q \theta(a_p, f) \leq 2.$$

Et c'est de cette relation que se déduit le troisième théorème de Picard sur le nombre de valeurs exceptionnelles que peuvent prendre des fonctions analytiques au

207. La formule précédente correspond au cas où  $a = \infty$ .

208. Ce sont d'ailleurs ces théorèmes qui sont repris dans les ouvrages de Garding et de Dieter Gaier, les deux seuls qui évoquent précisément cette théorie.

209. Cf. HAYMAN 1994, p. 375.

210. Cf. NEVANLINNA 1929, p. 80.

211. Cf. HAYMAN 1994, p. 375 et GÅRDING 1997, p. 26.



voisinage d'un point singulier essentiel<sup>212</sup>. Les travaux de Nevanlinna sont ensuite repris par de nombreux mathématiciens, comme Gaston Julia, George Pólya, Georges Valiron, André Bloch, Henri Milloux ainsi que par Henri Cartan et Lars Ahlfors<sup>213</sup>. Une des étapes suivantes de cette théorie est celle des travaux de Lars Ahlfors. Ce dernier en 1935 donne une interprétation topologique à la fonction de croissance introduite par Nevanlinna. Il prouve alors les deux théorèmes fondamentaux de Nevanlinna par des méthodes topologiques comme celle de la projection stéréographique<sup>214</sup>. Il étend également la théorie de Nevanlinna à certains résultats de recouvrement de surfaces de Riemann<sup>215</sup>.

**Les familles normales et Paul Montel** Selon les ouvrages consultés, les familles normales introduites par Paul Montel sont souvent présentées comme une théorie parallèle aux travaux qui font suite aux théorèmes de Picard et qui ne constitue donc pas un approfondissement des questions relatives à ces théorèmes. Les deux théories ne concernent cependant pas deux champs disjoints des mathématiques. En effet, La théorie des familles normales permet d'apporter une preuve directe aux théorèmes de Picard et englobe le théorème de Schottky de 1904<sup>216</sup>.

Une « famille normale de fonctions » est une famille  $(\mathcal{F})$  formée de fonctions holomorphes dans un domaine  $D$  et possédant la propriété suivante : de toute suite infinie

---

212. Jacques Hadamard décrit d'ailleurs l'apport de la théorie de Nevanlinna aux théorèmes de Picard, qu'il désigne sous le terme de « théorèmes du défaut », dans la notice nécrologique d'Émile Picard, publiée dans le *Journal of the London Mathematical Society* 18 (1943), cf. PICARD 1978, p. XXXI-XXXII :

« Le principe essentiel de cette puissante extension des idées de Picard consiste à envisager non seulement des fonctions entières, mais aussi des fonctions méromorphes, de sorte que la valeur  $\infty$  pour la fonction est admise aussi bien que n'importe quelle autre. Si l'on compare la manière dont la fonction se comporte vis-à-vis de n'importe laquelle de ces valeurs possibles, une curieuse compensation apparaît entre la tendance de la fonction à acquérir exactement cette valeur  $a$  – le nombre de solutions de l'équation  $f(z) = a$  dans le cercle de rayon  $R$  et la tendance à approcher de cette valeur le long de la circonférence de ce cercle, de sorte qu'une certaine quantité  $T(R)$ , somme de deux termes dépendant respectivement de ces deux tendances, sera asymptotiquement indépendante de  $a$ . En second lieu se pose la question de savoir lequel de ces deux termes prévaudra. En général, ils seront en gros du même ordre ; mais le contraire peut avoir lieu pour certaines valeurs exceptionnelles de  $a$ , cette circonstance étant caractérisée par un certain nombre le « défaut » correspondant à  $a$  (pour  $a$  non exceptionnel, ce défaut est nul). Pendant que les valeurs exceptionnelles au sens primitif de Picard sont en nombre au plus égal à 2 (en comptant la valeur  $a = \infty$  qui ne figure pas explicitement dans l'énoncé de Picard), les valeurs exceptionnelles au nouveau point de vue peuvent être plus nombreuses, mais la somme des défauts ne peut pas être plus grande que 2, et ceci comprend le résultat de Picard comme cas particulier. »

213. Cf. Paul Lévy dans LÉVY 1967, p. 181 et Gaston Julia dans JULIA 1932, p. 121. Paul Lévy y évoque également les travaux de Nevanlinna comme « voisins » de ceux de Picard.

214. Selon Lars Gårding, cf. GÅRDING 1997, p. 23 et p.27.

215. Cf. HAYMAN 1994, p. 376.

216. Cf. ALEXANDER 1994, p. 107 ou LÉVY 1967, p. 180. Précisons que c'est en 1912, que Montel introduit le terme de « famille normale », cf. GAIER 1990, p. 373.

formée de fonctions de  $(\mathcal{F})$ , on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément, dans l'intérieur de  $D$  vers une fonction finie ou vers l'infini<sup>217</sup>. Dès sa thèse de doctorat en 1907<sup>218</sup>, Paul Montel a montré qu'un ensemble de fonctions holomorphes, uniformément bornées dans un domaine  $G$  forme une famille normale. Le principal critère qu'il énonce pour qu'une famille soit normale date de 1912 : il montre qu'un ensemble de fonctions holomorphes dans un domaine  $D$  qui y admettent deux valeurs exceptionnelles forme une famille normale<sup>219</sup>. Il étend ensuite ce résultat aux fonctions méromorphes dans un domaine  $D$  qui y admettent 3 valeurs exceptionnelles<sup>220</sup>. Il continue par la suite à travailler sur les familles normales en énonçant par exemple de nouveaux critères, et cela pendant toute une partie de l'entre-deux-guerres. Paul Montel met notamment en évidence le rôle de *points irréguliers* où des familles de fonctions ne sont pas normales<sup>221</sup>. L'importance de ces points apparaît aussitôt dans les travaux de Fatou et de Julia sur l'itération des fractions rationnelles<sup>222</sup>. Les travaux de Montel sont ensuite retravaillés par d'autres mathématiciens comme Ostrowski ou Henri Milloux<sup>223</sup>. Paul Montel continue par ailleurs à étudier le sujet des points irréguliers et applique ses résultats au théorème d'existence des *droites* de Julia<sup>224</sup>. En 1927, il publie une monographie reprenant l'essentiel de sa théorie et des résultats qu'on peut déduire de la théorie des familles normales<sup>225</sup>.

Dieter Gaier, Reinhold Remmert et Gaston Julia situent les travaux de Montel comme une suite et un approfondissement d'autres résultats comme ceux de Vitali portant également sur l'étude de la convergence uniforme de suites de fonctions holomorphes dans un domaine  $D$  vérifiant certaines conditions. Paul Lévy ne les évoque cependant pas et il en est de même dans les mémoires français de doctorats soute-

217. Cf. MONTEL 1912, p. 492-493.

218. Montel, Paul, 1907, *Sur une suite infinie de fonctions*.

219. C'est ainsi que présentent et qualifient ce théorème Dieter Gaier dans GAIER 1990, p. 373 et Lévy dans LÉVY 1967, p. 180.

220. Cf. LÉVY 1967, p. 180 et GAIER 1990, p. 374. Ce sont notamment à partir de ces deux critères qu'on peut déduire le « grand théorème de Picard » (le troisième).

221. Selon Paul Lévy, cf. LÉVY 1967, p. 180.

222. On pourra également consulter l'ouvrage de Daniel Alexander, ALEXANDER 1994 à ce sujet. Julia dans JULIA 1932, p. 121 parle quant à lui de « points singuliers » de famille de fonctions et il attribue la paternité de cette tendance de recherche à ses travaux sur les points singuliers de l'itération de fractions rationnelles : il les étend ensuite aux familles de fonctions méromorphes et d'autres mathématiciens tels Ostrowski, Valiron, Milloux, Pólya, continuent à les appliquer à des familles de fonctions entières ou méromorphes.

223. Toujours selon Paul Lévy. Henri Milloux soutient par ailleurs une thèse en théorie des fonctions de la variable complexe en 1924 sur un sujet connexe, la particularité du mémoire est d'ailleurs comme je l'indiquerai ultérieurement de travailler un sujet sur des directions particulières de fonctions analytiques sans avoir recours à la théorie des familles normales de Montel.

224. Pour une fonction entière qui ne se réduit pas à un polynôme, une droite de Julia est une droite contenant une demi-droite telle que dans tout angle qui la contienne la fonction  $f(z)$  prenne une infinité de fois toutes les valeurs non exceptionnelles.

225. Cette publication est signalée par plusieurs textes historiographiques, REMMERT 1998, p. 153-155 ou GAIER 1990.

nus pendant l'entre-deux-guerres qui utilisent cette notion<sup>226</sup>. Carathéodory, Landau ou Ostrowski travailleront sur des sujets relatifs à des familles de fonctions en même temps que Montel<sup>227</sup>.

Montel a également participé à d'autres travaux notamment sur les fonctions univalentes<sup>228</sup>, sur lesquels publie également André Bloch<sup>229</sup>, ou sur les fonctions  $p$ -valentes, qu'étudie aussi Georges Valiron<sup>230</sup>. La contribution de Montel à ces travaux n'est évoquée que dans l'article de Paul Lévy. Dieter Gaier voit la théorie des fonctions univalentes et  $p$ -valentes comme une suite du théorème de représentation conforme de Riemann. Lorsqu'il traite de l'évolution de cette théorie, le nom de Montel n'apparaît pas.

### Représentation conforme et surfaces de Riemann

La deuxième source des travaux en théorie des fonctions de la variable complexe à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle et au début du XX<sup>ème</sup> siècle, identifiée par Dieter Gaier, est le théorème de représentation conforme de Riemann de 1851<sup>231</sup> :

*Soit  $G$  un domaine simplement connexe inclus mais non égal au plan complexe et un point  $z_0$  de  $G$ , il existe une unique fonction régulière dans  $G$  telle que  $f(z_0) = 0$  et  $f'(z_0) > 0$  représentant conformément le domaine  $G$  sur le cercle unité  $\mathbb{D}$ .*

Selon Dieter Gaier, ce théorème est à l'origine de plusieurs thèmes utilisant une approche « géométrique » de la théorie des fonctions<sup>232</sup> :

---

226. Reinhold Remmert affirme toutefois qu'en 1907, Paul Montel ne connaît pas le théorème de Vitali qui date de 1903 et qui affirme qu'une suite de fonctions holomorphe dans un domaine  $G$ , uniformément bornée, converge uniformément dans les domaines compacts de  $G$  si la convergence a lieu pour au moins un ensemble de points de  $G$  admettant un point d'accumulation dans  $G$ , GAIER 1990, p. 373 et REMMERT 1998, p. 156-158.

227. Cf. GAIER 1990, p. 373-374.

228. Fonctions qui ne prennent jamais deux fois la même valeur sur un certain domaine.

229. Il démontre notamment que pour des fonctions holomorphes vérifiant une certaine condition, il existe un domaine où elles sont univalentes, LÉVY 1967, p. 181.

230. La définition de fonction  $p$ -valente que donne Paul Montel est la suivante, telle qu'elle est reprise par Dieudonné dans sa thèse DIEUDONNÉ 1931a, p. 338 : « une fonction analytique  $f(z)$  est  $p$ -valente dans un domaine  $(D)$  du plan des  $z$  lorsque, quelque soit la valeur  $a$ , l'équation

$$(I) \quad f(z) - a$$

a au plus  $p$  racines dans le domaine  $(D)$  et qu'il existe une valeur de  $a$  au moins pour laquelle l'équation (I) a exactement  $p$  racines intérieures à  $(D)$  (les racines étant comptées avec leur ordre de multiplicité) ; on dit encore que  $p$  est l'ordre de multivalence de la fonction dans  $(D)$ . En particulier  $f(z)$  est univalente dans  $(D)$  si elle y prend une fois au plus toute valeur. »

231. Cf. GAIER 1990, p. 363 et HAYMAN 1994, p. 377. Il faut souligner que Paul Lévy dans LÉVY 1967 et Walter Hayman dans HAYMAN 1994 n'évoquent que très brièvement, voire pas du tout, des travaux ou des résultats portant sur la théorie de la représentation conforme ou sur la théorie des surfaces de Riemann.

232. GAIER 1990, p. 364.

- le comportement à la frontière de la représentation conforme, domaines variables,
- la représentation conforme de domaines à connexion multiple,
- les surfaces de Riemann,
- la théorie de l'uniformisation,
- la représentation quasi-conforme,
- la théorie des fonctions univalentes<sup>233</sup>.

Ces différents thèmes sont d'ailleurs repris en partie dans certains doctorats français de l'entre-deux-guerres, comme je le montrerai plus loin.

La recherche de preuves rigoureuses du théorème de représentation conforme de Riemann a duré près de cinquante ans après son énoncé en 1851. Selon Hayman et Gaier, Osgood, en 1900, est le premier à en avoir donné une preuve rigoureuse, fondée sur la fonction de Riemann et sur les suites monotones de fonctions harmoniques. La recherche de nouvelles preuves de ce théorème a également continué au cours du XX<sup>ème</sup> siècle : y contribuent principalement Koebe et Caratheodory (1912), dont le travail conjoint aboutit à une preuve constructive énoncée par Koebe n'utilisant que des notions et des outils de théorie des fonctions<sup>234</sup> ; Radó en 1923 et Fejér et Riesz pendant l'entre-deux-guerres, qui dans leur démonstration utilisent les familles normales de Paul Montel. Cette dernière démonstration est reprise ensuite par Ostrowski et puis de nouveau par Carathéodory<sup>235</sup>. Parallèlement à cet effort, au début du XX<sup>ème</sup> siècle, Koebe et Henri Poincaré démontrent indépendamment l'un de l'autre un théorème de représentation conforme semblable mais pour les surfaces de Riemann simplement connectées.

Gaier et Hayman mentionnent ensuite l'étude émergente des fonctions univalentes vers laquelle dirigent des problèmes de représentation conforme. Les travaux de Bieberbach y sont présentés comme centraux. Ce dernier introduit une classe de fonctions régulières sur  $\mathbb{D}$  qui y sont univalentes et dont le développement en série de Taylor s'écrit sous la forme :

$$(\mathcal{S}) \quad f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

Plusieurs de ses résultats portent sur les coefficients de ce développement, sur l'image de  $\mathbb{D}$  par  $f$  et sur le recouvrement par cette image d'un disque  $|w| < 1/4$ <sup>236</sup>.

---

233. Le terme allemand utilisé par Dieter Gaier étant « *schlichte Funktionen* », je l'ai traduit par « fonctions univalentes ».

234. La fonction de représentation conforme est alors obtenue par un processus itératif de résolution d'équations du premier et du second degré, REMMERT 1998, p. 184.

235. Cf. REMMERT 1998, p. 184-186.

236. HAYMAN 1994, p. 377-378. On peut noter qu'aucun nom français n'est évoqué parmi les mathématiciens ayant contribué à la théorie des fonctions univalentes alors que, comme le mentionne Paul Lévy dans LÉVY 1967 et comme je l'ai rappelé ci-dessus, Paul Montel s'est intéressé à ce domaine de recherche.

L'uniformisation de fonctions multiformes, question au coeur d'un des vingt problèmes énoncés par Hilbert au Congrès des Mathématiciens de Paris en 1900, est décrite comme l'une des théories développées à la suite des travaux de Riemann<sup>237</sup>. Il s'agit de trouver une représentation uniforme analytique des fonctions, l'uniformisation géométrique étant réalisée par la surface de Riemann de la fonction<sup>238</sup>.

Selon Gaston Julia<sup>239</sup>, Poincaré réalise l'uniformisation des fonctions algébriques d'une variable. Il donne une représentation conforme sur un polygone plan de la surface de Riemann de ces fonctions. Puis, en 1907, il uniformise l'ensemble des fonctions analytiques à partir d'un raisonnement sur les surfaces de Riemann à une infinité de feuillet. Dieter Gaier mentionne le succès parallèle et simultané de Koebe dans l'obtention de ce résultat<sup>240</sup>. Il cite également les contributions ultérieures d'autres mathématiciens tels Weyl, Ahlfors, Nevanlinna et Heins, etc. Il insiste en particulier sur le rôle de Koebe et de ses différents résultats dans le développement de la théorie riemannienne des fonctions. Gaier cite notamment le principe général d'uniformisation des surfaces de Riemann à simple composante connexe et la représentation conforme de ces surfaces sur des bandes parallèles du plan énoncés par Koebe<sup>241</sup>. Selon Gaier, Koebe joue également un rôle essentiel dans la résolution des problèmes de représentation conforme des domaines multiplement connexe avec la collaboration de son élève Grötsch pendant l'entre-deux-guerres<sup>242</sup>.

Selon Gaston Julia, les résultats établis par Poincaré<sup>243</sup> ont été à l'origine de problèmes de topologie sur les surfaces de Riemann générales et sur leurs diverses surfaces de recouvrement, sur les surfaces de Riemann du type parabolique ou hyperbolique, sur l'étude des fonctions inverses des fonctions méromorphes, divers sujets auxquels a notamment contribué Caratheodory ainsi que Julia lui-même<sup>244</sup>. Les travaux de Poincaré ont également conduit à de nombreuses recherches sur des problèmes de représentation conforme. Julia conclut alors que la première moitié de l'entre-deux-guerres se caractérise par une utilisation de plus en plus grande des surfaces de Riemann comme

237. Cf. GAIER 1990, p. 370.

238. Cf. GAIER 1990, p. 371. Selon Gaier, si on décrit une fonction analytique au sens de Weierstrass par son développement de Taylor au voisinage d'un point  $z_0$  de  $\mathbb{C}$  dans son disque d'existence :  $w = f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ , on peut représenter la fonction correspondante par un ensemble de point  $(z, w)$  ainsi décrit que l'on peut représenter sur une surface de Riemann  $S$ . À chaque point  $P$  de la surface  $S$  correspond un unique couple particulier  $(z, w)$  tel que  $z = z(P)$  et  $w = w(P)$ . La surface de Riemann permet ainsi de représenter uniformément la fonction analytique grâce à une uniformisation géométrique.

239. Cf. JULIA 1932, p. 106.

240. Et il cite également le travail de Poincaré, GAIER 1990, p. 371.

241. Gaier décrit les surfaces de Riemann en utilisant l'adjectif « *schlichtartig* » que j'ai essayé de traduire ici par « à simple composante connexe ».

242. Cf. GAIER 1990, p. 374-379.

243. Suivant ce qu'affirme Dieter Gaier, on peut penser qu'il en est de même de ceux de Koebe.

244. Ce dernier évoque ses propres travaux sur la fonction inverse d'une fonction méromorphe et leur domaine d'existence respectif, sur la représentation conforme des aires multiplement connexes, JULIA 1932, p. 122.

méthode de découverte ou d'unification, méthode que l'on voit dans divers travaux de Bloch, Speiser, Nevanlinna ou Ahlfors<sup>245</sup>.

Les ouvrages sur lesquels je me suis fondée pour réaliser ce bilan historiographique distinguent donc, parmi les sujets de théorie des fonctions de la variable complexe que je retiens, deux grandes tendances parallèles. La première est initiée par les théorèmes de Picard. Elle engendre des résultats quantitatifs sur les fonctions analytiques (entières, holomorphes, méromorphes) avec l'étude de propriétés de croissance, d'ordre des fonctions et l'analyse de questions relatives à la distribution des valeurs prises par la fonction analytique. La seconde a pour origine le théorème de représentation conforme de Riemann. Elle engendre des problèmes de nature qualitative et géométrique en théorie des fonctions. Il s'agit de questions de représentation conforme de domaines, d'univalence de fonctions, de surfaces de Riemann, de problèmes d'uniformisation, etc.

Parallèlement à ces tendances de recherche qui sont, nous le verrons, celles que je retrouve dans les thèses françaises de théorie des fonctions de la variable complexe de l'entre-deux-guerres, d'autres sujets, non repris dans les thèses, sont étudiés en France comme à l'étranger. Il n'y a pas lieu ici d'en faire un résumé exhaustif. Il s'agit par exemple des fonctions quasi-analytiques de Borel, qui sont reprises par Carleman, Denjoy et Mandelbrojt<sup>246</sup>, de problèmes d'approximation de fonctions complexes, etc. ; la recherche de solutions analytiques, méromorphes à des équations différentielles ordinaires, les équations fonctionnelles en lien avec l'itération de fonctions méromorphes<sup>247</sup> sont également étudiées.

Dans une autre perspective de recherche, Paul Lévy signale également les théorèmes de Maurice Fréchet sur la décomposition d'une fonction analytique uniforme en termes plus simples<sup>248</sup>, qui seront, nous le verrons, retravaillées dans une seule thèse, celle de N. Aronszajn<sup>249</sup>.

Le domaine de la théorie de la fonction de la variable complexe a donc fait l'objet de nombreux travaux français comme étrangers depuis la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle. Cette caractéristique se retrouve dans les ouvrages historiographiques cités précédemment et dans les témoignages des différents acteurs, mathématiciens comme étudiants, de la période de l'entre-deux-guerres. En 1937, Arnaud Denjoy décrit d'ailleurs ce domaine

---

245. Julia prévoit d'ailleurs en 1932, dans cette conférence générale au Congrès International des Mathématiciens de Toronto, que « l'étude approfondie de classes de plus en plus nombreuses de surfaces de Riemann douées de propriétés géométriques intéressantes [sera] une source de progrès futurs pour la théorie des fonctions », JULIA 1932, p. 123.

246. Cf. LÉVY 1967, p. 182. D'après Lévy, cette étude a été commencée par Hadamard.

247. Dieter Gaier, comme Gaston Julia les évoquent, cf. respectivement GAIER 1990, p. 405-407 et JULIA 1932, p. 122.

248. Cf. LÉVY 1967, p. 182.

249. *Sur les décompositions des fonctions analytiques uniformes et sur leurs applications*, 1935.

comme l'un des « Chapitres des Mathématiques où les efforts de la recherche se sont portés avec le plus d'intensité depuis 20 ans » à l'occasion d'une séance exceptionnelle organisée par le Bureau de la Société mathématique de France <sup>250</sup>.

Le domaine de la théorie des fonctions de la variable complexe n'est donc pas un domaine qui est uniquement travaillé en France pendant l'entre-deux-guerres. En reliant les différents résultats mathématiques que j'ai évoqués lors de ce bilan historiographique, on perçoit comment les travaux sur le sujet interfèrent. Le bilan historiographique ci-dessus va à l'encontre d'une image des mathématiques françaises de l'époque en autarcie et qui ne connaîtrait pas les publications étrangères. Le sujet de la théorie des fonctions de la variable complexe, décrit comme un sujet « français » est traversé de références internationales. De plus, ce domaine semble être encore un domaine d'excellence des mathématiques françaises de l'époque. De nombreux mathématiciens étrangers, bénéficiant d'une bourse Rockefeller, viennent en effet en France étudier le sujet pendant l'entre-deux-guerres, selon la liste que donne Reinhard Siegmund-Schultze dans SIEGMUND-SCHULTZE 2001, p. 288-301 <sup>251</sup>.

### 5.3.2 Un 3<sup>ème</sup> niveau d'analyse appliqué à un ensemble de thèses

Comme je l'ai indiqué p.252, un ensemble de 13 doctorats, composés de plusieurs groupes thématiques, se forme autour de l'étude de propriétés générales sur les fonctions

---

250. Cette séance est organisée à l'occasion de la réunion internationale des mathématiciens. Cf. DENJOY 1939, p. 4. Denjoy développe ensuite sa pensée, aux pages 5 et 6 :

« Dans [le] domaine de la [théorie des fonctions d'une variable complexe], constamment cultivé depuis un siècle, mais avec des méthodes qui après Cauchy et Weierstrass n'avaient plus été sensiblement perfectionnées, la transformation et le progrès des connaissances ont été prodigieux depuis la guerre.

C'est principalement l'étude de la fonction uniforme autour d'un point singulier essentiel isolé, ou dans un cercle d'holomorphie, qui a été approfondie au point de fournir dans bien des cas la marge numérique exacte de variation possible d'une fonction analytique vérifiant des conditions données. Dans un domaine où beaucoup des meilleurs analystes du temps présent ont donné leur mesure, il serait téméraire de prétendre citer des noms sans s'exposer à de graves omissions. Il semble toutefois équitable d'énumérer parmi les puissantes méthodes nouvelles auxquelles ont été dus les principaux progrès : l'introduction de la fonction caractéristique de R. Nevanlinna, l'emploi avec P. Montel des familles normales après un retour à la fonction modulaire d'où M. Picard avait jadis tiré le germe de toutes ces théories, enfin la représentation conforme si efficacement utilisée par Carleman et Ahlfors.

L'étude conjuguée des valeurs prises par les fonctions des sortes indiquées et de l'ensemble des points où ces fonctions prennent ces valeurs, est à proprement parler l'examen de la fonction inverse. On sait par un théorème célèbre de Poincaré, que la fonction analytique la plus générale est une fonction uniforme d'une fonction inverse de la fonction uniforme. »

Pour lui ce domaine est d'ailleurs l'un de ceux dans lesquels la recherche a perdu « son caractère individualiste » mais « est engagée pour obéir à l'émulation de l'exemple ». Cf. DENJOY 1939, p. 7.

251. Entre autres noms figurent Ferencz Krbeek, hongrois, en 1925-1926, Walter Saxer, suisse, en 1926-1927, Wassily Gontcharov, russe, en 1926-1928, Dimitri Menchov en 1927, Rolf Nevanlinna, finlandais, en 1929, Lars Ahlfors, finlandais, en 1931-1932, John Gergen, américain, en 1929-1930. . .

complexes. La formation de ces groupes a été réalisée indépendamment de l'article de Gaier. On remarque cependant que le premier d'entre eux a pour thème l'étude de propriétés des fonctions entières, holomorphes et méromorphes : propriétés de croissance, propriétés vérifiées par l'ordre de ces fonctions, étude de la distribution des valeurs prises par ces fonctions, c'est-à-dire des questions étudiées par les mathématiciens à la suite des théorèmes de Picard, d'après Gaier. Les thèmes étudiés par les autres groupes sont ceux dont Gaier affirme qu'ils ont pour source le théorème de représentation conforme de Riemann. Je reprends alors sa séparation en deux sources distinctes pour présenter les idées et les sujets travaillés dans les doctorats de ce corpus.

### À partir des théorèmes de Picard

Cinq thèses abordent des problèmes qui ont pour source les théorèmes de Picard : celles de Georges Valiron (1914), d'Henri Milloux (1924), d'Henri Cartan (1928), d'André Rauch (1933) et de King-Lai Hiong (1934)<sup>252</sup>. Tous les doctorants revendiquent d'ailleurs cette source de façon explicite dans les rappels historiques qu'ils écrivent dans leurs avant-propos. Signalons que cet usage est inhabituel dans les autres doctorats soutenus à cette période. Ainsi, chaque doctorant cite parmi les résultats les plus anciens qui l'ont conduit à son sujet d'étude les théorèmes de Picard<sup>253</sup> ou d'autres théorèmes, tels ceux de Landau et de Schottky<sup>254</sup> ou d'Hadamard<sup>255</sup>, de Borel<sup>256</sup> et de Montel<sup>257</sup>, que j'ai présentés ci-dessus comme faisant suite à ceux de Picard. Il s'agit d'une simple introduction historique et les doctorants ne fondent pas leurs recherches sur les énoncés précis et les démonstrations de ces théorèmes de la fin du XIX<sup>ème</sup> et du début du XX<sup>ème</sup> siècle. Ils reprennent des théorèmes et des démonstrations ultérieurs, la plupart contemporains de la date de soutenance de leur thèse<sup>258</sup>.

---

252. Parmi ces cinq doctorants, deux sont issus de l'École Normale : Georges Valiron et Henri Cartan. Henri Milloux et André Rauch ont, semble-t-il, suivi l'essentiel de leur formation respectivement dans les universités de Lille et de Strasbourg avant de travailler sur leur thèse à Paris. King-Lai Hiong est un étudiant chinois qui a suivi l'essentiel de sa scolarité sur Paris. Pour davantage de renseignements bibliographiques, je renvoie aux fichiers en annexe de ma thèse où j'ai recensé diverses informations relatives à chacun des doctorants.

253. C'est le cas d'Henri Milloux, d'Henri Cartan, de Rauch et de King-Lai Hiong.

254. Cités par Henri Milloux et Henri Cartan.

255. Cité par Valiron, King-Lai-Hiong.

256. Certains de ses résultats sont cités par Georges Valiron, Henri Milloux, Henri Cartan, Rauch, King-Lai Hiong. Parmi les résultats évoqués, on retrouve notamment la démonstration du premier théorème de Picard énoncée par Borel en 1896 (Milloux, Rauch, King-Lai Hiong).

257. Cité par Henri Milloux, Henri Cartan, Rauch.

258. Par exemple Henri Cartan présente son sujet comme une généralisation d'un théorème de Borel sur l'impossibilité d'une certaine identité entre des fonctions entières sans zéros de la variable complexe, mais tient compte des résultats obtenus depuis, notamment par André Bloch. De même Henri Milloux dans sa thèse, *Le théorème de M. Picard. Suite de fonctions holomorphes. Fonctions méromorphes et fonctions entières*, travaille les recherches ultérieures de Schottky, Carleman, Ostrowski et Bieberbach.



**La thèse de Georges Valiron : un doctorat d'avant-guerre.** En 1914, dans son mémoire *Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière* écrit et soutenu avant le début de la première guerre mondiale, Georges Valiron s'intéresse à des propriétés et des relations vérifiées uniquement par des fonctions entières les plus générales possibles. Il est le seul de ces cinq doctorants à travailler uniquement sur les fonctions entières. Les autres étudient davantage d'autres classes de fonctions telles que les fonctions holomorphes ou méromorphes ou les fonctions qui ne sont pas définies sur l'ensemble du plan complexe. De plus, sans doute à cause de l'écart chronologique entre les différents mémoires, les quatre autres doctorats (ceux de Milloux, Henri Cartan, Rauch et Hiong) n'abordent pas les problèmes de théorie des fonctions selon le même point de vue et avec les mêmes outils et citent d'autres références bibliographiques.

Dans son manuscrit, Valiron étudie principalement les fonctions entières d'ordre nul. Il établit des résultats et utilise des méthodes qu'il réemploie dans un second temps pour les fonctions entières d'ordre fini <sup>259</sup>.

Pour l'énoncé de propriétés générales sur les fonctions entières d'ordre nul, il fonde ses recherches sur les travaux de Littlewood <sup>260</sup>. Valiron précise des relations entre les trois fonctions principales des fonctions entières : maximum du module de la fonction  $f(z)$  pour  $|z| = r$  <sup>261</sup>, le terme du développement en série de Taylor de la fonction qui a le plus grand module <sup>262</sup>,  $\max_{n \in \mathbb{N}} (|c_n| r^n)$ , et enfin le module du  $n^{\text{ième}}$  zéro de la fonction, si on suppose ceux-ci classés par module croissant. Valiron améliore notamment certains résultats d'Hadamard et il reprend en partie certaines de ses méthodes <sup>263</sup>. Il utilise la plupart du temps des inégalités et des relations vérifiées par  $M(r)$  ou par son logarithme.

Il étudie également le comportement asymptotique du rapport entre  $\log M(r)$  et des fonctions simples soit de  $(r, \mathcal{N}(r))$  où  $\mathcal{N}(r)$  est le rang du terme de la série de Taylor qui réalise  $\max_{n \in \mathbb{N}} (|c_n| r^n)$ , soit de  $(r, n(r))$ , où  $n(r)$  est le nombre de zéros de la fonction de module inférieur à  $r$ . À partir de l'étude plus précise des fonctions pour lesquelles ce rapport est asymptotiquement égal à 1 <sup>264</sup> et surtout des conditions qu'elles doivent vérifier pour que le rapport tende vers un, il procède ensuite à une classification des

<sup>259</sup>. Valiron utilise comme il est d'usage à l'époque la notion d'ordre introduite par Hadamard et que j'ai rappelée p. 258.

<sup>260</sup>. Cf. VALIRON 1914, p. 2. Valiron fait notamment référence au théorème sur le minimum et au mémoire de Littlewood, *On the asymptotic approximation to integral functions of zero order*, 1907, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, vol.5.

<sup>261</sup>. Soit la fonction  $M(r)$  pour reprendre les notations introduites précédemment p. 258.

<sup>262</sup>. On suppose que le développement en série de Taylor de la fonction  $f$  s'écrit  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ .

<sup>263</sup>. Dans toute la première partie de son mémoire (VALIRON, 1914, p.7-25), Valiron fait ainsi référence à de très nombreuses reprises au mémoire d'Hadamard : *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, 1893, HADAMARD 1893.

<sup>264</sup>. Fonctions que Valiron appelle fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulières, VALIRON 1914, p. 3 et p. 44.

fonctions entières d'ordre nul suivant le comportement asymptotique de  $\log |M(r)|$ . Au cours de son travail, Valiron retrouve certains des résultats obtenus par d'autres mathématiciens qui ont travaillé sur les fonctions de la variable complexe au cours du premier quart du XX<sup>ème</sup> siècle tels que Lindelöf ou Wiman<sup>265</sup>.

Les résultats et les notions que Valiron introduit pour les fonctions entières d'ordre nul sont ensuite dans une deuxième partie du mémoire introduites pour les fonctions entières d'ordre fini<sup>266</sup>. Les procédés de démonstrations restent identiques et Valiron s'attache principalement à retrouver ou à généraliser des résultats préalablement établis par des mathématiciens que Denjoy, Wiman, Lindelöf, Léau ou Boutroux. Une partie du travail porte notamment sur la démonstration dans toute sa généralité de la forme précise du théorème de Wiman concernant le comportement de  $\log |f(z)|$ <sup>267</sup>. Ce dernier point semble particulièrement important. Walter Hayman, dans HAYMAN 1994, p. 371, mentionne l'obtention par Valiron de cette généralisation et il affirme alors, ce que ne dit pas Valiron dans sa thèse, que le mathématicien démontre en fait une conjecture de Littlewood<sup>268</sup>.

---

265. Par exemple, en reprenant les notations utilisées ci-dessus, Valiron affirme établir des inégalités vérifiées par certaines fonctions de  $M(r)$ ,  $\mathcal{N}(r)$  et  $n(r)$  qui généraliseraient celles de Lindelöf (il ne les indique cependant pas plus précisément), VALIRON 1914, p. 62-64. De même, p. 77, il affirme donner la forme la plus précise au théorème de Wiman concernant le comportement de  $\log |f(z)|$  sur une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants, pour une fonction  $f$  à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière. Valiron affirme qu'on a

$$\log |f(z)| = (1 + \eta(z)) \frac{\phi(r^{\rho_1(r)}, r)}{H(\log(r))}$$

où  $\eta(z)$  est une fonction très petite et les autres fonctions sont introduites par Valiron au cours de son étude des fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulières.

266. Par exemple, Valiron introduit pour ces fonctions les correspondances régulières entre le nombre de zéros de la fonction inférieur à  $r$  et  $\log |M(r)|$ .

267. Le théorème de Wiman s'énonce sous la forme suivante, d'après Valiron, VALIRON 1914, p. 98,

Pour toute fonction d'ordre fini  $\rho$  inférieur à  $\frac{1}{2}$ , il existe une infinité de cercles, de rayons indéfiniment croissants, sur lesquels on a

$$\log |f(z)| > [\cos \pi \rho - \epsilon(r)] r^{\rho(r)},$$

$\rho(r)$  étant un ordre précisé.

Valiron arrive à le généraliser ainsi, VALIRON 1914, p. 102 :

Pour toute fonction d'ordre fini  $\rho$ , il existe une infinité de cercles de rayon  $R_s$  ( $\lim_{s \rightarrow \infty} R_s = \infty$ ), tels que sur chacun d'eux on a l'inégalité

$$\log |f(z)| > h \mu_1(R_s), \quad |z| = R_s, \quad h > 0$$

sur des arcs dont la longueur totale est au moins  $\frac{2\pi}{h}$ ,  $h$  étant le plus petit entier supérieur à  $2\rho$ .

Dans les notations de Valiron,  $\mu_1(r) = \int_0^r \frac{n(x)}{x} dx$ , où  $n(x)$  est le nombre de zéros de la fonction  $f(z)$  de module inférieur à  $x$ .

268. Dans le rapport du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* sur la thèse de Valiron, l'auteur, Neder, présente ce résultat de Valiron comme le plus important du mémoire.

Comme je viens de le montrer, Valiron a cherché dans son doctorat à établir de la façon la plus précise possible des résultats sur la correspondance entre les trois fonctions fondamentales qui interviennent pour les fonctions entières : module maximum de la fonction, terme de module maximum de la série de Taylor, module du  $n^{\text{ème}}$  zéro. Il est le seul parmi l'ensemble des doctorants à travailler ainsi sur ces trois fonctions. Cette étude particulière concentrée sur les fonctions entières s'inscrit en fait dans un effort collectif de la recherche mathématique qui date de l'avant-première guerre mondiale comme le montre le bilan historiographique que j'ai dressé précédemment<sup>269</sup>. Paul Montel confirme ce jugement dans le rapport qu'il écrit sur la thèse lorsqu'il évoque l'effort de recherche réalisé depuis la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, les travaux fondateurs de Picard, Hadamard et Borel et un ensemble de travaux des années 1910 ou publiés juste avant<sup>270</sup>.

Le travail de thèse de Valiron, le seul parmi ceux de théorie des fonctions de la variable complexe à avoir été conçu avant la première guerre mondiale, apparaît donc comme la fin d'un cycle de la recherche mathématique française. Il s'attache pour l'essentiel à préciser des estimations de la croissance du module de ces fonctions sur lesquels d'autres mathématiciens ont déjà travaillé<sup>271</sup>. Après Valiron, les doctorats s'intéresseront à d'autres thématiques qui ne se rapporteront pas uniquement aux fonctions entières.

Cependant Valiron participe par la suite au front avancé de la recherche, comme je le montrerai, et joue un rôle important comme enseignant dans différentes facultés de sciences pendant l'entre-deux-guerres. Et c'est par le biais de ces nouvelles activités qu'il est cité par les autres doctorants, ceux-ci ne faisant aucune référence à sa thèse.

---

269. Cf. la sous-partie relative aux suites des théorèmes de Picard, vers la page 258.

270. Il écrit ainsi :

« La théorie des fonctions entières a été très étudiée dans ces vingt dernières années ; le but principal de ces études a été de préciser les analogies et les différences avec les polynômes, en ce qui concerne en particulier les relations entre le mode de croissance de la fonction et la densité asymptotique de ses zéros. Les résultats obtenus par M. Hadamard et par M. Borel, à l'occasion de l'étude approfondie du théorème célèbre de M. Picard, ont été précisés successivement par MM. Jensen, Lindelöf, Boutroux, Wiman, Blumenthal, Denjoy, Littlewood. Après ces travaux, un grand nombre de points se trouvaient élucidés et il semblait bien que les questions restant à résoudre devaient être exceptionnellement difficiles. On doit donc admirer le courage avec lequel M. Valiron n'a pas craint de s'attaquer à un tel sujet et la pénétration dont il a dû faire preuve pour apporter non seulement de nombreux et intéressants compléments sur des points de détail, mais encore quelques idées véritablement neuves, et qui resteront. »

271. À cet égard, on peut remarquer que Valiron dans son introduction signale à plusieurs reprises qu'il n'est pas certain de la nouveauté de résultats qu'il établit. Il affirme démontrer par une autre manière des théorèmes préalablement énoncés, cf. par exemple VALIRON 1914, p. 120-121. Borel le souligne également dans le rapport sur la thèse écrivant « qu'il est à peu près impossible d'indiquer, sans de très longs développements, ce qui appartient en propre à M. Valiron, car certains des résultats qu'il obtient se superposent partiellement à des résultats obtenus antérieurement sous une forme différente. »

En effet, la carrière de Valiron fait de lui un personnage à part parmi les doctorants en théorie des fonctions. Dès le premier conflit mondial terminé, Georges Valiron enseigne d'abord à la faculté des sciences de Strasbourg<sup>272</sup> puis à partir de 1931 à la faculté des sciences de la Sorbonne<sup>273</sup>. Il occupe donc une fonction institutionnelle à Paris, au moins dans les années 1930. Par ses fonctions ainsi que par ses intérêts de recherche, il intervient directement dans plusieurs des thèses abordées dans cette partie à la fois comme rapporteur<sup>274</sup>, mais également comme référence mathématique<sup>275</sup>.

**Les thèses d'Henri Milloux, Rauch et King-Lai Hiong : l'utilisation de nouvelles méthodes** Dix ans après Valiron, en 1924, Henri Milloux étudie les valeurs exceptionnelles de fonctions méromorphes pourvues d'une valeur asymptotique et étend ses résultats aux fonctions entières d'ordre fini<sup>276</sup>. On peut voir des prémisses de ce sujet à la fin de la thèse de Valiron. Ce dernier y aborde succinctement le problème des « langues » de Boutroux, c'est-à-dire des domaines  $\mathcal{L}$  de l'ensemble des complexes tel que pour tout chemin  $d$  décrit par  $z$  s'éloignant vers l'infini, sans sortir de  $L$ , la fonction  $f(z)$  tend vers une valeur déterminée et finie et ne s'enroule autour de ce point qu'un nombre fini de fois<sup>277</sup>. Boutroux l'étudie pour les fonctions entières en considérant les points singuliers transcendants des fonctions inverses correspondantes, Milloux pour certaines fonctions méromorphes et aussi les fonctions entières.

Henri Milloux identifie le théorème de Picard sur l'indétermination d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point essentiel comme l'origine de ses recherches<sup>278</sup>. Dans son introduction, comme dans le contenu même de son manuscrit, il cite les résultats qui l'influencent le plus directement et qu'il reprend dans ses démonstrations (ceux de Landau, Schottky, Carleman, Valiron) et aussi les résultats qui ont déjà été établis sur ses sujets d'étude mais qu'il ne reprend pas (ceux de Montel, Julia et Bieberbach) sauf pour comparer leurs résultats aux théorèmes qu'il démontre.

Dès son avant-propos, Henri Milloux évoque donc la théorie des familles normales et l'utilisation qu'en font Montel et Julia pour établir des propriétés vérifiées par des fonctions uniformes au voisinage d'un point essentiel. Il explicite les méthodes utilisées par ces derniers et il explique comment ils introduisent à partir d'une fonction uniforme

---

272. où il est professeur de Calcul différentiel et intégral de 1919 à 1929 puis d'Analyse supérieure de 1929 à 1931, cf. VALIRON 1952.

273. où il occupe les différentes fonctions de chargé de cours, de 1931 à 1943, de maître de conférences de 1934 à 1941, puis de professeur de Calcul différentiel et intégral à partir de 1941.

274. Il est ainsi le rapporteur de Rauch, de King-Lai Hiong, de Charles Blanc, de Chi-Tai Chuang et de Jacques Dufresnoy.

275. Cf. les paragraphes suivants.

276. Dans son doctorat, *Le théorème de M. Picard, Suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières*.

277. Cf. BOUTROUX 1908, p. 7.

278. Le titre du mémoire traduit également la volonté d'Henri Milloux de situer ses recherches dans la continuité de ce théorème. Il intitule de la même façon l'article qu'il écrit en 1925 pour le *Bulletin de la SMF*, « Sur le théorème de Picard », MILLOUX 1925.

une famille normale de fonctions. Il montre également les limites de cette méthode<sup>279</sup>. Selon Milloux, Montel et Julia remplacent le domaine qui entoure le point essentiel par une infinité de domaines qui s'en rapprochent, de forme connue, indépendante de la fonction étudiée, et ils considèrent non pas la fonction uniforme étudiée, mais la famille des fonctions obtenues en faisant la représentation conforme de ces domaines partiels sur un domaine fixe. L'approche de Milloux diffère de celle de Montel et de Julia mais elle permet d'aboutir à des résultats similaires.

Son approche se fonde sur l'utilisation de deux résultats principaux. Le premier est une inégalité énoncée par Carleman. Elle est vérifiée par le module d'une fonction holomorphe sur un domaine limité par deux segments de droite et soumis à certaines conditions<sup>280</sup>. Dans son manuscrit, Henri Milloux ne donne aucune date à l'établissement par Carleman de cette inégalité et ne précise aucune référence écrite pour ce résultat alors qu'il le fait systématiquement pour les autres travaux qu'il mentionne. On peut alors supposer qu'Henri Milloux a eu connaissance de ce résultat via un mathématicien français ou lors d'une conférence au séminaire Hadamard<sup>281</sup> ou encore lors du cours Peccot qu'a assuré Carleman pendant l'année 1922-1923 au Collège de France. Le second résultat utilisé par Milloux est constitué d'un théorème contenant à la fois le théorème de Schottky et le théorème de Landau que ces deux mathématiciens ont énoncés en 1904 et qui donne une majoration de  $\log |f(z)|$  dans certains domaines pour une fonction holomorphe qui ne prend pas les valeurs 0 et 1 dans le cercle de centre O et de rayon 1<sup>282</sup>.

Ces deux résultats constituent la base des travaux de Milloux. Par l'application qu'il en fait, il établit une théorie parallèle aux travaux de Montel et de Julia. Dès le premier chapitre de sa thèse, consacrée à l'étude de certaines suites de fonctions holomorphes non bornées et à l'étude de leur convergence uniforme dans un domaine

279. Cf. MILLOUX 1924a, p. 1-2.

280. Cf. MILLOUX 1924a, p. 3.

281. Selon Vladimir Maz'ya et Tatyana Shaposhnikova, Carleman et Hadamard sont en contact au début des années 1920 par l'entremise de Mittag-Leffler, cf. MAZ'YA et SHAPOSHNIKOVA 2005, p. 133.

282. Il s'agit de deux théorèmes énoncés par Milloux dans MILLOUX 1924b, p. 355-356. Ces théorèmes sont énoncés par Schottky et Landau dans des publications où ils apportent des compléments au dernier théorème de Picard et que j'ai mentionnées dans le bilan historiographique. En rapprochant les deux théorèmes, Henri Milloux en obtient un nouveau qu'il formule ainsi (MILLOUX, 1924b, p.356) :

« Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe, ne prenant pas les valeurs 0 et 1, dans le cercle de centre O et de rayon 1, et dont la valeur  $a_0$  en O est inférieure en module à un nombre  $\alpha$  qui dépasse une certaine constante  $k$ . Dans le cercle de centre O et de rayon  $\frac{1}{2}$ , la fonction  $f(z)$  vérifie l'inégalité

$$\log |f(z)| < \frac{2^{28}}{\sqrt{|\log(1-\frac{1}{\alpha})|}}$$

et *a fortiori*

$$\log |f(z)| < 2^{28} \sqrt{\alpha}$$

On peut prendre 165 comme valeur de la constante  $k$ . »

connexe borné  $D$ , Milloux applique l'inégalité de Carleman et ne reprend aucun des résultats de Montel sur ce sujet<sup>283</sup>.

La partie centrale du travail d'Henri Milloux<sup>284</sup> est l'étude de la distribution de cercles de remplissages. Il établit l'existence d'une infinité de cercles du plan complexe, qu'il appelle *cercles de remplissage*, pour les fonctions méromorphes qui possèdent une valeur asymptotique finie ou infinie et aussi pour les fonctions entières. Ces cercles<sup>285</sup> s'éloignent indéfiniment le long d'un chemin de détermination de la valeur asymptotique de la fonction, tels que les valeurs  $Z = f(z)$  que prend la fonction dans ces cercles remplissent des anneaux limités par deux cercles dont les rayons tendent respectivement vers zéro et vers l'infini<sup>286</sup>. À partir de ces théorèmes, Milloux retrouve le nombre de valeurs exceptionnelles que peut prendre une fonction méromorphe ou une fonction entière<sup>287</sup> et les cercles de remplissage fournissent des renseignements sur la fonction  $f(z)$ <sup>288</sup>. Comme cas particulier de ses théorèmes principaux sur les cercles de remplissage, Henri Milloux retrouve des résultats qualitatifs qu'avait établis Gaston Julia à partir de propriétés des familles normales de fonctions<sup>289</sup>.

Dans la dernière partie de son mémoire, Henri Milloux étudie des propriétés qu'il qualifie de « nouvelles » pour les fonctions entières d'ordre fini<sup>290</sup>. Il donne des résultats sur la croissance de ces fonctions dans des angles particuliers. Il les compare avec des recherches récentes de Bieberbach sur la grandeur des angles dans lesquels une fonction d'ordre  $p$  peut admettre deux valeurs exceptionnelles<sup>291</sup>, recherches que Milloux précise et complète. Depuis la publication des travaux de Bieberbach en 1919, Valiron les a

283. Il retrouve et étend un théorème d'Ostrowski de 1922, qui donnait un résultat sur le même sujet avec des conditions sur la rapidité de croissance vérifiées par la suite de fonctions, cf. MILLOUX 1924b, p. 349. Henri Milloux au lieu de supposer que la convergence uniforme est assurée sur un domaine intérieur au domaine  $D$  considéré suppose seulement que la convergence est assurée sur une suite discontinue de points, satisfaisant à certaines conditions.

284. Celle qui est reconnue comme telle par le rapporteur de la thèse, Paul Montel.

285. Dont il donne non seulement le centre mais aussi une valeur du rayon.

286. ou par trois cercles : deux dont le rayon tend vers zéro, inclus dans un troisième dont le rayon tend vers l'infini.

287. Par exemple, il affirme MILLOUX 1924a, p. 22 qu'« il existe un domaine  $\Delta$ , du plan des  $z$ , dans lequel une fonction méromorphe  $\phi(z)$  possédant une valeur asymptotique prend une infinité de fois toute valeur, sauf deux au plus » et MILLOUX 1924a, p. 27 que « dans une suite infinie de cercles de remplissage, la fonction  $f(z)$  prend une infinité de fois toute valeur finie, sauf une au plus ».

288. tels que la position des racines de l'équation  $f(z) - a = 0$  pour certaines valeurs de  $a$ , MILLOUX 1924a, p. 26-28.

289. Ces résultats portent sur l'existence de domaine du plan complexe dans lequel une fonction méromorphe possédant une valeur asymptotique prend une infinité de valeurs sauf deux au plus et Julia les a également étendus aux fonctions entières. Ces résultats figurent dans les articles suivants : Julia, Gaston, « Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes », *Annales de l'École normale*, 1919, 1920, 1921, MILLOUX 1924b, p. 367.

290. Cf. MILLOUX 1924b, p. 379.

291. Les recherches de Bieberbach sont fondées sur le théorème de Picard et établies par une approche différente de celle de Milloux.

déjà partiellement réétudiés et le doctorant reprend dans ses démonstration quelques travaux de ce dernier<sup>292</sup>.

Les théorèmes de Picard et les recherches qu'ils engendrent sont au centre du travail réalisé par Milloux. Il n'en reprend cependant pas toutes les orientations. Si Milloux connaît la théorie des familles normales de Montel et l'utilisation qu'en fait Julia<sup>293</sup>, il ne les utilise pas directement dans ses démonstrations. Milloux ne recourt pas à des méthodes élaborées par des mathématiciens français, à l'exception de certaines de Valiron, mais il s'intéresse à des sujets qu'ils travaillent à la même période et compare ses propres résultats aux leurs. Paul Montel mentionne d'ailleurs les travaux de Milloux dans sa *Notice sur travaux*<sup>294</sup>. Il fait, pour l'essentiel, référence à des travaux de mathématiciens étrangers : allemands comme Landau, Ostrowski ou suédois comme Carleman.

L'étude de la distribution des valeurs prises par une fonction méromorphe est également le sujet de la thèse d'A. Rauch en 1933<sup>295</sup>. A. Rauch procède dans l'introduction de son mémoire à quelques rappels historiques sur les travaux précurseurs à son sujet : il mentionne le théorème de Picard sur le nombre de valeurs exceptionnelles admises par une fonction entière ainsi que l'article de Borel de 1896 où ce dernier introduit de nouvelles notions d'ordre<sup>296</sup>. Il cite également les travaux de Montel sur les familles normales et l'utilisation qu'en font ensuite Julia et Valiron par la définition des directions de Julia et des cercles correspondant sur ces directions. Il parle alors des cercles de remplissages, introduits par Milloux dans sa thèse, indépendamment des travaux précurseurs de Montel et Julia. Rauch mentionne enfin la théorie de Nevanlinna sur les fonctions méromorphes et il note comment Valiron puis Milloux ont réinterprété et approfondi la théorie des cercles de remplissage à l'aide de cette nouvelle théorie, en introduisant, par exemple, pour les fonctions méromorphes de nouvelles fonctions telles que la fonction  $T(r, f)$  centrale dans les travaux de Nevanlinna<sup>297</sup>.

Dans la suite de son introduction et tout au long de sa thèse, Rauch ne se réfère, pour l'essentiel, plus qu'aux travaux les plus récents de Valiron et de Milloux. Il paraît

---

292. L'article de Bieberbach cité par Milloux est « Über eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung », *Mathematische Zeitschrift* 3 (1919). Dans le cours de son travail, Milloux cite également à plusieurs reprises des publications de Valiron, où ce dernier reprend certains travaux de Bieberbach. Il fait ainsi référence par exemple à : G. Valiron, « Remarques sur le théorème de Picard », *Bulletin des sciences mathématiques*, (3) 44 (mai 1920) et VALIRON 1921. Le doctorant reprend alors et précise les travaux récents de ce dernier sur les valeurs que prend une fonction holomorphe d'ordre  $\rho$  dans un angle d'ouverture  $\frac{\pi}{\rho}$ , cf. MILLOUX 1924a, p. 44.

293. Dans sa définition des points  $J$  et des droites  $J$  des fonctions méromorphes d'une variable ou dans ses recherches sur les valeurs d'une fonction uniforme autour d'un point singulier, cf. HERVÉ 1968, p. 96-98.

294. MONTEL 1933b, p. 31.

295. *Extensions de théorèmes relatifs aux directions de Borel de fonctions méromorphes*, 1933.

296. Cf. le bilan historiographique précédent, p.259.

297. Cf. p. 261 de la présente thèse.

probable que Rauch ait rencontré ces deux mathématiciens et qu'il ait entretenu une certaine relation avec eux. Le seul renseignement que j'ai pu trouver sur A. Rauch concerne son admission à l'agrégation de mathématiques en 1926 en tant qu'« alsacien-lorrain »<sup>298</sup>. On peut alors supposer que Rauch a effectué l'essentiel de sa formation mathématique à l'université de Strasbourg où Georges Valiron a été professeur de 1919 à 1931 et où Henri Milloux a occupé un poste à la fin des années 1920. C'est à cette occasion qu'il aurait pu les rencontrer.

Les travaux de Valiron et de Milloux sur la théorie des cercles de remplissage pour diverses fonctions servent de base à l'étude de Rauch des valeurs prises par une fonction méromorphe dans le voisinage d'une singularité essentielle isolée. Rauch cherche à généraliser certains de leurs théorèmes énoncés pour les fonctions méromorphes. Il veut également étendre la théorie et leurs résultats au cas où on considère les zéros des fonctions  $f(z) - \Pi(z)$ . Il s'agit de prouver l'existence de cercles où  $f(z)$  et  $\Pi(z)$  sont méromorphes et où leur nombre de zéros est de l'ordre de  $T(r, f)$ , la fonction  $\Pi(z)$  devant vérifier certaines conditions. Rauch cherche également à caractériser la distribution de ces zéros.

En 1928, Valiron et Milloux ont simultanément publié des résultats à peu près « définitifs »<sup>299</sup> dans les *Acta mathematica*<sup>300</sup> sur le nombre de zéros des fonctions  $f(z) - \Pi(z)$ , pour  $f(z)$  une fonction méromorphe d'ordre fini<sup>301</sup>, respectivement dans les cas où  $\Pi(z)$  est une fonction rationnelle et où  $\Pi(z)$  est une fonction constante<sup>302</sup>. Ils y ont précisé des ordres de grandeurs des rayons de la suite des cercles de remplissage et de l'expression du nombre des zéros de  $f(z) - \Pi(z)$  situés dans un cercle de remplissage de rayon arbitraire. Dans son mémoire, A. Rauch généralise ces résultats dans le cas où  $f(z)$  est une fonction méromorphe d'ordre  $\rho$  donné et où  $\Pi(z)$  est une fonction méromorphe d'ordre inférieur à  $\rho$ <sup>303</sup>. Il emploie, de façon explicite, la même méthode que Georges Valiron et Henri Milloux et généralise le lemme qu'ils utilisent<sup>304</sup> et qui donne une estimation du nombre de fois que  $f(z)$  prend presque toute valeur d'un certain cercle.

298. Selon le site de l'INRP qui donne une liste des reçus à l'agrégation de mathématiques de 1901 à 1950, <http://agreg.dnsalias.org/agreg1900.html> ou [http://www.inrp.fr/she/chervel\\_laureats2.htm](http://www.inrp.fr/she/chervel_laureats2.htm).

299. selon A. Rauch dans RAUCH 1933, p. 3.

300. VALIRON 1928 et MILLOUX 1928.

301. Milloux comme Valiron prennent comme définition de l'ordre  $\rho$  d'une fonction méromorphe la définition introduite par Rolf Nevanlinna  $\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log(r)}$ , où  $T(r, f)$  est la fonction caractéristique de  $f$  (on peut se référer par exemple à VALIRON 1928, p. 67-68 ou à SEGAL 1981, p. 163-180).

302. Milloux a également donné des résultats lorsque  $f(z)$  est d'ordre infini et  $\Pi(z)$  une fonction constante.

303. C'est notamment ainsi que le décrit Georges Valiron dans le rapport sur la thèse de Rauch et c'est également ainsi que Rauch décrit son travail dans RAUCH 1931, p. 1190.

304. et qu'ils désignent sous le nom de « théorème de Boutroux », cf. le rapport sur la thèse, RAUCH 1931, p. 1189-1190 et RAUCH 1933, Chapitre I et II.



Comme conséquence des résultats obtenus sur le nombre de zéros des fonctions  $f(z) - \Pi(z)$ , Georges Valiron<sup>305</sup> a établi l'existence, pour une fonction méromorphe d'ordre positif  $\rho$ , d'une direction  $D$ , appelée *direction de Borel* et qui peut être une direction rectiligne ou curviligne jouissant de la propriété suivante : dans tout angle (rectiligne ou curviligne) comprenant  $D$  en son intérieur, l'exposant de convergence des zéros de  $f(z) - \Pi(z)$  est égal à  $\rho$  pour toute fonction rationnelle  $\Pi(z)$ , sauf au plus pour deux d'entre elles<sup>306</sup>. Dans son doctorat, Rauch étend ce théorème aux fonctions  $f(z) - \Pi(z)$  lorsque  $\Pi(z)$  est une fonction méromorphe d'ordre inférieur à celui de  $f$ . Il généralise également les résultats obtenus antérieurement par Milloux et Valiron sur des estimations plus précises de la distribution des zéros des fonctions  $f(z) - \Pi(z)$  dans des suites de cercles de remplissage selon des directions de Borel particulières et dans des angles contenant de telles suites de cercles. Il se place dans le cas où l'ordre  $\rho$  de la fonction  $f(z)$  est positif et aussi dans le cas où  $\rho$  est nul ou infini<sup>307</sup>.

Même si Rauch ne rappelle pas systématiquement qu'il utilise les notions mathématiques introduites par Nevanlinna, ces notions sont au centre de toutes ses démonstrations. Elles le sont également dans les travaux de Valiron et de Milloux. Tous les résultats relatifs à l'exposant de convergence des zéros des fonctions  $f(z) - \Pi(z)$  s'obtiennent par la considération de la convergence de certaines séries dépendant des fonctions  $T(r_n, f)$  où  $r_n$  est la suite des modules de zéros introduites à la note 306<sup>308</sup>. Les estimations de la distribution des zéros des fonctions dans des cercles de remplissage sont formulées à l'aide des fonctions caractéristiques de Nevanlinna,  $T(r, f)$ , qui semblent dès la fin des années 1920 couramment utilisées dans les publications mathématiques françaises.

La thèse d'A. Rauch peut donc être vue comme une suite, neuf ans après, de la thèse d'Henri Milloux. Publiée en 1933, elle utilise les derniers résultats publiés sur

305. Notamment dans VALIRON 1928, p. 80-82.

306. D'après BOREL 1897, si on note  $z_n$  le  $n^{\text{ème}}$  des zéros de  $f(z) - \Pi(z)$  rangés par ordre de module non décroissant, l'exposant de convergence  $\rho'$  des zéros est le réel tel que pour tout  $\epsilon > 0$  la série  $\sum \frac{1}{|z_n|^{\rho' - \epsilon}}$  diverge et la série  $\sum \frac{1}{|z_n|^{\rho' + \epsilon}}$  converge. Dans MILLOUX 1928, Henri Milloux reprend et précise certains de ces résultats dans le cas où  $\Pi(z)$  est une fonction constante.

307. On peut notamment évoquer le théorème suivant dont Valiron souligne l'importance dans le rapport de thèse car il « met en évidence la forme des résultats obtenus en ce qui concerne le théorème de Borel » (cf. aussi RAUCH 1933, p. 37 et 41).

Si  $f(z)$  est de la classe de divergence de l'ordre fini positif  $\rho$  (c'est-à-dire si  $\int_0^\infty \frac{T(r, f)}{r^{\rho+1}} dr$  diverge) et si  $\Pi(z)$  est au plus de la classe de convergence de l'ordre  $\rho$  (c'est-à-dire si  $\int_0^\infty \frac{T(r, \Pi)}{r^{\rho+1}} dr$  converge), il existe une direction  $\Delta$  telle que dans tout angle  $A$  de bissectrice  $\Delta$ , la série  $\sum \frac{1}{|z_n(A, \Pi)|^\rho}$ , formée avec les zéros de  $f(z) - \Pi(z)$  appartenant à cet angle, est divergente sauf au plus pour deux fonctions  $\Pi(z)$ .

La direction  $\Delta$  du théorème précédent est une direction de Borel d'ordre  $\rho$ . Rauch, après Valiron et Milloux montre que toute suite de cercle de remplissage en engendre au moins une. Il démontre également dans le cours de son travail que la réciproque est vraie : à toute direction  $D$  d'ordre  $\rho$  on peut associer une suite de cercles de remplissage d'ordre  $\rho$  centrée sur  $D$ .

308. Cf. par exemple RAUCH 1933, p. 38-42.

le sujet des cercles de remplissage et les nouveaux outils mathématiques en théorie des fonctions complexes introduits notamment par Nevanlinna. C'est d'ailleurs l'une des différences les plus importantes entre cette thèse et celle de Milloux. L'influence de George Valiron et de ses travaux s'exercent directement sur les recherches de Rauch. Les remerciements que le doctorant lui adresse à la fin de l'introduction dépassent d'ailleurs le cadre formel habituel : A. Rauch y exprime « toute [sa] reconnaissance à M. Valiron qui a inspiré et dirigé ce travail et auprès de qui j'ai trouvé une aide constante »<sup>309</sup>. Selon l'hypothèse formulée précédemment, A. Rauch a pu rencontrer Valiron pendant sa scolarité à l'université de Strasbourg. Ce dernier étant par la suite nommé à la faculté des sciences de Paris, Rauch pourrait avoir continué de travailler avec lui et soutenu son travail à la Sorbonne<sup>310</sup>. Valiron n'est pas ici cité comme ancien doctorant et ce ne sont pas les recherches présentées dans sa thèse qui sont reprises. Depuis le milieu des années 1920 il a publié de nombreux articles<sup>311</sup>. Ce sont ces derniers auxquels se réfère Rauch<sup>312</sup>. Le doctorant cite également des travaux conjoints de Valiron et de Milloux publiés à la fin des années 1920. Les publications parallèles des deux mathématiciens sur des sujets similaires, les nombreuses citations réciproques de leurs travaux indiquent une collaboration étroite entre eux. Elle est d'ailleurs explicitement revendiquée par Henri Milloux<sup>313</sup> et par Georges Valiron<sup>314</sup>.

---

309. Cf. RAUCH 1933, p. 7.

310. Même si rien ne permet de le confirmer, Valiron aurait ainsi très bien pu exercer un rôle semblable à celui de Bouligand à l'université de Poitiers pendant les années 1930 (cf. le troisième chapitre de la présente thèse). Dans le contexte d'une université de province les liens entre professeurs et étudiants pourraient être plus forts qu'à la faculté des sciences de Paris.

311. La liste de publications indiquée dans sa *Notice sur travaux* en témoigne, cf. VALIRON 1952, p. 3-11. Je l'ai reproduite et complétée en annexe de cette thèse (annexe D.2.2).

312. Cf. la liste de publications de Valiron citée par Rauch dans sa bibliographie, RAUCH 1933, p. 62-63.

313. Notamment dans MILLOUX 1928, p. 191. Il y écrit :

« La première partie de ce travail est consacrée à l'étude des fonctions méromorphes. Certains des résultats saillants de cette première partie sont dus à une collaboration avec M. Valiron. »

314. Dans sa *Notice sur travaux*, VALIRON 1952, p. 26, ce dernier écrit ainsi au sujet de ses recherches sur les fonctions méromorphes, sur les cercles de remplissage et les directions de Borel :

« H. Milloux apporta un grand nombre de compléments à mes énoncés ; j'ai profité de ses premières indications pour apporter moi-même d'autres améliorations [...] ; une partie des nouveaux résultats obtenus qui permettent d'atteindre les fonctions méromorphes d'ordre nul pour lesquelles  $\frac{T(r,f)}{(\log r)^2}$  n'est pas borné figure dans la première partie d'un Mémoire de Milloux [...] »

Ces premiers résultats obtenus par une technique nouvelle conduisaient à une révision générale des fonctions méromorphes puis des fonctions algébroides. Je me borne à quelques indications sur ma part dans ce travail (une autre partie importante est due à Milloux). »

Dans le *Rapport sur la carrière et l'oeuvre de M. Georges Valiron* pour le comité secret du lundi 8 juin 1942 (dossier Valiron aux Archives de l'Académie des sciences), Gaston Julia évoque également les « heureuses contributions de M. Valiron et de M. Milloux » dans l'étude des cercles de remplissage.

Une autre preuve d'une collaboration entre les deux mathématiciens peut être apportée par le doctorat d'université de H. Williams, soutenu en 1928 à l'université de Strasbourg, *Compléments au*

L'étude des thèses de Milloux et de Rauch révèle ainsi une suite de travaux sur les cercles de remplissages de fonctions entières et méromorphes et sur la distribution des valeurs prises par ces fonctions qui dépasse le seul cadre des thèses. Après la thèse de Milloux en 1924, ce sujet a été retravaillé par ce dernier et par Valiron à la fin des années 1920, et les publications de ces deux mathématiciens ont ensuite été repris par Rauch au début des années 1930. Entre les différentes étapes de ce développement, la théorie de Nevanlinna, énoncée au milieu des années 1920, est intégrée à la recherche et utilisée dans les publications de la fin des années 1920.

Peu après Rauch, un étudiant chinois, King-Lai Hiong<sup>315</sup>, soutient en 1934 un doctorat sur la théorie générale des fonctions entières et méromorphes d'ordre infini. Il ne s'occupe pas, comme Milloux et Rauch, de l'étude de la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe. Il s'intéresse à certaines propriétés des fonctions analytiques relatives à leur ordre. Il cherche à en faire le récapitulatif en utilisant les nouveaux outils mathématiques créés depuis le début du XX<sup>ème</sup> siècle, notamment ceux introduits par Nevanlinna. Selon Hiong, son travail a ainsi « pour but principal de refaire la théorie générale des fonctions entières d'ordre infini pour chercher à obtenir des résultats meilleurs que ceux de M. Blumenthal et de l'étendre en même temps au cas plus général des fonctions méromorphes d'ordre infini »<sup>316</sup>. Hiong entend également donner à ces résultats quantitatifs un degré de précision particulier, « celui que comportent les résultats donnés par M. Borel dans le cas de l'ordre fini »<sup>317</sup>.

Les résultats fondateurs sur l'ordre des fonctions entières et sur la croissance du module des fonctions évoqués par Hiong sont ceux de Borel et de Blumenthal qui datent respectivement de 1896-1897 et de 1910<sup>318</sup>. Ce sont notamment ces résultats que le doctorant cherche à étendre à l'aide d'une notion généralisée d'ordre. Il veut de même prolonger d'autres résultats établis sur la croissance du module des fonctions par Arnaud Denjoy, Georges Valiron et Rolf Nevanlinna.

---

*théorème de M. Julia*, et dont participent au jury, Fréchet comme président, ainsi que Valiron et Milloux comme examinateurs. Michel Hervé évoque cette thèse d'université dans ses Commentaires sur les travaux d'analyse de Julia rassemblés dans les volumes I et II des *Oeuvres de Gaston Julia*, HERVÉ 1968, p. 98. Il y affirme qu'elle apporte un complément intéressant aux travaux de Milloux sur les cercles de remplissage, travaux qui en 1928 ont déjà été repris par Georges Valiron dans plusieurs publications.

315. Ce dernier a cependant fait toute sa formation mathématique en France. Pour plus d'informations biographiques, cf. p. 284, ainsi que le fichier créé en annexe.

316. Cf. HIONG 1934, p. 2. Georges Valiron présente ce travail de la même façon dans le rapport de thèse.

317. Cf. HIONG 1934, p. 2.

318. Dans l'index bibliographique indiqué par le doctorant HIONG 1934, p. 75-76, ce dernier recense les travaux de Borel de 1896, publiés en 1897 dans « Sur les zéros des fonctions entières », *Acta Mathematica* 20 (1897), ainsi que l'ouvrage de Blumenthal : *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini*, 1910, Paris.

King-Lai Hiong introduit une nouvelle notion d'ordre dans le cas des fonctions méromorphes d'ordre infini, qui suit la définition de Borel dans BOREL 1897<sup>319</sup> :

Si  $f(z)$  est une fonction méromorphe d'ordre infini et  $T(r)$  la fonction caractéristique de Nevanlinna de la fonction  $f(z)$ , Hiong appelle **ordre** de  $f(z)$  toute fonction  $\rho(r)$  non-décroissante telle que la fonction  $r^{\rho(r)}$  soit à croissance normale et telle que si petit que soit le nombre  $\delta$ , on ait, à partir d'une certaine valeur  $r_0(\delta)$  de  $r$ ,

$$T(r) < r^{\rho(r)(1+\delta)}$$

et pour une suite de valeurs  $r_n$  de  $r$  tendant vers l'infini,

$$T(r) > r^{\rho(r)(1-\delta)}.$$

Hiong étend également cette notion au cas des fonctions entières d'ordre fini<sup>320</sup>. Cette nouvelle notion d'ordre est donc définie à partir de la fonction caractéristique de Nevanlinna de la fonction  $f(z)$  et de résultats fournis par la théorie des fonctions méromorphes. Cette théorie n'existait pas encore du temps de la publication des travaux de Borel ou Blumenthal. Elle est ici au coeur des travaux de Hiong et y occupe une place encore plus prépondérante que dans les travaux de Rauch. En 1934, la théorie de Nevanlinna apparaît donc incontournable dans les travaux quantitatifs de théorie des fonctions de la variable complexe, d'autant que Hiong continue à en utiliser les apports tout au long de son manuscrit.

Avec cette nouvelle notion d'ordre, King-Lai Hiong établit ensuite des résultats précisant ou généralisant certains travaux relatifs à la densité de distribution des valeurs des fonctions  $f(z)$  méromorphes<sup>321</sup>. Il étudie plus précisément la fonction d'ordre en elle-même et généralise les décompositions en facteurs de produits canoniques des fonctions méromorphes<sup>322</sup>. Hiong étudie également les fonctions méromorphes d'ordre infini définies sur le cercle unité et généralise pour ces fonctions la notion d'ordre précédemment introduite<sup>323</sup>, ce qui lui permet de leur étendre les résultats précédents.

Il cherche en outre à établir des résultats sur la distribution d'arguments de zéros, dans le cas des fonctions entières d'ordre infini et des fonctions méromorphes, à l'aide de sa notion d'ordre mais aussi à l'aide des méthodes fournies par la théorie de Nevanlinna comme celle des valeurs moyennes logarithmiques. Il généralise aux fonctions méromorphes d'ordre infini les résultats obtenus par Georges Valiron pour les fonctions

319. Cf. HIONG 1934, p. 2 et p.12-23.

320. Il rajoute d'ailleurs qu'on peut faire l'hypothèse que la fonction  $\rho(r) \log r$  est convexe.

321. Il donne ainsi des estimations du nombre  $n(r, \alpha)$  des zéros de  $f(z) - a$  pour  $|z| \leq r$  avec l'ordre de précision des résultats obtenus par Borel dans le cas de l'ordre fini, d'après Hiong dans HIONG 1934, p. 28 et Valiron dans le rapport de thèse.

322. Tels que pouvait le donner le théorème d'Hadamard que j'ai évoqué dans le bilan historiographique précédent, p.258, et que reprend ici Hiong.

323. Cf. HIONG 1934, p. 34.

d'ordre fini sur les directions de Borel et les points de Borel, résultats qu'avait déjà repris Rauch dans sa propre thèse en 1933.

Enfin, il utilise cette nouvelle notion pour généraliser au cas de l'ordre infini des résultats sur la croissance de fonctions holomorphes d'ordre fini définies par leur développement de Taylor, obtenus, d'après Hiong<sup>324</sup>, par Poincaré, Hadamard, Borel et Lindelöf et repris par Georges Valiron dans sa thèse en 1914.

La notion d'ordre introduite par Hiong et l'utilisation qu'il en fait font de cette nouvelle notion l'apport principal du travail du doctorant. C'est d'ailleurs ce que souligne Valiron dans le rapport. Ce dernier y précise également que King-Lai Hiong « n'introduit pas de techniques nouvelles, mais [...] emploie avec habileté les procédés connus les plus récents » pour énoncer des résultats « inédits » et que les résultats qu'ils énoncent se « présentent sous la forme d'énoncés englobant à la fois les fonctions d'ordre fini et d'ordre infini »<sup>325</sup>. La thèse de King-Lai Hiong apparaît donc comme une reprise et une généralisation de résultats obtenus et travaillés dans la première partie du XX<sup>ème</sup> siècle et dans les thèses de Valiron, de Milloux et de Rauch<sup>326</sup>. Elle fait le point sur les notions d'ordre, de croissance, de densité de distribution des valeurs de la fonction. Cette thématique n'est ensuite reprise dans aucun autre doctorat soutenu après lui pendant l'entre-deux-guerres.

Hiong fait de nombreuses citations de travaux mathématiques. La plus grande influence est exercée par ceux de Valiron, essentiellement ceux qui sont publiés dans les années 1920 par Valiron, membre de l'enseignement supérieur français et non plus par Valiron, doctorant. Ce dernier a publié sur les sujets d'intérêts de Hiong et à plusieurs reprises Hiong donne la démonstration de résultats que Valiron a simplement énoncés<sup>327</sup>.

On peut se demander si l'origine chinoise du doctorant et ses fréquents séjours dans les différentes facultés des sciences françaises depuis 1914-1915, à Paris comme en Province, ont pu jouer un rôle dans le choix de son sujet. En effet, King-Lai Hiong a obtenu

324. Cf. HIONG 1934, p. 56.

325. Valiron entend sans doute par les « procédés connus les plus récents » les procédés introduits par Nevanlinna dans sa théorie des fonctions méromorphes ainsi que les utilisations qui en ont été faites depuis lors par d'autres mathématiciens : Nevanlinna, mais aussi Valiron lui-même. Par ailleurs, Valiron mentionne les « ordres de Hiong » dans la *Notice sur travaux* en 1952, VALIRON 1952, p. 26, ce qui renforce *a posteriori* l'intérêt que peut représenter cette notion.

326. D'ailleurs à l'exception de Rauch, Hiong cite dans son Index bibliographique leurs thèses et quelques-unes de leurs publications postérieures. Il fait également référence à une *note* aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* d'Henri Cartan, « Sur un théorème de M. A. Bloch et sur les questions d'unicité dans la théorie des fonctions méromorphes », *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 186 (1928) 624.

327. C'est le cas par exemple dans le premier chapitre du mémoire, où Hiong démontre le lemme sur l'analyticité par segments de la fonction caractéristique de Nevanlinna d'une fonction méromorphe qu'avait simplement énoncé Valiron. On remarque également le nombre de travaux de Valiron référencés par le doctorant (9) dans son Index bibliographique et qui surpasse de beaucoup celui des autres mathématiciens cités (il cite 4 travaux de Borel et sinon le nombre des autres références ne dépasse pas 2 par mathématicien).

en 1934 une thèse d'Etat vingt-et-un ans après avoir entrepris des études en France<sup>328</sup>. Pendant la première guerre mondiale, alors qu'il fuit la Belgique, il réussit en 1915 à se faire admettre au Lycée Saint-Louis, à Paris. Il est ensuite dispensé de baccalauréat par la faculté des sciences de Grenoble où il obtient le certificat de mathématiques générales. Puis, il obtient les certificats d'analyse, de mécanique et d'astronomie en juin 1919 à Montpellier et obtient en 1920 un certificat de physique générale à la faculté des sciences de Marseille, ce qui lui vaut le grade de licencié ès-mathématiques. Il repart en Chine où il dirige des départements de mathématiques dans plusieurs universités et revient en France en 1930 pour préparer un doctorat d'État en sciences mathématiques. Témoin lors de ses séjours en France de l'évolution du domaine de théorie des fonctions de la variable complexe, il aurait choisi un sujet où il pourrait montrer les progrès que permet de réaliser l'introduction de nouveaux outils mathématiques comme ceux élaborés par Nevanlinna dans sa théorie générale des fonctions méromorphes.

**La thèse d'Henri Cartan, un sujet de recherche particulier** Henri Cartan situe son mémoire de doctorat dans la continuité des théorèmes de Picard, Schottky ou Landau. Pourtant, son sujet de recherche se distingue parmi les cinq mémoires que j'ai considérés dans cette sous-partie. Henri Cartan cherche à généraliser aux fonctions holomorphes dans le cercle-unité, sans zéros dans ce domaine, le théorème de Borel<sup>329</sup> démontrant l'impossibilité d'une identité<sup>330</sup> de la forme :

$$X_1 + X_2 + \dots + X_p \equiv 0$$

pour des fonctions entières, sans zéros<sup>331</sup>. Il n'étudie donc pas explicitement des singularités essentielles de fonctions, il n'analyse pas non plus ni les façons dont des fonctions méromorphes tendent vers leur direction asymptotique ni la distribution des valeurs que prennent des fonctions méromorphes, holomorphes ou entières. La thèse de Cartan se distingue également par le jugement particulièrement positif qu'expriment Paul Montel, le rapporteur du mémoire, et Émile Picard, le président du jury, à son propos<sup>332</sup>.

---

328. Cf. LI et MARTZLOFF 1998, p. 184-185.

329. Cf. BOREL 1897.

330. appelée par Henri Cartan dans son mémoire *identité de Borel*, cf. CARTAN 1928, p. 3.

331. D'après Montel dans le rapport de thèse, on peut réécrire cette identité sous la forme :

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{p-1} \equiv 1$$

où les fonctions  $F_i$  sont des fonctions entières dépourvues de zéros.

332. Paul Montel souligne non seulement les méthodes entièrement originales utilisées par le docteur et ajoute que « l'ensemble du travail révèle un esprit inventif, pénétrant et juste et témoigne de connaissances étendues : il paraît porter la marque d'une intelligence mathématique de haute qualité ». Picard mentionne quant à lui la soutenance « très remarquable » d'Henri Cartan. Les autres rapports de thèses et de soutenances ne contiennent pas autant de louanges.

Comme l'affirme Henri Cartan dans l'avant-propos de son mémoire<sup>333</sup>, ce théorème équivaut dans le cas où  $p = 3$  au théorème de Picard sur le nombre de valeurs exceptionnelles que peut prendre une fonction entière. Henri Cartan mentionne alors la généralisation du théorème de Picard aux fonctions holomorphes admettant deux valeurs exceptionnelles dans le cercle unité que réalisent Schottky et Landau. Il rappelle également que, dans le cas où  $p = 3$ , la théorie des familles normales élaborées par Paul Montel permet d'établir un théorème plus général<sup>334</sup> selon lequel une famille de fonctions holomorphes, admettant deux valeurs exceptionnelles fixes finies, est normale<sup>335</sup>.

Généraliser à d'autres fonctions que les fonctions entières sans zéros le théorème de Borel relatif à l'identité de Borel est une question qui se pose pendant les années 1920, selon Henri Cartan. Elle se pose notamment sous la forme d'une généralisation à plusieurs fonctions du théorème de Schottky sur les fonctions holomorphes dans le cercle unité qui ne prennent pas certaines valeurs. C'est principalement sur cette dernière généralisation que travaille Henri Cartan.

Pour ce faire, il fonde ses recherches sur la voie entreprise par André Bloch, le premier à avoir publié sur ce thème dans BLOCH 1926<sup>336</sup>. Cherchant à généraliser les théorèmes de Borel et de Schottky, André Bloch établit, dans le cas où  $p$  dépasse 3, des théorèmes qui limitent les rayons d'existence des « identités de Borel » et qui majorent les premiers coefficients du développement en série de Taylor des fonctions par des termes dépendant des valeurs prises par ces fonctions à l'origine<sup>337</sup>. Le problème des travaux de Bloch réside dans les démonstrations incomplètes fournies par le mathématicien<sup>339</sup> et dans les conditions initiales restrictives imposées aux fonctions<sup>340</sup>.

333. Cf. CARTAN 1928, p. 1-2 et ce que confirme également Montel dans le rapport.

334. Henri Cartan l'appelle le *critère de P. Montel*.

335. Cf. CARTAN 1928, p. 2-3.

336. Cf. Henri Cartan dans l'introduction de sa thèse et Montel dans le rapport de thèse.

337. Henri Cartan (CARTAN, 1928, p.2) et Paul Montel dans le rapport le présentent ainsi, mais c'est aussi les termes qu'utilisent André Bloch, BLOCH 1926, p. 309. Le théorème principal trouvé par Bloch s'énonce comme suit<sup>338</sup> :

*Soient*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots; & g(x) &= b_0 + b_1x + \dots; & \dots; \\ k(x) &= e_0 + e_1x + \dots; \end{aligned}$$

*n fonctions d'une variable  $x$  holomorphes dans le cercle  $|x| < 1$ , ne s'y annulant pas, et dont la somme n'y devient pas égale à l'unité. Les termes constants  $a_0, b_0, \dots, e_0$  sont supposés différents de l'unité, et tels que la somme d'un nombre quelconque d'entre eux diffère de zéro et de l'unité.*

*Alors les coefficients  $a_1, b_1, \dots, e_1$  (et d'une manière plus générale les coefficients des termes de degré  $i$ ,  $a_i, b_i, \dots, e_i$ ) admettent une borne supérieure dépendant uniquement de  $a_0, b_0, \dots, e_0$  (et de  $i$ ).*

339. Comme Henri Cartan le mentionne dès l'avant-propos de son mémoire, CARTAN 1928, p. 3, les résultats de d'A. Bloch « ne lui paraiss[ent] pas démontrés de façon certaine ». Paul Montel confirme ce jugement dans le rapport et il y précise même que le lemme sur lequel Bloch fonde ses résultats n'est pas démontré par le mathématicien.

340. Un tel jugement est prononcé à la fois par Henri Cartan et par Paul Montel. André Bloch souligne également les limites de son théorème dans BLOCH 1926, p. 310.

Henri Cartan conserve alors la démarche générale adoptée par André Bloch mais il ne redémontre pas ses résultats. En outre, il adopte un point de vue plus général que celui de Bloch et « reprend la question du début »<sup>341</sup>. Il essaie d'obtenir dans le cas d'une identité à  $p$  termes,  $p \geq 3$ , un théorème analogue au critère de P. Montel dans le cas où  $p = 3$ , qu'il désigne par le nom de *critère de famille complexe normale*<sup>342</sup>. Il cherche ainsi à montrer que les systèmes  $(F_1, \dots, F_{p-1})$  correspondant à l'identité de Borel à  $p$  termes forment une famille complexe normale.

Henri Cartan utilise dans ses démonstrations les différentes fonctions et méthodes introduites par Rolf Nevanlinna dans sa théorie des fonctions méromorphes en 1925<sup>343</sup>. Il consacre d'ailleurs tout le premier chapitre de sa thèse à rappeler les résultats fondamentaux de cette théorie qu'il réutilise ensuite. Il réintroduit ainsi la fonction croissance  $T(r, f)$ , la valeur moyenne logarithmique  $m(r, f)$  et certaines de leurs propriétés<sup>344</sup>.

En étudiant la croissance des fonctions envisagées dans le cas le cas d'une identité de Borel avec les outils fournis par la théorie de Nevanlinna, Henri Cartan démontre et généralise un lemme « fondamental » de Bloch<sup>345</sup>. Il en déduit un critère de famille normale pour les systèmes de fonctions assujetties à des conditions assez larges<sup>346</sup> dans le cas où le nombre de fonctions intervenant dans l'identité de Borel dépasse 4. D'après Paul Montel, ce critère constitue le résultat principal de son mémoire. Henri Cartan montre enfin l'utilité de son critère de famille complexe normale en l'appliquant dans son manuscrit à la résolution de divers problèmes d'unicité dans la théorie des fonctions méromorphes, posés par Rolf Nevanlinna. Il s'agit de déterminer une fonction méromorphe par la connaissance d'ensembles de la forme  $E(a)$ , où  $E(a)$  désigne l'ensemble des zéros de  $f(x) - a$ <sup>347</sup>.

Quatre des cinq doctorats de ce premier groupe de thèses classées en théorie des fonctions de la variable complexe<sup>348</sup> traitent de sujets similaires : l'étude de la croissance du module de fonctions analytiques, de l'ordre de ces fonctions, de la distribution

341. Cf. CARTAN 1928, p. 3.

342. Cf. CARTAN 1928, p. 3. La solution de ce problème entraîne d'ailleurs la solution à certaines questions étudiées par André Bloch, d'après Henri Cartan.

343. dans « Zur Theorie der meromorphen Funktionen », *Acta mathematica* 46 (1925) 1-99. Pour plus de précisions, cf. le bilan historiographique p. 263.

344. D'un point de vue chronologique, la thèse d'Henri Cartan est la première thèse de sciences mathématiques qui fait référence à cette théorie et qui l'utilise, trois ans après sa première publication dans un périodique. C'est peut-être la raison pour laquelle il en rappelle les éléments essentiels qu'il utilise. Ce rappel faciliterait la bonne compréhension de son travail. On peut noter par ailleurs que dès 1926, André Bloch utilise également dans ses travaux les principaux résultats de cette théorie de Nevanlinna.

345. Selon les termes de Paul Montel dans le rapport sur la thèse de Cartan.

346. C'est ainsi que le résume Paul Montel dans son rapport et c'est ce que dit explicitement Henri Cartan dans son mémoire CARTAN 1928, Théorème II, p.17.

347. Henri Cartan y consacre tout le dernier chapitre de sa thèse, CARTAN 1928, p. 75-92.

348. Ceux de Valiron, de Milloux, de Rauch et de King-Lai Hiong.



des valeurs de ces fonctions. Ils ont la même origine dans les travaux de Picard, Borel, Landau et Schottky. On constate une certaine continuité entre eux bien que certaines notions et méthodes utilisées évoluent et se renouvellent. Valiron ne considère ainsi que les fonctions entières alors que tous les autres s'intéressent également aux fonctions méromorphes ou holomorphes, parfois uniquement définies sur le cercle unité. De plus, au fur et à mesure des soutenances, les doctorants s'approprient de nouvelles théories, la plus marquante étant celle de Nevanlinna sur les fonctions méromorphes. Valiron apparaît dans ces quatre thèses à différentes fonctions. Il est doctorant et ses publications sont ensuite citées dans les trois autres doctorats. La dernière thèse du groupe, celle d'Henri Cartan aborde un sujet particulier par rapport à ceux traités dans ces quatre précédentes thèses. Cependant, il s'intéresse également aux notions telles que l'ordre d'une fonction et situe l'origine de son sujet dans les travaux de Picard, Landau et Schottky. Il intègre également les apports de la théorie de Nevanlinna. Mais c'est le seul à faire référence à la théorie des familles normales de Paul Montel.

L'étude du corpus des thèses avec le troisième niveau d'analyse permet ainsi de saisir un élan de la recherche en théorie des fonctions de la variable complexe de l'entre-deux-guerres qui a pour source les théorèmes de Picard. Par l'examen des sources et des références des doctorants, par l'analyse de leurs résultats, j'ai montré comment cet élan entraîne l'étude de nouveaux sujets, comme celui des cercles de remplissage, et intègre de nouvelles théories.

Comme le révèle l'analyse des thèses, cet élan a son origine dans les travaux de la fin du XIX<sup>ème</sup> et du début du XX<sup>ème</sup> siècle. À cette époque un plus grand nombre de thèses en théorie des fonctions de la variable complexe portaient sur le type de sujets abordés dans les cinq doctorats de ce groupe<sup>349</sup>. Il apparaît ainsi que cette direction de recherche s'essouffle quelque peu dans l'entre-deux-guerres. Après 1934, aucune thèse classée en théorie des fonctions de la variables complexes ne le prolonge.

L'analyse du corpus de thèses à cette focale fait également apparaître deux rôles joués par les références mathématiques. On distingue ainsi d'une part les références utilisées dans les preuves mathématiques. Il s'agit de résultats mathématiques dont se servent les doctorants pour élaborer leurs propres propositions. D'autre part, les citations de résultats servent également à conforter la nouvelle théorie énoncée par le doctorant. Milloux, par exemple, retrouve des propositions déjà énoncées par d'autres mathématiciens avec des approches et des méthodes différentes. La comparaison avec ces recherches antérieures lui permet alors d'apporter une preuve de la validité de sa propre théorie.

---

349. Cf. GISPert (1991) et les rapports de thèses qui y sont retranscrits. Walter Hayman affirme de plus dans HAYMAN 1994, p. 374 que près de la moitié des thèses de théorie des fonctions de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle débutaient par « Il suit du théorème célèbre de M. Picard ... ».

### À partir du théorème de représentation conforme : la référence à Montel puis à Ahlfors

La deuxième tendance forte en théorie des fonctions que j'ai identifiée en dressant le bilan historiographique est constituée par les travaux ayant pour source le théorème de représentation conforme de Riemann de 1851. Ils se caractérisent par une approche plus géométrique des questions d'analyse : l'intérêt est davantage porté sur des propriétés de représentation conforme, des propriétés topologiques des domaines décrits par les valeurs des fonctions holomorphes ou méromorphes. Parmi les domaines et théories travaillées dans cette tendance figurent notamment la théorie des fonctions univalentes ou multivalentes, la représentation conforme de domaines particuliers ou encore les surfaces de Riemann. Ces trois thèmes sont abordés respectivement par les trois autres groupes de thèses à l'intérieur de l'ensemble des mémoires liés à l'étude de propriétés générales des fonctions de la variable complexe<sup>350</sup>. Le nombre de doctorats soutenus dans chacun de ces groupes est respectivement 3 (Dieudonné, Marty, Hibbert), 2 (de Possel et Ferrand) et 2 (Charles Blanc et Dufresnoy).

Une différence entre ces sept doctorats et les cinq du précédent groupe réside dans la faible place accordée aux rappels historiques remontant à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle dans les introductions. Mis à part Jacques Dufresnoy en 1942, aucun autre doctorant ne consacre plus de quelques lignes<sup>351</sup> à introduire historiquement son sujet et aucun ne mentionne les théorèmes de Picard ou les travaux de Borel ou Hadamard. Aucun ne cite non plus le théorème de représentation conforme de Riemann, dont le bilan historiographique a pourtant montré qu'il était à la source des sujets de leur sujet. Le problème étudié est présenté, les questions mises dans leur contexte mathématique, mais les étudiants ne situent pas historiquement leur sujet. On peut voir une explication à cette différence dans la nature des questions auxquelles ils s'intéressent : il s'agit de sujets nouveaux, d'approches nouvelles, qui ne trouvent pas leur origine dans les travaux français en théorie des fonctions complexes de la fin du XIX<sup>ème</sup> et du début du XX<sup>ème</sup> siècle, travaux qui ont connu une forte et longue reconnaissance internationale.

### La théorie des fonctions univalentes ou multivalentes à partir de Paul Montel

La théorie des fonctions univalentes ou multivalentes, qui constitue le sujet principal de trois thèses, est ainsi un sujet nouveau et émergent dans les années 1930. En effet si on procède à une recherche dans le *Jahrbuch* sur les titres de travaux mathématiques contenant le terme « univalentes », on constate que les 36 publications recensées datent

350. Cf. p. 252 de cette présente thèse.

351. Voir aucune comme dans le mémoire de Lucien Hibbert.

toutes des années 1930<sup>352</sup> et il en est de même pour les résultats de la recherche sur les termes « multivalentes » ou « multivalence ».

Les deux premiers doctorats, écrits par deux normaliens, Jean Dieudonné et Frédéric Marty sont soutenus la même année, en 1931 ; celle de Lucien Hibbert ne l'est que sept ans après, en 1938<sup>353</sup>.

Les mémoires de Dieudonné et de Marty sont pourtant différents dans leur approche du problème. Dans celui de Dieudonné<sup>354</sup>, on retrouve une trace des intérêts de recherche du groupe précédent de thèses. L'une des questions étudiées porte ainsi sur la distribution des valeurs prises par les fonctions de la variable complexe. Les méthodes utilisées par Dieudonné diffèrent cependant des travaux précédents et il ne se restreint pas à cet ordre de questions, comme il le précise dès les premières lignes de son mémoire<sup>355</sup>. Il parle notamment d'une « deuxième catégorie » de questions, qui, elle, relève d'une approche plus géométrique. Pour le doctorant,

« [les questions] peuvent se ranger en deux catégories [...] : d'une part, on étudie la répartition des points où la fonction prend une valeur déterminée ; de l'autre, on recherche la nature des domaines engendrés par les valeurs de la fonction, en s'attachant en particulier à préciser les conditions auxquelles ces domaines ne se recouvrent pas eux-mêmes, ou recouvrent toute portion du plan au plus un nombre déterminé de fois. Quant aux hypothèses faites sur les fonctions étudiées, elles ont trait, en général, soit aux coefficients de leur développement autour d'un point du domaine considéré, soit à des limitations globales imposées aux fonctions dans ce domaine. »<sup>356</sup>

Dans le cadre de sa thèse, Jean Dieudonné s'intéresse donc à ces deux catégories de questions pour des fonctions particulières : les polynômes et les fonctions bornées.

La première partie de son mémoire porte sur des questions relevant de la première catégorie et ne concernant pas la théorie des fonctions univalentes. Il étudie tout d'abord un problème formulé à l'origine par Paul Montel sur la résolution d'une équation polynomiale<sup>357</sup> :

« Si on met l'équation sous la forme :

$$1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p + a_{p+1}x^{n_{p+1}} + \dots + a_{p+k}x^{n_{p+k}} = 0 ;$$

---

352. Il s'agit de publications écrites non seulement par des mathématiciens français tels que Jean Dieudonné, Szolem Mandelbrojt, Henri Cartan et surtout Paul Montel ou encore Mieczysław Biernacki mais également par d'autres tels que Lavrentieff, Visser, Rosenblatt et enfin Wolff.

353. Notons que ce dernier n'est pas normalien mais un étudiant d'origine haïtienne, ancien membre du gouvernement haïtien, comme l'indique l'inscription qu'il écrit sur son manuscrit de thèse.

354. *Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe*, 1931.

355. Cf. DIEUDONNÉ 1931b, p. 1-2.

356. Cf. DIEUDONNÉ 1931b, p. 1-2.

357. MONTEL 1923, p. 1 et DIEUDONNÉ 1931b, p. 6.

et si on se donne  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , ( $a_p \neq 0$ ), il y a toujours  $p$  racines de l'équation inférieures en module à un nombre fixe  $\phi(a_1, a_2, \dots, a_p, k)$  ne dépendant que des coefficients donnés et du nombre de termes du polynômes. »

Jean Dieudonné cherche dans un premier temps à obtenir la limite exacte des modules de  $1, 2, \dots, (p-1)$  ou  $p$  racines<sup>358</sup>, c'est-à-dire à déterminer des régions du plan complexe contenant toujours des racines d'une équation algébrique d'un certain type. Il fonde alors ses recherches essentiellement sur les travaux récents de Montel, de Van Vleck et de Biernacki. Jean Dieudonné cite quelques résultats déjà obtenus sur cette question par Montel et Van Vleck, Paul Montel étant celui qui l'a travaillée le premier<sup>359</sup>. Mais il fait surtout référence à la thèse de Miecislav Biernacki, *Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires*, 1927<sup>360</sup>. Le point de départ des recherches de Dieudonné est ainsi un théorème, démontré par Biernacki, relatif à la limite exacte des modules de  $1, 2, \dots, (p-1)$  ou  $p$  racines de l'équation précédente<sup>361</sup> et il reprend explicitement dans ses démonstrations certaines approches de ce dernier<sup>362</sup>.

Les méthodes utilisées par Dieudonné dans son étude de ce premier problème sont de nature algébrique. Elles sont basées sur l'emploi de déterminants, sur la résolution de systèmes linéaires, sur l'utilisation des formules de Newton pour les polynômes et des fonctions symétriques des racines. Dieudonné exploite en fait la nature polynômiale des fonctions étudiées et on ne les retrouve utilisées dans aucune autre thèse de théorie des fonctions de l'entre-deux-guerres<sup>363</sup>.

Dieudonné étudie ensuite plus particulièrement l'équation quadrinôme suivante :

$$1 + x^p + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} = 0.$$

Il cherche à déterminer le nombre minimum de racines de cette équation situées dans le cercle unité dans le cas où  $p$ ,  $n_1$  et  $n_2$  sont fixés et  $a_1$  et  $a_2$  varient arbitrairement. Il

358. Il entend par *limite exacte* de  $p$  racines, « la valeur  $|x| = \rho$  telle que toute équation de la famille [de polynômes] considérée ait  $p$  racines des modules inférieurs à  $\rho$ , et qu'on puisse trouver une telle équation ayant moins de  $p$  racines inférieures ou égales en module à  $\rho - \epsilon$ ,  $\epsilon$  étant un nombre positif arbitrairement petit. »

359. Les résultats obtenus par Van Vleck dans VAN VLECK 1925 concernent le problème énoncé ci-dessus. Le point de départ de ses recherches se trouve dans les résultats déjà établis par Montel. Il propose une approche différente afin de les préciser et de les améliorer. Ainsi, pour obtenir une estimation du module maximal de  $p$  plus petites racines de l'équation quand le degré est donné, il considère les fonctions symétriques des racines du polynômes. C'est d'ailleurs une des méthodes que reprend Dieudonné dans sa thèse.

360. Ce travail est classé par le *Jahrbuch* en « arithmétique et algèbre » et il est analysé dans le chapitre précédent, dans la section 4.2.3, p. 163. Biernacki y étudie des questions portant exclusivement sur les polynômes et sur leurs racines sans faire de lien explicite avec des questions théoriques relatives à d'autres classes de fonctions plus générales.

361. Cf. DIEUDONNÉ 1931a, p. 253.

362. Cf. par exemple DIEUDONNÉ 1931a, p. 264.

363. La nature algébrique de ces méthodes est d'ailleurs confirmée par l'introduction du mémoire de Montel, MONTEL 1923, p. 1, que cite Dieudonné à plusieurs reprises. Montel présente dans ce mémoire le problème étudié par le doctorant et « se propose d'établir quelques théorèmes d'algèbre d'un caractère élémentaire donnant des limites supérieures des modules de certains zéros de[s] polynômes. »

part, ici aussi, de résultats énoncés par Biernacki. Ce dernier a, dans sa thèse, résolu une telle question dans le cas des équations trinômes et il a donné quelques résultats pour les équations quadrimômes<sup>364</sup>.

Cependant, si les travaux de Biernacki sont cités pour faire le point des résultats déjà obtenus, ils ne sont pas directement repris. L'approche de Dieudonné est différente pour résoudre ce problème particulier. Dans toute sa démonstration, il ne cite d'ailleurs aucune publication ayant pu influencer sa démarche. Il se contente de retrouver par son approche, qu'il présente comme inédite, les résultats sur les équations trinômes déjà énoncés par Biernacki et également par Herglotz<sup>365</sup>. Dieudonné définit des formules analogues à celle de Cauchy donnant le nombre des racines d'une équation dans un contour<sup>366</sup>. Il introduit des indices qui sont définis non pas pour des courbes du plan complexe comme dans les formules de Cauchy mais pour des domaines situés sur les feuillettes d'une certaine surface de Riemann relative à une certaine fonction  $\phi(z)$ , méromorphe sur le cercle unité. Il les généralise au cas où la fonction  $\phi(z)$  admet dans le cercle unité des déterminations se permutant entre elles, ce qui lui permet d'introduire la fonction  $\phi(z)$  à partir des données de l'équation quadrimôme<sup>367</sup>.

Les autres parties de son mémoire, beaucoup plus courtes, portent sur des questions d'univalence et de multivalence pour des familles de polynômes puis pour des familles de fonctions bornées<sup>368</sup>. Dieudonné reprend les notions de  $p$ -valence et d'univalence telles qu'elles sont définies par Paul Montel<sup>369</sup>. Il se sert également d'un théorème de ce dernier sur la  $p$ -valence de la limite uniforme d'une suite de fonctions holomorphes et au plus  $p$ -valentes dans un domaine  $D$ <sup>370</sup> pour simplifier la question qu'il étudie. Il se limite ainsi à la recherche du rayon d'univalence d'un polynôme

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

---

364. Il y a notamment démontré que toute équation quadrimôme du type ci-dessus, dans le cas où  $p < n_1 < n_2 < 2p$ , « a toujours une racine au moins dans le cercle unité », cf. DIEUDONNÉ 1931a, p. 280.

365. dans « Über die Wurzeln trinomischer Gleichungen », *Leipziger Berichte, Math. - Phy. Classe* 74 (1922) 1-8.

366. Cf. DIEUDONNÉ 1931a, p. 282.

367. Pour ce faire, il restreint d'ailleurs le problème au problème aux équations quadrimômes pouvant être ramenées à la forme suivante

$$1 + x^2 p + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} = 0$$

quand  $2p < n_1 < n_2$  et où  $p, n_1$  et  $n_2$  sont premiers dans leur ensemble.

C'est ainsi qu'il décrit et explicite sa méthode dans son manuscrit, cf. DIEUDONNÉ 1931b, p. 284-288. Dans l'introduction de sa thèse, il la décrit d'ailleurs comme « une transformation de la formule de Cauchy » et affirme qu'elle est « déduite du « principe de l'argument » de Cauchy », cf. DIEUDONNÉ 1931a, p. 248.

368. Pour les définitions des fonctions univalentes et  $p$ -valentes, cf. p.266.

369. Cf. DIEUDONNÉ 1931a, p. 338.

370. Cf. DIEUDONNÉ 1931a, p. 309. Dieudonné cite alors MONTEL 1925.

alors qu'initialement il étudiait la question pour une fonction  $f(z)$  holomorphe dans le cercle unité et représentée par son développement de Taylor. Mis à part ces deux citations, Dieudonné ne se réfère explicitement à aucun des travaux de Montel dans ses démonstrations. Il ne mentionne un résultat de Paul Montel qu'à une seule autre occasion lors de l'application de certains de ses résultats obtenus pour les familles de fonctions holomorphes et bornées. Il redémontre et améliore un théorème énoncé par Paul Montel sur les zéros de la dérivée d'une fonction holomorphe dans une ellipse et y vérifiant certaines conditions<sup>371</sup>. Ce n'est d'ailleurs pas une publication de Montel qu'il cite comme livre de référence sur la théorie des fonctions, mais un ouvrage de Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie* t.2 (1931), (2<sup>e</sup> édition)<sup>372</sup>.

La recherche du rayon d'univalence pour un polynôme<sup>373</sup> est l'occasion de mettre en oeuvre simultanément des méthodes de nature différente. Dieudonné reprend ainsi des résultats de Szëgo sur l'expression de racines de certaines équations polynômiales. En s'intéressant plus particulièrement à des polynômes à coefficients réels, il utilise des résultats importés de la théorie des polynômes trigonométriques et reprend certains travaux de Féjer. Enfin, il se fonde sur des travaux de Bieberbach et reprend notamment le théorème de Koebe-Bieberbach sur les domaines couverts par les fonctions univalentes.

Il s'attache enfin, dans une dernière partie, à démontrer certaines propriétés de familles de fonctions bornées. Son principal travail consiste à déterminer le minimum du rayon de  $p$ -valence d'une fonction bornée dans le cercle unité, s'annulant en 0 et telle que  $f'(0) = 1$ <sup>374</sup>. Dieudonné fonde ici ses recherches sur le lemme de Schwarz<sup>375</sup> et sur l'application qu'en a faite Schur pour déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction dont on donne les coefficients du développement en série de Taylor soit bornée. Il applique ensuite ses résultats pour retrouver des résultats d'autres mathématiciens tels que Landau sur la même question de rayon minimum d'univalence ou encore celui de Montel évoqué précédemment.

371. Cf. DIEUDONNÉ 1931a, p. 355-358. Dieudonné cite alors l'article Paul Montel, MONTEL 1930.

372. L'année précédant sa soutenance de thèse, en 1930-1931, Dieudonné a travaillé à Berlin auprès de ce mathématicien grâce à une bourse (Natural Science Division) accordée par la fondation Rockefeller, cf. SIEGMUND-SCHULTZE 2001, p. 299-301, ce qui explique sans doute la référence à cet ouvrage. Signalons que Montel s'est également rendu pendant cette année à Zürich pour travailler auprès de Polya. Ce dernier a écrit des ouvrages en collaboration avec Szëgo notamment un, PÓLYA et SZEGÖ 1925, que reprend Dieudonné. C'est donc peut-être à l'occasion de son séjour à Zürich, que Dieudonné a connu les travaux de Szëgo.

373. Dont il donne une caractérisation et même des valeurs numériques dans certains cas particuliers.

374. Il s'agit de la classe de famille  $(E_M)$  dans le travail de Dieudonné, DIEUDONNÉ 1931a, p. 338-340.

375. La formulation du lemme de Schwarz utilisée par Dieudonné est celle relative aux fonctions holomorphes bornées par  $M$ , DIEUDONNÉ 1931a, p. 339 : si  $f(z)$  est une fonction holomorphe bornée dans le cercle unité par  $M$  et telle que  $f(z) = 0$  alors la fonction  $\frac{f(z)}{z}$  est holomorphe et bornée par  $M$  dans le cercle unité et inversement.

Dans sa thèse, Dieudonné étudie donc certaines questions qui ont pour origine des travaux de Montel et il reprend des notions introduites par le mathématicien. Mais dans aucune de ses parties, il ne fonde ses recherches sur les travaux récents du mathématicien. Dans sa première partie, essentiellement consacrée à l'étude des racines d'équations polynômiales de type particuliers, il prend pour point de départ les résultats présentés par Biernacki dans sa thèse<sup>376</sup>. Dans les deux dernières parties de son travail consacrées à la recherche de rayon d'univalence ou de  $p$ -valence pour des polynômes ou pour des familles de fonctions bornées, Dieudonné utilise et reprend des résultats et des méthodes de plusieurs mathématiciens étrangers comme Bieberbach, Schur ou Szëgo par exemple. L'influence des mathématiques étrangères est importante dans les recherches que Dieudonné présente. Celle des mathématiques de Paul Montel semble faible, alors qu'à la fin des années 1920 il est le principal mathématicien français à travailler ce domaine<sup>377</sup>. Les séjours à l'étranger effectués par le doctorant, à l'université de Princeton en 1928-1929<sup>378</sup>, à Berlin et à Zürich en 1930-1931<sup>379</sup>, semblent avoir eu un rôle certain dans l'apprentissage de ces théories par Dieudonné. Il est également possible que le doctorant les ait connues au séminaire Hadamard; cependant les résumés des conférences dans les *Annales du Collège de France* ne permettent pas de le savoir<sup>380</sup>.

Les différentes parties de sa thèse, même si elles semblent traiter de questions différentes, sont reliées. Certaines expressions des rayons d'univalence ou de multivalence trouvées dans les dernières parties de son travail s'obtiennent par la résolution d'équation polynomiale effectuée dans la première partie. Cependant, le travail de Dieudonné sur les polynômes ne sera pas repris dans d'autres thèses de théorie des fonctions pendant l'entre-deux-guerres. En revanche certains de ses résultats sur les questions d'univalence et de multivalence de fonctions seront repris, notamment dans la thèse de Frédéric Marty.

En effet, dans son doctorat<sup>381</sup>, Frédéric Marty, s'intéresse également à la théorie des fonctions univalentes ou  $p$ -valentes dont il reprend la terminologie de Paul Montel.

---

376. C'est d'ailleurs ainsi qu'elle est présentée par Biernacki dans les *Selecta, Cinquantenaire scientifique de Paul Montel*, cf. MONTEL 1947b, p. 226. Commentant l'article qu'a écrit Montel sur les polynômes, MONTEL 1923, Biernacki écrit que la thèse de Jean Dieudonné est « inspirée, elle aussi, [...] par les travaux de Montel » et que Dieudonné continue dans son travail des recherches de M. Biernacki, notamment sur l'équation quadrinôme.

377. Selon le bilan historiographique de la première partie, le nom du mathématicien est le seul nom français évoqué pour la théorie des fonctions univalentes et multivalentes. De plus, en regardant les bibliographies d'analystes français de la période, Montel, Valiron, Denjoy, Julia, etc., les seuls travaux relatifs à cette théorie sont écrits par Montel.

378. Selon les indications biographiques qu'il a lui-même indiqué dans DIEUDONNÉ 1994, il y a obtenu une bourse d'études.

379. Avec la bourse Rockefeller évoquée précédemment.

380. Ces résumés sont en général très succints et ne détaillent pas le contenu des mémoires scientifiques analysés lors des séances.

381. *Recherches sur la répartition des valeurs d'une fonction méromorphe*, 1931.

Il décrit les premiers problèmes étudiés dans son doctorat comme appartenant aux deux catégories suivantes<sup>382</sup> :

- Un domaine  $D$  étant donné, quelles propriétés peut-on déduire pour une famille de fonctions si elles vérifient une propriété de valence dans ce domaine ?
- Une famille de fonctions étant donnée, que peut-on dire sur les domaines de  $p$ -valence de forme donnée des fonctions de la famille ?

Il cite ensuite les principaux travaux déjà existants sur ces questions. Il mentionne ceux de Paul Montel<sup>383</sup> et d'André Bloch<sup>384</sup>. Il cite également la thèse de Jean Dieudonné.

S'il mentionne ces travaux, il ne s'en inspire pas directement dans ses recherches et ne reprend pas leurs méthodes. Il le revendique d'ailleurs explicitement en affirmant qu'il « étudie tout d'abord des problèmes de ces deux catégories *par des méthodes nouvelles* »<sup>385</sup>.

La première partie de son travail est ainsi consacrée à l'introduction d'une nouvelle notion, la notion de *dérivée sphérique* qu'il définit pour l'ensemble des fonctions méromorphes. Cette nouvelle notion est fondée sur la considération des fonctions méromorphes comme définissant une correspondance de sphère de Riemann à sphère de Riemann et elle découle de la notion de distance sphérique sur une sphère de Riemann, définie par Ostrowski, selon Frédéric Marty<sup>386</sup>. La dérivée sphérique est alors l'analogue de la dérivée habituelle, mais vue comme la limite du rapport de deux arcs infiniment petits correspondants tracés sur les sphères de Riemann. Elle est donnée par la formule suivante dans le cas où la fonction est holomorphe au point considéré, MARTY 1931a, p. 187<sup>387</sup> :

$$\mathcal{D}f(z_0) = |f'(z_0)| \frac{1+|z_0|^2}{1+|f(z_0)|^2}$$

Frédéric Marty étudie les propriétés de cette nouvelle fonction et montre son rôle pour caractériser l'univalence locale de la fonction. Il consacre ensuite toute une partie de son mémoire à appliquer cette notion à différentes familles de fonctions méromorphes. Il énonce ainsi de nouveaux critères de familles normales et de familles quasi-normales, où la dérivée sphérique intervient explicitement. À cette occasion, il rappelle certains résultats déjà énoncés par Paul Montel dans MONTEL 1927 et les

382. Cf. MARTY 1931a, p. 183-184.

383. Montel Paul, *Leçons sur les familles normales*, Paris, Gauthier-Villars, 1927.

384. Bloch André, *Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle unité*, Mémorial des sciences mathématiques, Fasc.XX, Paris Gauthier-Villars, 1926.

385. Cf. MARTY 1931a, p. 184.

386. Frédéric Marty se réfère directement à une publication du mathématicien « Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes », *Mathematische Zeitschrift* 24 (1926) 215-258, cf. MARTY 1931a, p. 187-190. La notion de *distance sphérique* de deux points sur la sphère est définie comme la longueur du plus petit arc de grand cercle qui les joint.

387. Frédéric Marty généralise également la formule au cas où la fonction est méromorphe et où le point est à distance finie, cf. MARTY 1931a, p. 187.



reformule en utilisant la notion de dérivée sphérique<sup>388</sup>. Il relie également ces différents critères à des hypothèses de valence formulées sur les familles de fonctions<sup>389</sup>.

Dans un deuxième temps de son mémoire, Frédéric Marty introduit une décomposition du domaine de définition  $D$  d'une fonction méromorphe uniforme en cellules d'univalence<sup>390</sup>. Il introduit les notions de cellules homologues à partir de la notion de points homologues<sup>391</sup>. Il montre ainsi que le domaine de méromorphie d'une fonction se décompose en cellules d'univalence pour la fonction et que « ou bien deux cellules sont complètement homologues, ou bien aucun point de l'une n'a d'homologue dans l'autre ». Il énonce également la condition nécessaire et suffisante pour que deux cellules soient homologues : il faut et il suffit que « leurs contours soient complètement homologues »<sup>392</sup>. Marty étudie enfin les valeurs prises par la fonction dans les cellules d'univalence<sup>393</sup>.

Durant tout l'énoncé de cette théorie, Frédéric Marty ne se réfère à aucun autre mathématicien, ni à aucune autre théorie mathématique. La notion de dérivée sphérique et ses propriétés y jouent un rôle central. Sa théorie est construite parallèlement à la théorie des surfaces de Riemann d'une fonction méromorphe. Il le revendique expli-

388. Cf. par exemple MARTY 1931a, p. 187.

389. Par exemple, il donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que toute fonction limite extraite d'une famille normale dans un domaine  $D$  soit univalente dans  $D$ , MARTY 1931a, p. 191. En considérant des familles de fonctions à valence bornée, il donne aussi des conditions pour que ces familles soit normales ou quasi-normales et il donne des résultats sur le nombre de points irréguliers de cette famille, cf. MARTY 1931a, p. 202-212. Signalons que pour ces résultats sur les critères de normalité et de quasi-normalité, la thèse de Marty est mentionnée à plusieurs reprises dans les commentaires des articles de Paul Montel sélectionnés pour les *Selecta* du mathématicien. Henri Milloux dans son commentaire à l'article de Paul Montel, *Sur les familles normales de fonctions analytiques* (MONTEL, 1947b, p.58) souligne ainsi que « la considération de l'ensemble des fonctions méromorphes univalentes dans le cercle unité, normalisées à l'origine, [a conduit Montel] à des propriétés simples du domaine couvert par les valeurs de chaque fonction », propriétés que Milloux affirme être à l'origine de Marty. De même, p.59 et 61, il évoque la contribution de Marty à la définition de critères de normalité par l'« introduction du domaine Riemannien ». Georges Valiron dans son commentaire à l'article de Paul Montel *Sur les familles quasi-normales de fonctions analytiques*, MONTEL 1947b, p. 83, mentionne les critères de familles quasi-normales que Marty donne dans sa thèse qui viennent compléter ceux de Paul Montel et ceux de Georges Valiron.

390. Il définit les cellules d'univalence et il donne également la généralisation de la décomposition cellulaire à une fonction algébroïde dans un domaine  $D$ , MARTY 1931a, p. 238.

391. Selon MARTY 1931a, p. 215, « deux points d'un domaine  $D$  sont dits *homologues* par rapport à  $f(z)$ , ou plus brièvement *homologues* s'il n'y a pas de confusion possible, lorsque  $f(z)$  prendra la même valeur en ces deux points ». Il désigne par *cellules homologues* (p.224), « deux cellules telles que toute valeur prise dans l'une soit prise dans l'autre ».

392. Cf. MARTY 1931a, p. 230 où Frédéric Marty après des résultats préliminaires énonce ces résultats dans le cas le plus général où la fonction méromorphe  $f(z)$  ne vérifie aucune condition particulière sur son domaine  $D$ .

393. Il énonce ainsi le théorème suivant MARTY 1931a, p. 232 :

« Si une cellule, intérieure au domaine fermé  $D$ , est homologue de toutes les cellules contiguës, la fonction  $f(z)$  représente cette cellule sur la sphère toute entière, affectée d'une coupure. »

Le terme *cellules contiguës* à une cellule  $D$  désigne les cellules dont le contour a au moins un point commun avec ( $d$ ).

citement et compare sa propre décomposition cellulaire à la décomposition en feuillets qui découle d'une étude de la surface de Riemann. Il montre d'ailleurs que « ses considérations permettent de retrouver directement cette décomposition »<sup>394</sup> et il retrouve certains résultats déjà obtenus par d'autres auteurs à partir des surfaces de Riemann<sup>395</sup>.

Marty ancre ainsi son travail dans un sujet de recherche contemporain du milieu mathématique à la fin des années 1920, la recherche sur les surfaces de Riemann. De plus, il souligne à plusieurs reprises le caractère topologique de ses résultats, qu'entraîne sa décomposition en cellules<sup>396</sup>. Son mémoire se situe donc dans une tendance de la recherche à utiliser une approche géométrique et topologique en théorie des fonctions de la variable complexe<sup>397</sup>.

Enfin dans un dernier temps de son mémoire, Frédéric Marty étudie les fonctions d'automorphie d'une fonction  $f(z)$ <sup>398</sup> et les groupes d'automorphie de cette fonction. Il s'intéresse particulièrement au cas où la fonction admet un groupe d'automorphie régulier. Il cherche à étendre la théorie de Giraud sur les groupes à fonctions d'automorphie uniforme<sup>399</sup>. Il donne alors une nouvelle décomposition en domaines fondamentaux du domaine, distincte de celle qu'il a précédemment établie. Il cherche enfin à étendre la méthode des séries  $\theta$  de Poincaré à des groupes d'automorphie composés de fonctions non uniformes.

Frédéric Marty s'intéresse pour l'essentiel à des questions d'univalence pour les fonctions. Son approche est cependant différente de celle de Dieudonné. Il cite, en introduction, les travaux de ce dernier comme les travaux de Paul Montel et d'André Bloch, mais il n'en reprend aucun directement dans le corps du mémoire. Cette caractéristique se retrouve dans les différentes parties de son travail : son travail est ancré dans les intérêts de la recherche mathématique contemporaine mais Marty propose une approche originale dans la résolution des problèmes. Par exemple, la décomposition du

394. Cf. MARTY 1931a, p. 240.

395. Ainsi dès l'introduction de la thèse MARTY 1931a, p. 185, Frédéric Marty précise dans la description de ses résultats du Chapitre III qu'il y montre, « comment, en partant de la notion de cellule, on peut décomposer le domaine d'existence de la fonction en domaines fondamentaux, qui mettent en évidence, comme la surface de Riemann, la structure de la fonction étudiée ; [...] Certains résultats du chapitre II et du chapitre III ont d'ailleurs déjà été obtenus par divers auteurs à partir des surfaces de Riemann ». Il développe cette considération au début du chapitre III, MARTY 1931a, p. 240. Il cite alors des résultats de Radoïtchich sur la décomposition en feuillets de la surface de Riemann qu'il retrouve par un procédé de regroupement de cellules univalentes non homologues (MARTY, 1931a, p.242). Il évoque également le théorème d'Iversen montrant que toute valeur exceptionnelle d'une fonction méromorphe est valeur asymptotique. Marty affirme que ce théorème peut être mis en évidence sur une cellule univalente isolée (MARTY, 1931a, p.245).

396. Cf. MARTY 1931a, p. 239, p.244.

397. Cette tendance est notamment mise en évidence par le bilan historiographique réalisé dans la partie précédente.

398. Cf. MARTY 1931a, p. 246. Une fonction d'automorphie est définie par l'équation fonctionnelle :  $f(H(z)) = f(z)$ .

399. Il cite l'ouvrage de Georges Giraud, *Leçons sur les fonctions automorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1920.

domaine d'existence d'une fonction méromorphe en cellules univalentes est revendiquée comme inédite par le doctorant. Il propose une approche topologique de la structure de la fonction. Il rapproche d'ailleurs sa théorie de la décomposition en feuillets de la surface de Riemann d'une fonction et compare la notion de polygone fondamental à celle de cellule univalente. Cette décomposition et cette notion de cellules univalentes est ensuite reprise dans un autre doctorat français, celui de Lucien Hibbert en 1937. Ce dernier reprend également quelques résultats sur les groupes de fonctions d'automorphie que Marty établit à la fin de son mémoire.

Dans sa thèse<sup>400</sup>, Lucien Hibbert s'intéresse exclusivement à l'étude des lignes d'égal module et des lignes d'égal argument d'un polynôme et de sa fonction inverse. C'est-à-dire qu'il regarde les familles de courbes  $R = cste$  et  $V = cste$  où si  $P(z)$  est le polynôme étudié,  $R(z) = |P(z)|$  et  $V(z) = \arg(P(z))$ . C'est seulement dans le dernier chapitre de son mémoire qu'il généralise les résultats obtenus pour les polynômes aux fonctions entières.

La première partie du travail est consacrée à l'étude des familles de courbes au voisinage de points particuliers du polynôme tels que les zéros du polynôme ou les zéros de sa dérivée. Le doctorant ne se réfère alors explicitement à aucune autre publication mathématique.

Il regarde ensuite le réseau formé par les deux familles de courbes. À l'aide de ce réseau, il définit des domaines particuliers du plan qu'il compare aux cellules univalentes définies par Frédéric Marty dans sa thèse. Il est ainsi conduit au résultat suivant : « Le domaine ainsi défini est une cellule d'univalence au sens de M. F. Marty »<sup>401</sup>. Il cite alors deux ouvrages où est définie la « cellule d'univalence au sens de Marty » : la thèse de Frédéric Marty, MARTY 1931b, première publication dans laquelle figure cette définition et le livre de Paul Montel, *Leçons sur les fonctions univalentes et multivalentes*, MONTEL 1933a<sup>402</sup>. Ces *Leçons* de Paul Montel professées à la Sorbonne ont été recueillies par Frédéric Marty et c'est la définition de ce dernier des cellules univalentes qui y figure, MONTEL 1933a, p. 10-11. Il complète ensuite la notion de cellule d'univalente<sup>403</sup>.

Par la suite, Lucien Hibbert procède à une étude des groupes et des hypergroupes locaux d'automorphie pour les polynômes dans laquelle la structure en réseau précédemment introduite joue un rôle. Cette fois, Lucien Hibbert fonde toutes ses recherches sur un travail de Frédéric Marty de 1936, MARTY 1936, auquel il se réfère à plusieurs

---

400. *Univalence et Automorphie pour les polynômes et les fonctions entières*, 1937.

401. Cf. HIBBERT 1938, p. 100.

402. Cf. HIBBERT 1938, p. 100.

403. Suivant l'évolution du module de la fonction sur le parcours de la ligne d'égal argument qui sert de contours, il distingue les *cellules montantes*, HIBBERT 1937, p. 12 et les *cellules descendantes* HIBBERT 1937, p. 16.

reprises<sup>404</sup>. C'est le seul article auquel il se réfère. Depuis sa thèse, en 1931, où Marty avait commencé à aborder ce sujet des groupes d'automorphie, ce dernier a repris ce travail<sup>405</sup> et théorisé la notion d'hypergroupe en y intégrant les apports de l'algèbre allemande et de la topologie<sup>406</sup>, ce que ne réutilise pas Hibbert dans sa thèse.

Ce dernier s'intéresse également à la surface des modules d'un polynôme et surtout à celle de la fonction inverse d'un polynôme<sup>407</sup>. Il étudie plus particulièrement la structure de cette dernière qui est constituée en général de plusieurs nappes<sup>408</sup>. Il relie cette étude à la décomposition du plan complexe en cellules d'univalence pour le polynôme correspondant. Sa démonstration ne contient aucune référence mathématique. Hibbert affirme cependant dans l'introduction de sa thèse qu'il montre que la structure de la surface des modules de la fonction inverse d'un polynôme vérifie les mêmes propriétés que la surface de Riemann de la fonction ; cette démarche fait écho à celle de Marty, qui avait comparé dans son doctorat la structure de la décomposition en cellules univalentes d'une fonction méromorphe à la structure de la surface de Riemann de la fonction.

Les références aux travaux de Frédéric Marty sont d'ailleurs nombreuses, comme je l'ai déjà indiqué, et l'influence directe du mathématicien est d'ailleurs explicitement revendiquée dans l'introduction du mémoire<sup>409</sup>. On remarquera que, comme Dieudonné avant lui, Lucien Hibbert étudie en particulier les polynômes, mais l'approche est différente et Lucien Hibbert ne fait d'ailleurs aucune référence au travail de Dieudonné.

Paul Montel, dans le rapport qu'il écrit sur la thèse, ne semble pas particulièrement impressionné par l'originalité du travail comme il peut l'être dans d'autres rapports. Après avoir affirmé que les « différents problèmes abordés par Lucien Hibbert ne soulèvent pas de difficultés très considérables », il mentionne simplement une « connaissance approfondie des ressources de l'Analyse moderne ».

La théorie des fonctions univalentes et multivalentes a donc été abordée dans trois doctorats distincts : les deux premiers soutenus en 1931 par deux étudiants normaliens,

404. Par exemple p.133 et p.142.

405. Comme par exemple dans sa note aux *Comptes Rendus de l'Académie des sciences* : « Sur le groupe d'automorphie de certaines fonctions entières », 1932, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 195, p. 414-416.

406. Dans l'introduction de son article de 1932, MARTY 1936, p. 85, il « considère comme acquis les résultats démontrés dans les deux ouvrages suivants :

- Van der Waerden, *Moderne Algebra*, 1930, Springer, Berlin ;
- Seifert-Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, 1934, Teubner, Leipzig. »

407. qu'il définit en tout point  $A$  du plan complexe, considéré à deux faces, par le point  $S$  défini par un vecteur perpendiculaire au plan complexe  $\overrightarrow{AS} = \log R$ , pour reprendre ses notations, HIBBERT 1937, p. 38.

408. Cf. HIBBERT 1938, p. 116.

409. Lucien Hibbert écrit ainsi que « les belles recherches [de F. Marty] ont eu une influence directe sur ce mémoire » et qu'il lui a donné « de nombreux conseils qui [lui] ont été d'une grande utilité », cf. HIBBERT 1937, p. 1.

le dernier soutenu 6 ans plus tard par un étudiant haïtien, non issu de l'École Normale. Entre temps, le domaine a évolué en France.

Le bilan historiographique réalisé précédemment a montré que Dieter Gaier ou Walter Hayman présentent les travaux de Bieberbach comme essentiels sur cette théorie<sup>410</sup> et que seul Montel est mentionné comme mathématicien français à avoir travaillé le sujet. L'essentiel des publications de ce dernier sur le sujet date des années 1930<sup>411</sup>. Dans son commentaire sur l'article de Montel « les fonctions multivalentes et en moyenne multivalentes », dans les *Selecta* du mathématicien MONTEL 1947b, p. 148, Biernacki note l'« essor définitif et qui grandit sans cesse » de la théorie des fonctions multivalentes à partir des années 1930-1933, essor qui, dans les références qu'il cite, ne se produit pas uniquement en France. De plus, entre 1931 et 1937, on remarque que les *Leçons sur les fonctions univalentes et multivalentes* professées par Paul Montel à la Sorbonne, MONTEL 1933a, ont été publiées. La situation n'est donc pas la même entre 1931 et 1937. On peut d'ailleurs le voir au niveau des références citées par les trois doctorants.

En 1931, Marty propose une approche qu'il décrit comme nouvelle et ne se réfère presque pas à d'autres ouvrages mathématiques. Dieudonné, dans la partie de son travail concernant exclusivement des questions d'univalence, évoque principalement des travaux allemands : ceux de Bieberbach et de Schur. En 1937, Hibbert cite des travaux français : exclusivement ceux de Marty et les *Leçons* de Paul Montel, recueillies par Marty, MONTEL 1933a. À travers l'étude de ces trois thèses on perçoit donc les prémisses de ce sujet en France et son développement, dont le doctorat d'Hibbert en 1937 en est l'écho.

Paul Montel est le seul mathématicien à être cité par les trois doctorants ; cependant chacun d'entre eux se réfère à des travaux différents de ce dernier. Dieudonné et Marty reprennent ses notions de fonctions univalentes et multivalentes et citent ses travaux sur les zéros des polynômes et sur les familles normales. Hibbert cite ses *Leçons* de 1933. Aucun des trois doctorants ne reprend directement les recherches du mathématicien. Dieudonné et Marty les évoquent davantage comme des théories devenues maintenant classiques et déjà reprises par d'autres mathématiciens. Pourtant, dans la préface de ses *Leçons*, Montel affirme que ses Leçons, professées à la Sorbonne pendant l'hiver de 1929, ont été l'« occasion » des recherches de Dieudonné et de Marty, re-

410. Cf. GAIER 1990, p. 368, HAYMAN 1994, p. 377-378 et p.267 de mon manuscrit.

411. Cf. la bibliographie de Paul Montel en annexe.

cherches qui sont reprises intégralement dans l'ouvrage<sup>412</sup>. C'est sans doute la raison pour laquelle Paul Montel est présent dans les jurys de thèse de ces trois doctorats<sup>413</sup>.

**La représentation conforme de domaines particuliers du plan complexe** Un autre sujet de recherche en théorie des fonctions de la variable complexe est constitué par la théorie de la représentation conforme, théorie qui, selon des propos de Paul Montel, MONTEL 1933a, préface p.III, a pour base l'étude des fonctions univalentes évoquée précédemment. Le sujet n'est étudié en France que par Julia et seulement à partir de la fin des années 1920, selon les propos même du mathématicien en 1932<sup>414</sup>. En revanche, à l'étranger il fait, dès le début du XX<sup>ème</sup> siècle, l'objet de nombreux travaux de Koebe, Carathéodory, Ostrowski, Radó, etc. Ces derniers proposent notamment de nouvelles démonstrations du théorème de représentation conforme énoncé par Riemann en 1851.

Pourtant deux doctorants français, tout deux normaliens, René de Possel en 1932 et Jacqueline Ferrand en 1942, en font le sujet principal de leur thèse. Dans leurs mémoires, l'étude de problèmes de représentation conforme est reliée à une étude topologique de domaines, respectivement les domaines étoilés et le voisinage de la frontière des domaines simplement connexes décrits par la variable  $\zeta = f(z)$  où  $z = x + iy$  varie dans le cercle unité ( $|z| < 1$ ) ou sur le demi-plan droit  $x > 0$ .

En 1932, René de Possel vient de terminer un séjour d'un an en Allemagne, où il a travaillé avec Carathéodory dans le domaine de la théorie de la mesure<sup>415</sup>. C'est auprès de ce dernier qu'il a rédigé son mémoire, comme en témoignent les quelques lignes écrites à ce sujet dans son introduction<sup>416</sup>. René de Possel est donc, normalement, au fait de toutes les théories et de tous les travaux réalisés par les mathématiciens allemands dans le domaine de la représentation conforme.

Dans sa thèse<sup>417</sup>, de Possel s'intéresse à des problèmes de représentation conforme qui se rattachent à la question suivante<sup>418</sup> :

---

412. Cf. MONTEL 1933a, préface, p. IV. Montel écrit :

« Ce Livre reproduit, avec quelques modifications, des Leçons professées à la Sorbonne pendant l'hiver de 1929. Il contient en outre des résultats plus récents, et, en particulier, des recherches de M. Dieudonné et de M. Marty dont cet enseignement a été précisément l'occasion. Je suis heureux de remercier ici M. Marty qui a donné tous ses soins à la rédaction de ces Leçons et y a apporté des contributions personnelles. »

413. Il est le rapporteur d'au moins l'une d'elles (celle de Lucien Hibbert), les rapporteurs de celles de Jean Dieudonné et de Frédéric Marty ne sont pas connus pour cause de rapports déclarés manquants aux Archives nationales.

414. Cf. le bilan historiographique de la partie précédente.

415. D'après SIEGMUND-SCHULTZE 2001. Il est aussi indiqué que de Possel a séjourné en Hongrie.

416. DE POSSEL 1932, p. 2 : Il y remercie Carathéodory pour « pour la bonne grâce avec laquelle il [il] a constamment guidé dans l'accomplissement de son travail ».

417. *Quelques problèmes de représentation conforme*, 1932.

418. Cf. DE POSSEL 1932, p. 1.

« Étant donné un ensemble de points sur une circonférence, on veut représenter conformément l'intérieur de cette circonférence sur un domaine, la représentation étant telle que la partie de la frontière de ce domaine qui correspond à l'ensemble jouisse de propriétés données. »

Pour apporter des solutions à cette question, René de Possel introduit et développe la notion d'*ensemble de type maximum*,  $\Delta$ , un ensemble de points situés sur la circonférence unité  $C$ . De Possel en donne deux définitions à partir de familles  $\phi_\Delta$  de fonctions analytiques régulières pour  $|z| < 1$ , telles que  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$ . Suivant les définitions, les fonctions constituant la famille  $\phi_\Delta$  vérifient différentes hypothèses. Dans les deux cas<sup>419</sup>, l'ensemble  $\Delta$  est dit de type maximum quand  $\phi_\Delta$  ne comprend que la fonction  $f(z) = z$ . Il démontre au cours de son travail qu'elles sont équivalentes.

Cette notion est, selon le rapporteur du mémoire, Gaston Julia, une oeuvre entièrement personnelle de l'auteur. Son étude est l'un des principaux « buts » du mémoire, comme le revendique de Possel<sup>420</sup>. L'introduction de cette notion fait intervenir la théorie de la mesure : certaines des conditions recherchées par Possel concernent ainsi la mesure de  $\Delta$ . De Possel suppose donc que les ensembles  $\Delta$  sont des ensembles de Borel, c'est-à-dire mesurable au sens de Lebesgue. De Possel renvoie à ce sujet à l'ouvrage de Lebesgue, LEBESGUE 1928, ainsi qu'à l'ouvrage de Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin, 1917, qui reprend la définition de Lebesgue. Il considère les mesures par rapport à une fonction monotone  $\lambda(t)$  au moyen de l'intégrale de Stieljès.

Avant l'introduction de la deuxième définition des ensembles de type maximum, qui est celle qu'il utilise concrètement dans les problèmes, René de Possel procède à l'étude topologique des domaines étoilés du plan complexe et de leurs frontières. Il fonde alors tous ses travaux sur la théorie des bouts premiers de Carathéodory.

Il étudie ensuite la représentation conforme de ces domaines sur le cercle unité, les fonctions de représentation étant les fonctions étoilées. Il démontre certaines propriétés des fonctions étoilées en lien avec l'intégrale de Stieljès<sup>421</sup> ou relatives à la représentation conforme de deux étoiles l'une sur l'autre. Ici encore ce sont les tra-

419. Dans le premier cas, DE POSSEL 1932, p. 4-5,  $\Delta$  est un ensemble d'intervalles ouverts disjoints  $\delta_i$  et  $\phi_\Delta$  est constituée de fonctions qui représentent conformément l'intérieur de  $C$  sur un domaine  $D'$  intérieur à un cercle  $C'$  dont le centre est à l'origine du plan  $w$  et l'on suppose qu'à chaque intervalle  $\delta_i$  correspond un intervalle  $\delta'_i$  situé sur  $C'$ .

Dans le deuxième cas, DE POSSEL 1932, p. 45 et p.58,  $\Delta$  est un ensemble situé sur  $C$ . la famille de fonctions  $\phi_\Delta$  est constituée de fonctions étoilées (elles représentent conformément l'intérieur de  $C$  sur une étoile de centre origine dans le plan  $w$ ) pour lesquelles  $|f(e^{i\theta})|$  atteint son maximum, fini ou non, en tout point de  $\Delta$ .

420. Cf. DE POSSEL 1932, p. 6 : « Un des buts de ce Mémoire est la recherche de conditions portant sur la structure de l'ensemble  $\Delta$  et permettant d'affirmer qu'il est ou qu'il n'est pas du type maximum. »

421. Il s'agit de la représentation du logarithme du module d'une fonction étoilée en un point du cercle unité par une intégrale de Stieljès. De Possel dans son introduction, comme Julia dans le rapport de thèse la mentionnent.

vaux de Carathéodory en représentation conforme qui lui servent de base<sup>422</sup>. Il évoque également à plusieurs reprises les travaux de Seidel sur les fonctions étoilées.

À l'aide des fonctions étoilées, de Possel donne une nouvelle définition plus générale des ensembles de type maximum<sup>423</sup>. C'est cette définition qu'il utilise ensuite dans ses démonstrations. Il donne alors des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble  $\Delta$  soit de type maximum. Certaines de ces conditions sont liées à la structure de l'ensemble  $\Delta$  et de son complémentaire sur le cercle unité ainsi qu'à la mesure de  $\Delta$  (suivant qu'elle est égale ou strictement inférieure à  $2\pi$ ). Sur ce sujet, de Possel ne fait référence à aucun mathématicien : il présente une notion qui lui est propre et en étudie les propriétés.

De Possel s'attache ensuite à résoudre certains problèmes particuliers de représentation conforme. Il apporte une solution nouvelle au problème de la représentation conforme des domaines à connexion infinie<sup>424</sup>. Cette solution n'utilise aucun des résultats sur les ensembles de type maximum qu'il a présentés auparavant. Dans ses démonstrations, de Possel se fonde sur des résultats sur les fonctions univalentes de Bieberbach et sur des résultats sur les familles normales de Carathéodory<sup>425</sup>. De Possel reprend surtout des méthodes de Grötsch dans un problème de représentation conforme de domaine à connexion finie et des méthodes de Carathéodory pour la représentation conforme d'un domaine simplement connexe sur un cercle<sup>426</sup>. Selon Julia dans le rapport de thèse, et selon de Possel<sup>427</sup>, cette solution du problème de représentation conforme des domaines à connexion infinie constitue l'un des résultats essentiels du doctorat.

De plus, cette solution permet à de Possel de montrer que l'hypothèse formulée par Koebe en 1918 sur les « minimale Schlitzbereiche » est inexacte<sup>428</sup>. La démonstration que propose de Possel est ici fondée sur sa notion d'ensemble de type maximum<sup>429</sup>. Au

422. Tels que « Bemerkungen zu den Existenz theoremen der konformen Abbildung », *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society* 20 (1928) ou *Leçons sur la représentation conforme*, 1932, en anglais, qu'il cite à plusieurs reprises : p.45, 46.

423. Par rapport à celle qu'il a d'abord donnée en introduction.

424. La notion de connexion finie ou infinie, comme le rappelle de Possel dans sa terminologie, DE POSSEL 1932, p. 2-4, est relative aux *éléments de frontière* des aires considérées (si  $P$  est un point frontière du domaine, un élément de frontière est le continu de l'ensemble des points frontière bien enchaînés avec  $P$ ). Suivant qu'il en existe un nombre fini ou infini, les aires sont dites à connexion finie ou infinie.

425. Respectivement DE POSSEL 1932, p. 75 et p.76.

426. Cf. DE POSSEL 1932, p. 77-78.

427. Non seulement dans la préface de sa thèse, DE POSSEL 1932, p. 1-2 mais également dans la description du contenu de son mémoire, DE POSSEL 1932, p. 18-20.

428. dans *Zur konformen Abbildung schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche*, Göttinger Nachrichten, 1918. Cette hypothèse porte sur la mesure sur le plan imaginaire de la projection d'un certain domaine du plan complexe du type domaine du type « minimale Schlitzbereiche » qui serait nulle, DE POSSEL 1932, p. 90-91.

429. Elle utilise l'existence d'un ensemble  $\Delta$  de type maximum et de mesure strictement inférieure à  $2\pi$ .



cours de sa démonstration, de Possel mentionne la démonstration parallèle de l'inexactitude de l'hypothèse de Koebe par H. Grötzsch en 1931, c'est-à-dire au moment même où lui-même travaillait sur le même sujet<sup>430</sup>. Cette concordance renforce l'intérêt que peuvent présenter le travail du doctorant et sa théorie des ensembles de type maximum.

La thèse de René de Possel est donc centrée sur la notion d'ensemble de type maximum, qu'il définit à partir des fonctions étoilées, fonctions qui représentent conformément les domaines étoilés. Cette notion mêle des résultats de la théorie de la représentation conforme ainsi que des résultats de la théorie de la mesure. La résolution de problèmes particuliers de représentation conforme, sans recours systématique aux ensembles de type maximum, lui permet de trouver de nouveaux résultats pour sa théorie. Elle joue également un autre rôle : la démonstration de l'inexactitude de l'hypothèse de Koebe apparaît ainsi comme un moyen, pour de Possel, de montrer l'importance de sa nouvelle notion et sa validité.

Le travail du doctorant s'inscrit en fait dans un projet plus vaste qu'il revendique. La notion d'ensemble de type maximum s'applique à d'autres problèmes que ceux de la représentation conforme<sup>431</sup>. Dans l'introduction de son mémoire, René de Possel insiste ainsi sur le rôle que cette notion peut jouer dans la théorie des surfaces de Riemann générales et dans la question du prolongement de telles surfaces. Il traite à cette occasion de ce point particulier qu'il ne reprend plus dans le reste de son manuscrit<sup>432</sup>. Il fonde alors son propos sur les travaux de Radó, de Bochner et de Weyl et ce sont les recherches de Radó et de Bochner sur le prolongement des surfaces de Riemann qu'il complète en utilisant sa notion d'ensemble maximum<sup>433</sup>.

On remarque dans tout le travail de René de Possel les références importantes qu'il fait aux travaux étrangers et surtout allemands en représentation conforme et sur la théorie de la mesure. Sur de tels sujets, il privilégie les citations de publications de Carathéodory à celles de mathématiciens français. Sur la théorie de la mesure et sur l'intégrale de Stieljès, il fonde son travail sur les ouvrages de ce dernier et ne cite qu'en passant les travaux de Lebesgue ou de Fréchet<sup>434</sup>. Sur le domaine de la représentation conforme, il mentionne les travaux de Carathéodory, de Bieberbach, de Grötzsch et de Koebe, et ne mentionne pas ceux publiés par Gaston Julia, qui est, à la fin des années 1920 - début des années 1930, le principal mathématicien français à travailler sur le

---

430. Cf. DE POSSEL 1932, p. 91.

431. Cf. DE POSSEL 1932, p. 6.

432. Cf. DE POSSEL 1932, p. 6-18.

433. Il cite les ouvrages suivants : Bochner, S., « Fortsetzung Riemannscher Flächen », *Mathematische Annalen* 98 (1927) ; Radó, T., « Über den Begriff der Riemannschen Fläche », *Acta Szeged* 2 (1925) et Radó, T., « Über eine nicht forsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit », *Mathematische Zeitschrift* 20 (1924) ; Weyl, H., *Die Idee der Riemannschen Fläche*, 1913, Leipzig-Berlin.

434. Cf. DE POSSEL 1932, p. 21-29.

sujet<sup>435</sup>. Enfin, lorsqu'il se réfère à des résultats sur les familles normales, il ne renvoie pas aux travaux de Montel, même si l'ouvrage de ce dernier, MONTEL 1927 figure dans l'index bibliographique de la thèse.

On peut expliquer cette tendance par la situation dans laquelle de Possel a élaboré son doctorat : auprès de Carathéodory, à l'étranger. C'est à la vision du problème de Carathéodory qu'il se réfère principalement. Ce décalage avec les travaux français écrits sur certains des sujets qu'il aborde pourrait expliquer la faible reprise des travaux du doctorant dans d'autres mémoires soutenus pendant l'entre-deux-guerres. Mis à part Charles Blanc, qui évoque la définition des surfaces de Riemann rappelée en introduction par de Possel, aucun autre étudiant en théorie des fonctions ne cite de Possel dans sa thèse, même pas Jacqueline Ferrand.

Cette dernière, dans sa thèse *Étude de la représentation conforme au voisinage de la frontière*, soutenue en 1942, aborde également des problèmes relatifs à la théorie de la représentation conforme. Cependant son approche et le cadre de son travail sont différents de ceux de René de Possel. Deux phénomènes extérieurs peuvent contribuer à la différence de cette approche. Tout d'abord, dix années séparent les deux docto-

---

435. Il ne donne qu'une seule référence du mathématicien : Julia Gaston, *Principes géométriques d'analyse : 1<sup>ère</sup> partie*, Fascicule VI des *Cahiers scientifiques*, Paris. Ce dernier a cependant publié régulièrement depuis le milieu des années 1920 plusieurs travaux sur la représentation conforme d'aires multiplement connexes. En effet dans la liste chronologique des travaux de recherches de Gaston Julia donnée dans HERVÉ 1968, p. XI-XXI, on distingue, jusqu'en 1932, les publications suivantes qui concernent explicitement des questions de représentation conforme et des questions d'aires simplement ou multiplement connexes :

- « Les équations fonctionnelles et la représentation conforme », *C.R* 174 (1922) 517
- « Nouvelles applications de la représentation conforme aux équations fonctionnelles », *C.R* 174 (1922) 800
- « Sur une équation aux dérivées fonctionnelles liées à la représentation conforme », *Ann.scient. E.N.S.* 39 (1922) 1-28
- « Sur quelques applications de la représentation conforme à la résolution d'équations fonctionnelles », *Ann.scient. E.N.S.* 40 (1923) 97-150
- « Sur la représentation conforme des aires simplement connexes », *C.R* 182 (1926) 1314
- « Sur la représentation conforme des aires simplement connexes », *C.R* 184 (1927) 1107
- « Sur quelques questions de minimum liées à la représentation conforme des aires simplement connexes », *Bull. Sc. Math.* 51 (1927) 370-384
- « Sur une suite double de polynômes liée à la représentation conforme des aires planes simplement connexes », *Journal de Math.* (9) 7 (1928) 381-407
- « Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes », *C.R* 192 (1931) 1518
- « Sur une décomposition des aires multiplement connexes », *C.R* 194 (1932) 38
- « Sur la structure des aires multiplement connexes », *C.R* 194 (1932) 237
- « Reconstruction d'une surface de Riemann  $\sigma$  correspondant à une aire multiplement connexe  $a$  », *C.R* 194 (1932) 423,
- « Prolongement d'une surface de Riemann  $\sigma$  correspondant à une aire multiplement connexe  $a$  », *C.R* 194 (1932) 580,
- « Sur une représentation conforme des aires multiplement connexes », *C.R* 194 (1932) 819
- « Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes », *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa* (2) 1 (1932) 113-138
- « Sur la représentation conforme des aires triplement connexes », *Comm. Math. Helvetici* 4 (1932) 106-124.

rats. Dans l'intervalle, de nouveaux travaux ont été publiés sur le sujet et de nouvelles théories, comme celles présentées par Lars Ahlfors, sont devenues dominantes dans le domaine de la théorie des fonctions et de la théorie de la représentation conforme. Une partie des travaux auxquels se réfère Jacqueline Ferrand, ceux d'Ahlfors, d'Ostrowski, de Denjoy ou de Wolff, date ainsi des années 1930 et du début des années 1940. En outre, le contexte est différent. Jacqueline Ferrand est issue de l'École normale supérieure, comme René de Possel. Cependant, elle élabore son mémoire de thèse pendant la seconde guerre mondiale, sous l'Occupation, dans une période où les conditions de recherches accordées aux étudiants ainsi qu'aux mathématiciens sont moins favorisées. Corresponder avec des mathématiciens étrangers est également rendu difficile<sup>436</sup>. L'impact de ce contexte sur son travail est cependant malaisé à mesurer.

René de Possel présente dans son travail une théorie et des notions inédites qui peuvent s'appliquer à un ensemble de problèmes plus vaste que celui de la représentation conforme. Jacqueline Ferrand examine, quant à elle, la représentation conforme d'un domaine simplement connexe  $\Delta$  décrit par la variable  $\zeta$  sur l'intérieur d'un cercle  $C$ ,  $|z| < 1$ <sup>437</sup>, et le comportement de la fonction de représentation  $\zeta = f(z)$  au voisinage de la circonférence  $K$ <sup>438</sup>. Il ne s'agit plus de considérer les propriétés qui peuvent être déduites d'hypothèses formulées sur un ensemble de la circonférence unité, comme pour de Possel, mais d'étudier le comportement de la fonction de représentation et de sa dérivée au voisinage de la circonférence.

Jacqueline Ferrand ne cherche pas à introduire de nouvelles notions. Elle part de résultats déjà énoncés et démontrés dans certains cas particuliers. Elle cherche ensuite à les généraliser et à les approfondir. Elle inscrit et situe explicitement son travail dans la continuité d'autres recherches dans le domaine de la représentation conforme. Une partie de son introduction est ainsi consacrée à des rappels sur les avancées réalisées dans le domaine de la représentation conforme dans les trente dernières années. Elle y précise alors ceux sur lesquels elle se fonde et ceux qu'elle reprend dans son mémoire. Les noms de Carathéodory, de Koebe, fréquemment cités par René de Possel apparaissent. Mais Jacqueline Ferrand se réfère plus abondamment aux recherches d'Ahlfors, d'Ostrowski, Wolff. Elle évoque également en passant quelques travaux français sur des problèmes particuliers dont les plus importants sont ceux de Denjoy.

---

436. Jacqueline Ferrand le signale d'ailleurs par quelques phrases à la fin de l'introduction de la thèse, FERRAND 1942a, p. 6. Dans l'interview qu'elle m'a accordée (le vendredi 22 décembre 2006), Jacqueline Ferrand a également évoqué le contexte difficile dans lequel elle a élaboré son mémoire. Parmi ses souvenirs, elle a mentionné l'absence de chauffage à la Sorbonne et le refuge que constituait alors la bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré pour les étudiants normaliens de l'époque.

437. ou sur le demi-plan  $x > 0$ , décrit par la variable  $z$ .

438. Suivant le domaine choisi pour  $z$ , il s'agit soit de la circonférence  $|z| = 1$ , soit de l'axe  $y'y : x = 0$ . Cf. la présentation qu'elle fait de son travail dans l'introduction du mémoire, FERRAND 1942a, p. 1, et la description qu'en fait Arnaud Denjoy dans le rapport de thèse.

Plus précisément, dans le premier chapitre de sa thèse, elle prend comme point de départ des publications d'Arnaud Denjoy et de Julius Wolff datant de 1941<sup>439</sup>. Elle y généralise les derniers théorèmes des deux mathématiciens sur la limitation de la fonction  $f'(z)$  quand  $z$  tend vers un point  $a$  de la circonférence à l'intérieur de  $C$ , limitation vérifiée sauf pour un ensemble de points  $a$  de mesure nulle<sup>440</sup>. Elle l'étend notamment à des classes de fonctions plus générales que simplement les fonctions holomorphes univalentes<sup>441</sup> et ne formule plus d'hypothèses sur la façon dont  $z$  s'approche de la circonférence. Elle applique également ces résultats à différents problèmes tels que celui de la limitation de la longueur de certaines courbes<sup>442</sup>.

Dans ce premier chapitre, Jacqueline Ferrand fonde ses démonstrations sur des théorèmes relatifs aux aires décrites par la fonction  $f(z)$ . Elle utilise pour cela « un lemme important dont l'idée primitive se trouve dans les travaux de MM. Boutroux, A. Bloch et H. Cartan ». C'est cependant à la formulation qu'en donne Ahlfors qu'elle se réfère<sup>443</sup>. Jacqueline Ferrand fait également référence à des travaux de mathématiciens français. Elle cite ainsi le livre de Paul Montel sur les fonctions univalentes et multivalentes, MONTEL 1933a<sup>444</sup>, pour énoncer des résultats classiques. Elle utilise aussi des méthodes récentes de Jacques Dufresnoy pour généraliser aux fonctions méromorphes certains de ses théorèmes<sup>445</sup>.

Dans un deuxième temps, elle applique ses théorèmes précédents à la théorie de la représentation conforme. Elle regarde le cas où la fonction réalisant la représentation conforme du demi-plan droit  $D$  sur un domaine simplement connexe  $\Delta$  est méromorphe et univalente. Dans le cas où la fonction est univalente, elle précise les résultats qu'elle a obtenus précédemment en se référant à un théorème classique de Koebe donnant une borne du module de la dérivée. Il s'agit d'étudier l'ensemble limite des valeurs de  $f(z)$  lorsque  $z$  tend vers l'axe  $y'y$  dans un domaine intérieur à  $D$  limité par une courbe donnée et de préciser la « rareté » des points  $a$  pour lesquels cet ensemble ne se réduit pas à un point  $\alpha$ <sup>446</sup>. Sa référence principale est alors Wolff<sup>447</sup>. Elle donne également

439. Jacqueline Ferrand évoque ainsi trois publications aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* d'Arnaud Denjoy en 1941 (*C.R.* 212 (1941) 1071 ; *C.R.* 213 (1941) 15 ; *C.R.* 213 (1941) 115) et la publication suivante de Wolff : J. Wolff, « Inégalités remplies par les fonctions univalentes », *Proceedings de l'Académie d'Amsterdam* (8) 44 (1941).

440. La mesure est ici la mesure de Lebesgue.

441. Dans un premier temps de ce chapitre, elle s'affranchit de la condition d'univalence et regarde les fonctions holomorphes définies dans le cercle unité, puis elle étend ses résultats à des fonctions méromorphes en faisant intervenir les aires de la surface de Riemann correspondantes.

442. Cf. FERRAND 1942a, p. 11.

443. Cf. FERRAND 1942b, p. 48 et le rapport de Denjoy.

444. Cf. par exemple FERRAND 1942b, p. 50-52.

445. Jacqueline Ferrand cite ainsi plusieurs de ses notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* parues en 1941 : 213 (1941) 393 et 212 (1941) 662. Cf. FERRAND 1942b, p. 58.

446. Cf. FERRAND 1942a, p. 4.

447. Elle cite à plusieurs reprises des résultats que ce dernier lui a communiqués ou son article WOLFF 1941, FERRAND 1942b, p. 63-66-68-69.

des propriétés topologiques de la représentation. Elle étend alors des résultats de Caratheodory et de Lindelöf, dont certains concernent notamment la théorie des bouts premiers qu'avait déjà reprise René de Possel. Elle se réfère seulement aux travaux de Carathéodory, sans mentionner le doctorat de ce dernier<sup>448</sup>.

Dans les deux derniers chapitres, Jacqueline Ferrand propose une approche différente. Elle ne regarde plus des propriétés vérifiées sur toute la frontière sauf sur un ensemble de mesure nulle. Selon ses propres termes, « elle passe à l'étude locale directe et géométrique de la représentation conforme au voisinage d'un point accessible  $\alpha$  de la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Delta$  »<sup>449</sup>. Elle ne considère que le cas où les points  $a$  et  $\alpha$  sont à l'infini de leur plan respectif<sup>450</sup>.

De plus, l'un de ses objectifs de ce chapitre est d'utiliser les nouvelles considérations d'Ostrowski sur la semi-conformité de la représentation qu'il a exposées dans OSTROWSKI 1937<sup>451</sup>. Elle utilise ainsi les méthodes et les notions introduites par Ostrowski dans cette voie, telles que la notion de « mesure conforme » d'un ensemble frontière de  $\Delta$ .

Elle étudie plus précisément deux problèmes. Le premier consiste à rechercher les conditions géométriques suffisantes pour que  $f(z)$  tende vers  $\alpha$  lorsque  $z$  tend vers  $a$  suivant une courbe ayant avec l'infini un contact donné. Selon Jacqueline Ferrand, cette question a pour origine un travail de Denjoy sur l'itération des fonctions analytiques<sup>452</sup>. Elle la résout en appliquant directement les méthodes d'Ostrowski. Le deuxième problème concerne les conditions géométriques suffisantes que doit vérifier le domaine  $\Delta$  pour que la fonction réalisant la représentation ait une dérivée angulaire à l'infini<sup>453</sup>. Pour l'étude de ce second problème, Jacqueline Ferrand part de résultats de Lars Ahlfors sur l'existence d'une telle dérivée<sup>454</sup>. Elle les étend en utilisant à nouveau les méthodes d'Ostrowski<sup>455</sup>.

Les deux doctorats de René de Possel et Jacqueline Ferrand se caractérisent ainsi par leur approche topologique et parfois géométrique de certains problèmes de représentation conforme<sup>456</sup>. Une telle approche n'est reprise, parmi les thèses classées en

448. Il s'agit de la référence suivante que l'on retrouve citée dans les deux mémoires de Ferrand et de Possel : Caratheodory C., « Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete », *Mathematische Annalen* 63 (1913) 323-370.

449. Cf. FERRAND 1942b, p. 75.

450. Elle se ramène toujours à ce cas par des transformations homographiques. Rappelons que  $a$  est un point de l'ensemble de départ.

451. La semi-conformité étant à distinguer de la conformité de la représentation.

452. Cf. FERRAND 1942a, p. 5.

453. La dérivée angulaire étant définie par  $\lim_{z \rightarrow \infty, |\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{2} - \epsilon} \frac{f(z)}{z}$ , selon FERRAND 1942a, p. 5.

454. Cf. FERRAND 1942b, p. 90. Les résultats d'Ahlfors lui permettent également d'interpréter géométriquement les résultats qu'elle a trouvés dans les premiers chapitres sur l'approximation de la dérivée au voisinage d'un point frontière.

455. Cf. par exemple FERRAND 1942b, p. 94-96.

456. Les travaux de René de Possel et de Jacqueline Ferrand consistent ainsi à étudier topologiquement certains domaines (respectivement les domaines étoilés, et le voisinage de la frontière des

théorie des fonctions, que dans d'autres doctorats plus centrés sur l'étude des surfaces de Riemann. En effet, Charles Blanc et Jacques Dufresnoy procèdent à l'étude topologique des domaines couverts par les valeurs d'une fonction méromorphe<sup>457</sup>. De l'étude des surfaces de Riemann, ils déduisent, nous le verrons, certaines propriétés des fonctions qu'elles représentent.

René de Possel et Jacqueline Ferrand accordent une place importante dans leurs références aux travaux étrangers. Certaines publications de Carathéodory sont d'ailleurs évoquées dans les deux. Elles sont au centre de la thèse de René de Possel. La thèse de Jacqueline Ferrand témoigne aussi de l'importance des travaux d'Ahlfors dans le milieu mathématique de la fin des années 1930 et des contributions d'Ostrowski à la théorie de la représentation conforme. Les travaux de ces deux mathématiciens sont d'ailleurs ceux qui sont le plus cités dans son doctorat.

Les travaux des mathématiciens français ne sont pas cités en même nombre dans les deux doctorats. René de Possel n'y fait que très peu référence. Jacqueline Ferrand en cite davantage et de deux façons différentes. Elle mentionne tout d'abord certains travaux de Denjoy comme point de départ de questions qu'elle étudie. Elle se réfère alors directement à certains de ses résultats, soit pour les utiliser soit pour les généraliser. Parallèlement, elle mentionne à plusieurs reprises des ouvrages de Paul Montel, tels que MONTEL 1933a ou MONTEL 1917. Elle se réfère alors à certains résultats qui semblent classiques à la fin des années 1930 et dont Paul Montel n'est pas toujours l'auteur. Elle évoque ainsi certains de ses résultats sur les familles normales<sup>458</sup> mais également un théorème de Koebe ou un théorème de Bieberbach, qui figurent dans MONTEL 1933a<sup>459</sup>. Selon Jacqueline Ferrand, le choix de son sujet sur la théorie de la représentation conforme lui a été communiqué par Arnaud Denjoy. On peut donc s'interroger sur la volonté de ce dernier de développer en France un champ de recherche davantage travaillé à la fin des années 1930 par des mathématiciens étrangers comme Ahlfors ou Ostrowski<sup>460</sup>.

---

domaines simplement connexes décrit par la variable  $\zeta = f(z)$  où  $z = x + iy$  varie dans le cercle unité ( $|z| < 1$ ) ou sur le demi-plan droit  $x > 0$ ).

457. ou même algébrique dans le cas de Dufresnoy.

458. Cf. FERRAND 1942a, p. 5.

459. Elle procède de même lorsqu'elle rappelle certaines propriétés de l'intégrale de Poisson qu'elle utilise. Elle cite la thèse de Fatou de 1906, Fatou, « Séries trigonométriques et séries de Taylor », *Acta Mathematica* 30 (1906). Telle qu'elle le présente, il s'agit d'un ouvrage classique en 1942, FERRAND 1942b, p. 92.

460. En effet, dans l'interview que Jacqueline Ferrand m'a accordé, en réponse à la question du choix de son sujet de thèse, cette dernière m'a répondu qu'elle était allée voir Arnaud Denjoy. Ce dernier lui ayant communiqué plusieurs tirés à part, elle se serait ensuite fondée sur ces travaux pour élaborer son sujet. C'est également ce qui est implicitement reconnu dans les remerciements qu'elle adresse à Arnaud Denjoy à la fin de son introduction, FERRAND 1942a, p. 6.

### L'étude des surfaces de Riemann dans les thèses : la référence à Ahlfors

Dans deux doctorats, ceux de Charles Blanc<sup>461</sup> et de Jacques Dufresnoy<sup>462</sup>, l'étude topologique des surfaces de Riemann occupe une place particulièrement importante. Le premier, Charles Blanc, est un étudiant suisse qui semble avoir fait l'essentiel de sa formation mathématique à l'Université de Lausanne, CERCLE VAUDOIS DE GÉNÉALOGIE 2006. Il a ensuite séjourné à Göttingen. Puis, il est venu sur Paris pour soutenir un doctorat en 1937. Jacques Dufresnoy est normalien, de la promotion 1933, et a fait toute sa formation en France<sup>463</sup>, à l'École normale supérieure. Il a suivi des cours à l'Institut Henri Poincaré, au Collège de France et à la Sorbonne. Il ne semble pas être parti à l'étranger avant de soutenir son doctorat<sup>464</sup>.

Les problèmes étudiés dans ces deux thèses concernent, pour l'essentiel, la « recherche des propriétés caractéristiques du domaine riemannien engendré par les valeurs de la fonction » et « les relations qu'il y a entre, d'une part le domaine d'existence d'une fonction uniforme, d'autre part le domaine riemannien correspondant »<sup>465</sup>. Sont laissées de côté « les propriétés pour ainsi dire métriques de la fonction ». Cependant, les deux doctorants n'abordent pas exactement les mêmes questions. Il en découle qu'ils ne se réfèrent pas aux mêmes textes mathématiques, même si, comme je le montrerai, certains des mathématiciens qu'ils citent sont les mêmes : par exemple André Bloch et Rolf Nevanlinna. Ils renvoient alors à des textes différents de ces auteurs.

Charles Blanc concentre son étude sur le type des surfaces de Riemann. La terminologie qu'il utilise pour la théorie des surfaces de Riemann est la même que celle utilisée par René de Possel<sup>466</sup>. Il la complète et précise les notions de points singuliers transcendants qui jouent un rôle particulier dans tout son mémoire. Il précise également la notion de *type d'une surface de Riemann simplement connexe*<sup>467</sup> :

« Une surface de Riemann simplement connexe peut-être représentée conformément sur un cercle  $|z| < 1$  ou sur le plan ouvert. Dans le premier cas, on dit que la surface est du type hyperbolique, dans le second, qu'elle est du type parabolique. »

Le problème principal qu'étudie Charles Blanc consiste alors à chercher de critères de type de surfaces de Riemann. Il s'agit du problème « le plus important de la

461. *Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes*, 1937.

462. *Sur les domaines couverts par les valeurs d'une fonction méromorphe ou algébroïde*,

463. À l'école primaire supérieure Lavoisier à Paris, puis ses classes préparatoires au lycée Henri IV et enfin sa scolarité à l'É.N.S.

464. Cf. COLMEZ ET AL. 1990.

465. Pour reprendre les propos de Lars Ahlfors lors d'une conférence donnée à la Sorbonne en 1932, *Quelques propriétés des surfaces de Riemann relatives aux fonctions méromorphes*, cf. AHLFORS 1932a, p. 197.

466. Il cite d'ailleurs la thèse de ce dernier dans l'énoncé de cette terminologie mais ne reprend aucun des autres résultats de la thèse de de Possel, même ceux qui concernent les surfaces de Riemann.

467. Cf. BLANC 1937, p. 8.

théorie des fonctions » d'après le doctorant, qui renvoie à des propos tenus par Lars Ahlfors lors sa conférence de 1932<sup>468</sup>.

Charles Blanc commence par énoncer des résultats et des théories qui seront ensuite appliqués à l'étude de nouveaux critères de type dans la seconde partie du travail. Il introduit tout d'abord la notion de réseau topologique telle qu'elle est présentée dans les travaux de Speiser ainsi que dans la thèse récente d'Elfving<sup>469</sup>. Le réseau topologique d'une surface découpe le plan en domaines et à chacun de ces domaines correspond une singularité de la surface<sup>470</sup>. Charles Blanc étudie alors dans un second temps la classification des singularités transcendentes d'une surface de Riemann simplement connexe énoncée par Iversen. Il reprend et complète les travaux présentés par ce dernier dans sa thèse<sup>471</sup>. À cette occasion, il mentionne une classification des singularités énoncée précédemment par Pierre Boutroux. Il la présente comme une contribution antérieure sur laquelle il ne fonde pas ses travaux<sup>472</sup>. À partir des résultats présentés, fondés sur les travaux d'Elving et d'Iversen, Charles Blanc propose ensuite une généralisation de la notion de réseau topologique à une surface de Riemann quelconque dont les singularités sont isolées. Il montre également la correspondance entre un réseau donné vérifiant certaines conditions et une surface de Riemann.

La deuxième partie de son travail est consacrée au problème du type d'une surface de Riemann. Charles Blanc utilise alors sa classification des singularités et sa notion étendue de réseau topologique. Il se demande « jusqu'à quel point le réseau d'une surface nous renseigne sur son type »<sup>473</sup>. Il essaie de donner des critères les plus généraux possibles, en démontrant dans certains cas particuliers la principe de la continuité topologique de Bloch, c'est-à-dire la conservation du type d'une surface sous l'action d'une certaine transformation de la surface appelée « transformation de Bloch »<sup>474</sup>. Blanc affirme s'inspirer des principes de Bloch dans ses tentatives de généralisation. Pour ses démonstrations, il se fonde explicitement sur les méthodes de Nevanlinna mises au

---

468. Cf. BLANC 1937, p. 25. Il renvoie à AHLFORS 1932a, p. 11. Cette phrase conclut le discours donné par le mathématicien, la phrase originelle étant :

« le problème de la détermination du type d'une fonction, que je considère comme le problème central dans la théorie des fonctions méromorphes. »

469. Cf. Elfving, « Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung », Thèse de l'université de Helsingin Yliopisto, *Acta Fennicae* (3) 2 (1934). Ce dernier étend la notion d'arbre et de réseau topologique à une classe plus grande de surfaces de Riemann : les surfaces de Riemann simplement connexes dont les singularités sont logarithmiques et ont pour trace  $p \geq 2$  points de la sphère de Riemann et les surfaces de Riemann comportant des points critiques algébriques, BLANC 1937, p. 4-5.

470. Cf. BLANC 1937, p. 5.

471. Cf. Iversen, *Thèse*, Helsingfors, 194.

472. Georges Valiron, rapporteur de la thèse, mentionne également les travaux d'Arnaud Denjoy sur les singularités transcendentes de certaines fonctions entières. Charles Blanc ne cite cependant pas les recherches de ce dernier.

473. Cf. BLANC 1937, p. 25.

474. Cf. BLANC 1937, p. 25-26.



point par ce dernier pour démontrer un théorème donnant un critère de type parabolique pour une surface de Riemann dont toutes les singularités sont logarithmiques et ont pour traces trois points du plan<sup>475</sup>. Blanc présente d'ailleurs une généralisation de ce théorème<sup>476</sup>. Blanc propose enfin une dernière méthode, qu'il qualifie de « nouvelle »<sup>477</sup>, et il obtient de nouveaux critères pour des surfaces où la symétrie ou la dissymétrie joue un certain rôle.

La notion de type de surface n'est pas reprise par Dufresnoy dans sa thèse<sup>478</sup>, soutenue quatre ans plus tard, en 1941. Le doctorant part du mémoire de Lars Ahlfors, *Zur Theorie der Überlagerungsflächen*, 1935, AHLFORS 1935, où le mathématicien étudie d'un point de vue essentiellement topologique les surfaces de Riemann et en déduit un théorème général sur les fonctions méromorphes généralisant le second théorème de Nevanlinna<sup>479</sup>.

Jacques Dufresnoy reprend tout d'abord les principaux théorèmes énoncés par Lars Ahlfors. Il introduit toute la terminologie de ce dernier. Il redémontre et précise plusieurs de ses théorèmes. Il étend également les classes de surfaces de Riemann auxquelles ils peuvent s'appliquer.

Toute la première partie du mémoire est consacrée à établir une inégalité plus précise que celle établie préalablement par Lars Ahlfors, pour pouvoir ainsi démontrer un théorème que Jacques Dufresnoy qualifie de « théorème fondamental »<sup>480</sup>. Dans les travaux d'Ahlfors, cette inégalité relie différentes données topologiques relatives à des domaines de la sphère unitaire simplement connexes, disjoints et recouverts par une surface de Riemann simplement connexe. Dufresnoy précise certaines constantes intervenant dans l'inégalité et étend le résultat aux surfaces de Riemann multiplement connexes<sup>481</sup>. Les démonstrations de Dufresnoy reposent sur les résultats qu'Ahlfors

475. Blanc cite le mémoire suivant : Nevanlinna Rolf, « Ein Satz über die konforme Abbildung Riemann'scher Flächen », *Commentarii Mathematici Helvetici* 5 (1932) 95-107. Dans le rapport, Valiron signale également l'utilisation des méthodes de Nevanlinna que fait le doctorant dans ses démonstrations. À cette occasion, Blanc mentionne des recherches d'Ahlfors sur des critères de type pour les surfaces de Riemann publiées dans deux notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* de 1932, AHLFORS 1932c et AHLFORS 1932b. Il ne les explicite pas et ne les utilise pas directement dans son mémoire.

476. Il l'étend au cas où les singularités sont logarithmiques et groupées dans  $p$  cercles extérieurs les uns aux autres, BLANC 1937, p. 32.

477. Comme Valiron également. Une indication de cette « nouveauté » est donnée par l'absence de références mathématiques dans cette dernière partie du mémoire.

478. *Sur les domaines couverts par les valeurs d'une fonction méromorphe ou algébroïde*, 1941.

479. C'est ainsi que le présente le doctorant, ce qui lui permet de préciser l'approche qu'il adopte pour traiter des fonctions méromorphes, cf. DUFRESNOY 1941a, p. 180. Pour l'énoncé du second théorème de Nevanlinna, cf. p.263.

480. Cf. DUFRESNOY 1941a, p. 184.

481. L'une des formes du théorème principal de la thèse de Jacques Dufresnoy s'énonce ainsi, DUFRESNOY 1941a, p. 199-200 :

Si la sphère  $\Sigma_0$  est recouverte d'une surface de Riemann  $\Sigma$  de caractéristique  $\rho$ , d'aire  $4\pi S$  et ayant un contour de longueur  $L$ , la somme  $\sum r(D_i)$  étendue aux domaines  $D_i$  vérifie l'inégalité

énonce dans AHLFORS 1935. Le doctorant va en fait plus loin que le mathématicien dans l'étude de leurs conséquences.

Jacques Dufresnoy applique ensuite ce « théorème fondamental » pour énoncer certaines propriétés relatives aux surfaces de Riemann simplement connexes et pour étudier les fonctions méromorphes. Le doctorant calque explicitement sa démarche sur celle d'Ahlfors<sup>482</sup>. Il redémontre alors des théorèmes classiques tels que le troisième théorème de Picard sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et les théorèmes de Nevanlinna qui le généralisaient<sup>483</sup>, les théorèmes de Landau et de Schottky de 1904, les théorèmes de Montel sur les familles de fonctions à valeurs exceptionnelles ou le théorème de Bloch sur le domaine riemannien décrit par une fonction holomorphe dans le cercle unité dont la dérivée à l'origine vaut un. Il obtient également de « nouvelles » propositions<sup>484</sup> sur les domaines décrits par les valeurs des fonctions méromorphes dans un cercle de rayon fini.

Dufresnoy conserve la même démarche lorsqu'il étend ses résultats aux fonctions algébroides et non plus méromorphes. Il généralise certains énoncés dont la plupart proviennent des travaux de Valiron. Il étend ainsi un « théorème du défaut de Valiron », qui est « généralisé aux domaines » et non plus aux seuls points<sup>485</sup>, ou les théorèmes de ce dernier sur les algébroides à deux branches.

Les deux doctorats que j'ai regroupés dans cette section abordent ainsi l'étude des surfaces de Riemann avec des approches différentes. Charles Blanc se concentre sur le problème du type de la surface de Riemann en utilisant la classification des singularités de la surface ainsi que la notion de réseau topologique. Les influences principales de cette thèse sont des travaux mathématiques finlandais : ceux d'Iversen, d'Elfving et de Nevanlinna<sup>486</sup>. Le seul mathématicien français dont Blanc s'inspire est André Bloch, dont il reprend le principe de continuité topologique et la notion de transformation.

---


$$\sum_{i=1}^q r(D_i) \geq (q-2) \left( S - \frac{3}{2\delta_0} L \right) - (\rho + 1).$$

La quantité  $r(D_i)$  est définie par la différence entre le nombre de feuillettes de la surface  $\Sigma$  qui recouvrent complètement le domaine  $D_i$  et l'ordre de ramification entre elles des portions de ces feuillettes intérieures à  $D_i$ , DUFRESNOY 1941a, p. 188. La caractéristique  $\rho$  de la surface  $\Sigma$  est donnée par  $\rho = -s + a - f$  où  $s$ ,  $a$  et  $f$  sont respectivement le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et le nombre de faces d'un pavage de la surface à l'aide de triangles, DUFRESNOY 1941a, p. 180.

482. Cf. DUFRESNOY 1941a, p. 204.

483. Il désigne ces théorèmes par le terme « théorème du défaut ».

484. Selon le rapport de Valiron.

485. Cf. DUFRESNOY 1941b, p. 245. Il cite alors les articles suivants de Valiron : G. Valiron, « Sur les fonctions algébroides méromorphes du second degré. Sur les algébroides méromorphes. Sur quelques propriétés des algébroides », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 189 (1929) 623-625, 729-731, 824-826 ; ainsi que « Sur la dérivée des fonctions algébroides », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 59 (1931) 17-39.

486. Aucun de ces trois mathématiciens ne sont de la même génération mais Rolf Nevanlinna a rencontré Iversen : lors de ses premiers cours à l'Université d'Helsinki en 1913-1914, Iversen y était alors professeur assistant, HAYMAN 1982. Selon NORDSTRÖM 1999, la thèse d'Elfving a été écrite sous la direction de Rolf Nevanlinna. Elfving a donc été un étudiant de Rolf Nevanlinna.

Jacques Dufresnoy se fonde principalement sur une unique référence, un mémoire de Lars Ahlfors où ce dernier expose sa théorie sur l'étude topologique des surfaces de Riemann. Dufresnoy précise l'un des théorèmes les plus importants de ce dernier et l'applique ensuite à retrouver et prolonger des théorèmes plus anciens de théories des fonctions de la variable complexe. Partant d'un résultat topologique sur les surfaces de Riemann, Jacques Dufresnoy cherche ainsi à en montrer l'intérêt en unifiant divers résultats en théorie des fonctions, des théorèmes de Picard de 1879 jusqu'aux plus récents avec ceux de Nevanlinna en passant par ceux de Bloch<sup>487</sup>.

Les deux doctorants ont cependant en commun le peu de références à des travaux français comme sources de leur recherche. Hormis les travaux de Bloch pour Blanc et ceux de Valiron pour Dufresnoy, les autres travaux de mathématiciens français sont cités comme des résultats classiques qu'ils arrivent à retrouver. Ils n'apparaissent pas comme influents pour les recherches entreprises par les doctorants. Le seul qui pourrait avoir joué un certain rôle est Valiron, pour le choix du sujet de Dufresnoy. Ce dernier le remercie en effet de l'avoir « incité à l'étude des remarquables Mémoires d'Ahlfors »<sup>488</sup>.

Ils ont également en commun des références à des travaux finlandais, ceux de Nevanlinna et d'Ahlfors, notamment quand ces derniers reprennent des résultats et théorèmes de Bloch. Georges Valiron dans son article *Des théorèmes de Bloch aux théories d'Ahlfors*, VALIRON 1949, souligne d'ailleurs la participation de Jacques Dufresnoy<sup>489</sup> à cette reprise des travaux de Bloch. Valiron parle également de l'effort réalisé par Dufresnoy pour proposer une théorie plus générale à partir de laquelle on peut déduire de nombreux résultats précédemment obtenus en théorie des fonctions de la variable complexe<sup>490</sup>.

---

487. Il a ainsi été difficile de classer le doctorat de ce dernier. Les applications qu'il fait de son théorème appartiennent à la première tendance de la recherche en théorie des fonctions, celle qui trouve son origine dans les théorèmes d'Émile Picard. La place accordée aux rappels d'anciens théorèmes dans l'avant-propos est significative à cet égard : elle est similaire à celle des doctorats du premier groupe. Cependant, les méthodes mathématiques citées et utilisées par Dufresnoy appartiennent à la nouvelle tendance de la recherche mathématique en théorie des fonctions qui se caractérise par une approche topologique des problèmes d'analyse. On ne peut relier les méthodes et les outils mathématiques employées par Dufresnoy à ceux qui se trouvent utilisés dans le premier regroupement de thèses auquel j'ai procédé. Il ne cherche pas à obtenir des estimations de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes ou algébroides qu'il considère. Le doctorant ne cite d'ailleurs aucune de ses premières thèses ni aucun travail ultérieur de leurs auteurs. Son travail trouve sa source dans une approche topologique des problèmes et dans les travaux finlandais sur les surfaces de Riemann de Rolf Nevanlinna, mais surtout de Lars Ahlfors.

488. Cf. DUFRESNOY 1941b, p. 5.

489. dans des notes aux *Comptes Rendus* présentées l'année de sa soutenance de thèse.

490. Cf. VALIRON 1949, p. 182. Valiron exprimait d'ailleurs un tel jugement en conclusion du rapport sur la thèse :

« Ce bref résumé montre tout ce que M. Dufresnoy a su tirer de cette belle méthode topologique que L. Ahlfors a imaginée et a développée d'une façon très remarquable, mais sans pouvoir l'appliquer aux fonctions méromorphes dans le cercle  $|z| < R$  lorsque le produit  $S(r)(R-r)$  reste borné. Pour déduire de cette méthode les théorèmes généraux en termes finis, tels que le théorème de Bloch et des propositions plus précises, mais encore imparfaites, que M. Ahlfors avait obtenues par une autre méthode, il restait à

**Un dernier doctorat : celui de Chi-Tai Chuang** Enfin parmi les treize doctorats classés en théorie des fonctions de la variable complexe figure un dernier doctorat que je n'ai pas classé dans les deux catégories précédentes. Il s'agit du mémoire de Chi-Tai Chuang, *Étude sur les familles normales et les familles quasi-normales de fonctions méromorphes*, soutenu en 1938.

Les travaux de Chi-Tai Chuang ont comme origine les recherches de Paul Montel<sup>491</sup> et ses travaux sur les familles normales de fonctions, travaux qui pour l'essentiel datent du premier tiers du XX<sup>ème</sup> siècle<sup>492</sup>. En 1938, Chi-Tai Chuang fait référence à cette source originelle pour ses travaux. Les recherches de Paul Montel ne constituent cependant pas le point de départ de ses recherches<sup>493</sup>. Pendant les années 1920 et 1930, la théorie des familles normales a été reprise et retravaillée par d'autres mathématiciens et c'est à leurs travaux que se réfère le doctorant. En effet, si on regarde les publications de Paul Montel pendant l'entre-deux-guerres et surtout pendant les années 1930, avant 1938, année de soutenance de Chi-Tai Chuang, elles ne concernent que peu la théorie des familles normales<sup>494</sup>. La présence du mathématicien parmi les membres du jury en tant que simple examinateur et non pas rapporteur ou président est significative. Georges Valiron, qui a entre temps publié sur le sujet, apparaît alors plus au fait des dernières recherches. C'est sans doute la raison pour laquelle il est le rapporteur de la thèse<sup>495</sup>.

La thèse de Chi-Tai Chuang est divisée en deux parties, chacune concernant des familles de fonctions différentes et se fondant sur des travaux différents. La première étudie les familles de fonctions holomorphes et ce sont les travaux de Georges Valiron

---

franchir un pas important. C'est ce pas, analogue à celui qui séparait le théorème de M. Picard de ceux de Wiman et Valiron, que M. Dufresnoy franchit dans son chapitre III. Son mémoire contient un grand nombre de résultats nouveaux, simples et précis, exposés avec une grande concision et démontrés par des méthodes élégantes. »

491. Comme l'écrit Georges Valiron dès la première phrase du rapport sur la thèse.

492. Pour la définition des familles normales, cf. p.264 de la présente thèse. Selon MONTEL 1927 ou MONTEL 1924, p. 2-3, une famille de fonctions analytiques dans un domaine est quasi-normale si toute suite infinie de fonctions de cette famille admet au moins une fonction limite, la convergence vers cette fonction limite étant uniforme sauf autour d'un nombre *fini* de points du domaine.

493. Dans sa bibliographie, Chi-Tai Chuang ne cite que l'ouvrage de Montel récapitulatif de sa théorie des familles normales, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques*, MONTEL 1927 ainsi que l'article « Le rôle des familles normales », que ce dernier écrit pour l'*Enseignement mathématique* en 1934. Il en est de même dans le rapport de thèse qu'écrit Georges Valiron. Paul Montel est cité dans la première phrase, mais nulle mention n'est faite ensuite d'une utilisation de ses travaux par Chuang.

494. Cf. la liste des publications de Paul Montel présente en annexe. Entre 1930 et 1938, hormis l'article paru dans *Enseignement mathématique*, précédemment cité un seul autre ouvrage semble concerner ce domaine de recherche : il s'agit des *Leçons sur les fonctions entières et méromorphes*, Recueillies et rédigées par P. Sergescu, 1932, Paris, Gauthier-Villars (Publications du Séminaire mathématique de l'Université de Cluj).

495. Notons que Montel ne préside même pas le jury de ce travail ; la fonction est occupée par Émile Borel, sans doute pour des raisons institutionnelles du fait de la nationalité chinoise du doctorant. Chuang n'adresse aucun remerciement à Paul Montel, ils sont tous destinés à Georges Valiron.

des années 1930 qui sont la source principale des recherches de Chuang. La seconde étudie les familles de fonctions méromorphes et Chuang se réfère principalement aux ouvrages de Lars Ahlfors.

Dans la première partie, Chi-Tai Chuang étudie une question *formulée* mais non résolue par Paul Montel lors d'une conférence en 1934 à la Société mathématique suisse. Il recherche « les conditions de normalité d'une famille de fonctions holomorphes ne prenant pas la valeur zéro et dont une dérivée ne prend pas la valeur un »<sup>496</sup>. Parmi les mathématiciens qui ont déjà traité le problème et que cite le doctorant figurent Bruneau, Miranda, et Valiron<sup>497</sup>. Chang reprend les méthodes et les résultats de ce dernier. Il commence par démontrer un théorème général sur le comportement d'une fonction holomorphe dans le cercle unité et vérifiant certaines conditions, qu'il présente comme une généralisation d'un théorème de Valiron<sup>498</sup>. Dans sa démonstration, il reprend certaines méthodes du mathématicien. Les unes sont des méthodes utilisées spécifiquement pour les fonctions entières et qui datent du début des années 1920<sup>499</sup>. Les autres sont des reprises de méthodes de Bloch sur les domaines riemanniens couverts par les valeurs d'une fonction holomorphe du début des années 1930<sup>500</sup>.

Chuang applique ensuite ce théorème à l'étude du problème de Montel. Il reprend la formulation du problème par Valiron dans VALIRON 1937. Il recherche des conditions de normalité pour les familles de fonctions holomorphes  $f(z)$  pour lesquelles l'équation ci-dessous n'a pas de racines<sup>501</sup> :

$$e^f [f'^\nu + P_\nu(f', f'', \dots, f^{(\nu)})] = 1 \quad (1)$$

où  $P_\nu$  est un polynôme de degré  $\nu - 1$ . Il obtient des critères de quasi-normalité pour les familles de fonctions holomorphes vérifiant certaines conditions moins fortes, relatives à l'équation ci-dessus<sup>502</sup>. Il étudie également d'autres problèmes en considérant des hypothèses différentes de celles de l'équation (1)<sup>503</sup>.

Chuang approfondit également certains cas particuliers. Il ne se réfère plus alors uniquement aux travaux de Valiron. Il cite des méthodes de Miranda et de Milloux de 1935 et 1937<sup>504</sup>. Il utilise en outre les notions mathématiques, les formules et théorèmes

496. Cf. CHUANG 1938, p. 7 et p.29.

497. CHUANG 1938, p. 29.

498. Cf. CHUANG 1938, p. 9. Il montre qu'il existe certains domaines sur lesquels soit la fonction est univalente soit certaines de ses dérivées vérifient des inégalités particulières. Chuang se réfère alors à VALIRON 1937.

499. Chuang renvoie notamment à VALIRON 1921.

500. Chuang renvoie à VALIRON 1930.

501. Cf. CHUANG 1938, p. 29.

502. Par exemple, si une fonction est holomorphe dans un domaine  $D$  et si l'équation (1) a au plus  $m$  racines dans  $D$ ,  $f(z)$  appartient à une famille quasi-normale dans  $D$ , cf. CHUANG 1938, p. 33-34.

503. Par exemple, l'expression  $|f'^\nu + P_\nu(f', f'', \dots, f^{(\nu)})|$  est bornée aux points où la fonction  $f(z)$  prend une suite de valeurs données, CHUANG 1938, p. 41-46.

504. Cf. la bibliographie donnée par Chuang CHUANG 1938, p. 86. Ce dernier évoque les travaux suivants : MIRANDA C., « Sur un nouveau critère de normalité pour les familles de fonctions », *Bulletin*

exposés par Nevanlinna dans NEVANLINNA 1929<sup>505</sup>. Il énonce des critères de famille normale qui découlent de la majoration qu'il fait du module de la fonction.

Chuang reprend ensuite le premier théorème qu'il a démontré pour réaliser une étude plus fine du domaine riemannien couvert par les valeurs d'une fonction holomorphe. Il étend certains théorèmes de Bloch et de Valiron<sup>506</sup> et il formule d'autres critères de quasi-normalité faisant intervenir des hypothèses sur le nombre de branches holomorphes de la fonction inverse de  $f(z)$  dans certains domaines, pour  $Z = f(z)$  la famille de fonction considérée.

L'étude de certains domaines riemanniens à partir des travaux de Valiron et de Bloch est ainsi une partie importante du travail de Chuang. Elle lui permet d'énoncer plusieurs critères de quasi-normalité. D'ailleurs, dans le commentaire de l'article de Paul Montel, *Familles normales de fonctions analytiques*, pour les *Selecta* du mathématicien<sup>507</sup>, Henri Milloux souligne le lien entre les publications de Valiron et celles de Chuang. Il signale leur approche topologique du problème<sup>508</sup> :

« Un critère important, pressenti par M. Montel, a été établi par C. Miranda (*Bull. Soc. Math*, 1935) après des résultats partiels établis par F. Bureau ; il est relatif aux fonctions holomorphes ne prenant pas la valeur  $a$  et dont les dérivées ne prennent pas la valeur  $b$  ( $b$  différent de zéro). L'importance de ce critère provient de l'introduction des valeurs des dérivées. Quelque récent qu'il soit, il a été suivi de nombreux résultats dus surtout à G. Valiron (*Act. Sc. et Ind.* 570 (1937)) et à Chi-Tai Chuang (*Thèse et Bull. Soc. Math*, 1940) qui découvrent à leur tour d'autres critères de normalité faisant intervenir les domaines Riemanniens engendrés par des dérivées d'ordre quelconque. »

Dans la deuxième partie de son doctorat<sup>509</sup>, Chi-Tai Chuang étudie les familles de fonctions méromorphes. Il se fonde sur les travaux de Lars Ahlfors où ce dernier étudie les domaines dans lesquels une fonction méromorphe prend des valeurs appartenant à une région donnée<sup>510</sup>. Chuang énonce alors des critères de quasi-normalité pour des

de la *Société Mathématique* 63 (1935) 185-196 et MILLOUX Henri, « Sur la théorie des fonctions méromorphes dans le cercle unité », *Annales de l'École Normale Supérieure* (3) 64 (1937) 151-229. Il s'agit de travaux récents de Milloux et non de résultats de sa thèse. Ils ne sont pas en relation explicite avec la théorie des cercles de remplissage de ce dernier. Il y introduit de nouvelles notions telles que la pseudo-distance dans le plan d'où se déduisent les notions de centre non euclidien, de pseudo-rayon, etc., cf. CHUANG 1938, p. 56-60.

505. Cf. p. 261 de la présente thèse.

506. Cf. CHUANG 1938, p. 64-66.

507. Cf. MONTEL 1947b, p. 61.

508. lorsqu'il mentionne les contributions respectives de Miranda, Bureau, Valiron et Chuang à la résolution du problème de Montel de 1934.

509. Qui est beaucoup plus réduite : 12 pages alors que l'ensemble du mémoire est constitué de 86 pages.

510. Il s'agit des deux notes au *Comptes rendus de l'Académie des sciences* suivantes de 1932 : « Sur une généralisation du théorème de Picard », AHLFORS 1932c et « Sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes », AHLFORS 1932b et de l'article « Sur les », 1933, AHLFORS 1933.

familles de fonctions méromorphes qui vérifient des hypothèses relatives aux domaines où elles prennent certaines valeurs de la sphère de Riemann<sup>511</sup>. Pour démontrer la validité de ces critères, Chuang se sert de résultats de Lars Ahlfors mais également de propriétés des suites exceptionnelles d'Ostrowski. De ces résultats sur les familles quasi-normales, Chuang généralise certains théorèmes d'Ahlfors sur les domaines dans lesquels une fonction méromorphe prend des valeurs appartenant à une région donnée, théorèmes dont il se sert auparavant pour énoncer ses critères.

La thèse de Chi-Tai Chuang montre comment la théorie des familles normales, initialement introduite par Paul Montel, est travaillée à la fin des années 1930. Cette théorie apparaît à la fin de l'entre-deux-guerres comme une théorie classique. Les travaux initiaux de Montel sont cités comme source originelle mais ils ne sont pas repris directement. Le travail de Chi-Tai Chuang illustre comment les approches topologiques sont utilisées pour aborder le problème de critères de familles normales. Elles interviennent dans les démonstrations et dans les hypothèses formulées sur les familles de fonctions. La thèse du doctorant révèle également la contribution de Valiron à l'étude de la théorie des fonctions avec une approche différente de celle que j'ai mise en valeur par l'analyse du premier groupe des thèses classées en théorie des fonctions de la variable complexe<sup>512</sup>. Les travaux de Valiron font en quelque sorte le lien entre ceux de Bloch et ceux d'Ahlfors. Ce lien est explicite dans le mémoire de Chuang alors qu'il n'est pas mentionné dans les autres thèses, comme celles de Charles Blanc ou de Jacques Dufresnoy. On peut cependant en percevoir des signes dans la participation de Valiron aux jurys de ces deux thèses en tant que rapporteur et dans le conseil qu'il aurait adressé à Dufresnoy<sup>513</sup>.

L'étude des trois groupes de thèses dont Gaier identifie le théorème de représentation conforme de Riemann comme source originelle de leurs sujets révèle la place qu'occupent certains travaux mathématiques parmi les références citées et/ou utilisées par les doctorants. Elle met également en évidence la façon dont sont repris certains de ces travaux et comment certains thèmes particuliers se développent.

---

511. D'après Valiron, Chuang donne des critères de quasi-normalité pour des « familles de fonctions méromorphes dont le domaine de recouvrement jouit de propriétés assez comparables à celles des fonctions  $p$ -valentes ou pour des familles de fonctions  $f(z)$  telles que tout cercle de rayon  $r$  de la sphère de Riemann ne contienne que  $q$  feuillets simples au plus de la riemanienne de  $f(z)$ . »

512. Comme le montre sa *Notice sur travaux de Georges Valiron*, ce dernier connaît d'ailleurs l'utilisation que fait Chuang de ses recherches, cf. VALIRON 1952, p. 28-29, dans le chapitre VII, « Questions de convergence. Familles normales et quasi-normales ». Georges Valiron y signale que des extensions de ses résultats sur les critères de normalité et de quasi-normalité de famille de fonctions ont été données par Chuang.

513. Comme je l'ai déjà indiqué précédemment, Dufresnoy affirme que Valiron lui a conseillé la lecture de mémoires de Lars Ahlfors.

Ainsi, l'étude des trois thèses du groupe sur les fonctions univalentes et multivalentes indique un certain élan de la recherche sur ce sujet. Les références aux travaux de Montel sont communes aux doctorats. Les trois thèses se citent entre elles et celles soutenues plus tardivement reprennent certains résultats démontrés dans les thèses présentées antérieurement. Les autres thèses relatives aux deux autres groupes portent sur des sujets plus isolés qui ne sont, pour l'essentiel, pas repris dans d'autres doctorats mais qui s'inscrivent dans une évolution de la recherche plus globale.

Les doctorats soutenus à partir de la deuxième moitié des années 1930, ceux de Jacqueline Ferrand, de Charles Blanc, de Jacques Dufresnoy et de Chi-Tai Chuang, accordent une place importante parmi leurs citations aux travaux de mathématiciens finlandais et notamment à ceux de Lars Ahlfors. Ce ne sont pas toujours les mêmes articles du mathématicien qui sont repris<sup>514</sup> mais l'approche topologique de ce dernier est commune à tous les articles cités. Son importance parmi ces quatre doctorats semble ainsi significative de son importance parmi les recherches en théorie des fonctions de la variable complexe de cette fin de l'entre-deux-guerres. Elle semble correspondre, dans le corpus des thèses, à une diminution de l'influence exercée par les mathématiciens français. Les travaux de ces derniers ne sont presque plus repris à la fin des années 1930. S'ils sont cités, c'est essentiellement en tant que publications classiques sur un sujet. Deux mathématiciens font cependant exception, Valiron et Bloch. Certains de leurs travaux sont retravaillés, mais ils ne constituent cependant pas la référence principale des thèses.

## Conclusion

En reprenant la distinction de Gaier sur les théorèmes sources des développements de la théorie des fonctions de la variable complexe, j'ai analysé séparément les thèses relatives aux théorèmes de Picard et celles relatives aux sujets développés à la suite du théorème de représentation conforme. L'étude de ces thèses a montré que la nature des résultats obtenus, les théories utilisées, les références citées diffèrent entre ces deux sous-ensembles. Les résultats du premier groupe sont essentiellement de nature quantitative, ils fournissent des estimations de la croissance de la fonction, de la distribution de ses valeurs suivant certaines directions asymptotiques ou au voisinage d'un point

---

514. Jacqueline Ferrand reprend ses travaux sur l'existence d'une dérivée à l'infini, Jacques Dufresnoy reprend surtout ses travaux sur les domaines de recouvrement, Chi-Tai Chuang et Charles Blanc ses recherches sur les domaines dans lesquels une fonction méromorphe prend des valeurs appartenant à une région donnée (cependant Blanc ne fait que les citer ; il ne les utilise pas directement).



essentiel. Ceux du deuxième sous-ensemble<sup>515</sup> sont davantage de nature qualitative et géométrique : sur la représentation conforme, sur les surfaces de Riemann<sup>516</sup>.

L'analyse précise du corpus des thèses montre comment ces sujets sont étudiés à des périodes différentes de l'entre-deux-guerres. Cette périodisation ne semblait pas si évidente à l'issue du bilan historiographique dressé précédemment. Pendant les années 1920, seules des thèses prolongeant les travaux de Picard, Landau, Schottky et Borel sont soutenues. Le début des années 1930 est une période de transition. Des thèses du premier groupe sont encore soutenues et celles du deuxième sous-ensemble commencent à l'être. À partir du milieu des années 1930 et jusqu'au début des années 1940, seules sont soutenues les thèses fondées, pour l'essentiel, sur une approche topologique et géométrique du domaine.

Cette évolution des sujets étudiés se traduit dans les thèses par une évolution des références citées. Elle correspond au changement des questions traitées et au changement d'approche. Les thèses des années 1930 ne citent presque plus de travaux de mathématiciens français du début du XX<sup>ème</sup> siècle. Ils situent l'origine de leur recherche dans les nouvelles théories établies par les mathématiciens étrangers tels que Lars Ahlfors ou Carathéodory. En outre, alors que les thèses de la première tendance mentionnent notamment l'apport des travaux de Nevanlinna à la théorie des fonctions, abordée quantitativement, ces mêmes travaux de Nevanlinna sont très peu cités ou repris dans les mémoires de la deuxième tendance. Les références des publications citées par les deux sous-ensembles de thèses sont pour l'essentiel distinctes. Cependant les auteurs de ces publications restent parfois les mêmes. Les travaux de Valiron qui sont repris par le premier sous-ensemble, par exemple par Milloux et Rauch, ne sont pas ceux qui sont étudiés par certaines thèses du deuxième sous-ensemble, par exemple Dufresnoy. De plus, une théorie particulière apparaît transversale à ces deux sous-ensembles : la théorie des fonctions normales de Paul Montel. Elle est ainsi citée à la fois par Henri Cartan et aussi par Jean Dieudonné, Frédéric Marty, Jacqueline Ferrand, Chi-Tai Chuang et Jacques Dufresnoy. Mise à part dans la thèse de Chuang elle n'est pas le sujet principal de la thèse. Elle apparaît en fait comme une théorie devenue classique en théorie des fonctions de la variable normale. Paul Montel en est l'initiateur mais elle a été ensuite retravaillée par d'autres et constitue une question transversale à différentes thèses. Trouver des critères de normalité apparaît ainsi comme une application possible de théorèmes.

L'évolution des références citées et utilisées par les doctorants se produit également à l'intérieur des groupes considérés. Par exemple, la théorie de Nevanlinna est reprise

---

515. formé par les trois autres groupes, cf. p.252.

516. Je reprends ici les termes employés par King-Lai Hiong dans l'introduction de son mémoire et qui concernaient plus précisément les résultats préalablement énoncés pour les fonctions entières, cf. HIONG 1934, p. 1.

par les doctorants du premier groupe dès qu'elle est exposée par le mathématicien. Les doctorants s'approprient très rapidement les nouveaux résultats et les nouvelles théories. La date des articles auxquels ils se réfèrent est, pour la plupart des thèses, contemporaine de la date de leur soutenance. Les étudiants français de l'entre-deux-guerres lisent les travaux étrangers et même allemands dès la fin de la première guerre mondiale. Ils connaissent les travaux étrangers à partir du moment où ceux-ci sont bien représentés sur la scène mathématique internationale. Les relations politiques internationales, qui jouent davantage de rôle pour l'organisation de congrès internationaux de mathématiciens, ne semblent pas avoir autant de conséquences à ce niveau de la recherche.

On peut alors s'interroger sur la façon dont sont diffusées les nouvelles recherches en théorie des fonctions de la variable complexe en France pendant l'entre-deux-guerres. Comment y contribuent les différents séminaires (le séminaire Hadamard tout d'abord, puis le séminaire Julia), les cours donnés à la faculté des Sciences et au Collège de France ? La question est encore ouverte. Cependant, on peut mentionner le rôle particulier du séminaire Hadamard pour le domaine de la théorie des fonctions de la variable complexe. On constate ainsi que les sujets des conférences et des mémoires analysés, tels qu'ils sont rapportés dans l'*Annuaire du Collège de France*, concernent fréquemment le type de questions abordées dans les thèses que j'ai ici considérées : sur les propriétés générales des fonctions complexes, beaucoup plus souvent que d'autres problèmes de théorie des fonctions, sur les séries ou les fonctions réelles par exemple, ou sur d'autres domaines des sciences mathématiques.

De plus, les mathématiciens étrangers qui sont le plus cités par les doctorants français interviennent dans le séminaire pour présenter leur recherche ou bien leurs résultats y sont présentés. Ainsi Rolf Nevanlinna est venu en 1925-1926 pour résumer ses résultats sur la théorie des fonctions entières et le théorème de Picard. Il est revenu en 1928-1929 pour traiter de la détermination d'une fonction analytique par ses valeurs en une infinité dénombrable de points à distance finie. Il a également donné à cette occasion certaines précisions « inattendues » en « s'attachant aux zéros multiples des fonctions entières ». Dès 1927-1928, les vues récentes, « nouvelles et particulièrement suggestives » de Carathéodory sur le problème de Riemann ont été exposées ainsi que son extension aux fonctions de deux variables du « lemme de Schwarz », soit au moment même où René de Possel était étudiant à l'Ecole normale. Lars Ahlfors a participé au séminaire dès 1928-1929. Il a alors démontré un « théorème jusque là seulement conjecturé sur les fonctions entières d'ordre fini ». Il est revenu en 1931-1932 pour « exposer ses nouvelles et profondes idées sur le théorème de Picard et ses généralisations ». Le mathématicien Miranda était également présent pendant toute l'année 1934-1935 aux séances du séminaire.

En outre, les doctorants y interviennent pour présenter leurs travaux ou exposer les théories d'autres mathématiciens. Ainsi en 1934-1935, Marty présente, après un séjour à l'Université d'Helsingfors<sup>517</sup>, les nouveaux mémoires d'Ahlfors où ce dernier étend encore les résultats de Rolf Nevanlinna<sup>518</sup>. Sans que l'on sache qui a donné les conférences, il est également mentionné que pendant l'année 1935-1936 ont été à nouveau exposés d'importants développements donnés aux idées de Rolf Nevanlinna en théorie des fonctions par Ahlfors. En 1936-1937, Hadamard mentionne comme conférenciers sur la théorie des fonctions analytiques Chi-Tai Chuang et Henri Milloux.

Enfin, les nouveaux docteurs en théorie des fonctions diffusent également leur recherche au cours Peccot du Collège de France. Ce dernier apparaît alors comme un lieu privilégié pour faire connaître les résultats obtenus dans la thèse qu'on vient d'élaborer et les théories sur lesquelles ils reposent. Henri Milloux, Henri Cartan, Jean Dieudonné et René de Possel y présentent ainsi au moins une partie des résultats de leurs thèses<sup>519</sup>.

### 5.3.3 Les domaines de convergence de séries

Les deux premières thèses à être soutenues dans ce groupe de 4 doctorats sur les domaines de convergence de séries sont celles de Jacques Soula en 1921<sup>520</sup> et de Szolem Mandelbrojt en 1923<sup>521</sup>. Elles traitent spécifiquement des séries de Taylor. Les doctorants s'intéressent notamment aux points de singularité de fonctions définies par leur développement en séries de Taylor. Vladimir Bernstein<sup>522</sup> s'intéresse également aux points de singularité mais pour les séries de Dirichlet et il étudie le domaine de convergence de telles séries. C'est enfin avec un point de vue similaire que Georges Bourion étudie en 1933 le phénomène de l'ultraconvergence<sup>523</sup>. Il étudie les domaines d'ultra-convergence de certaines séries de Taylor lacunaires et d'une classe importante de séries de fonctions analytiques. Ces quatre thèses ont ainsi en commun l'étude de points singuliers de séries et l'étude de domaines où ces séries peuvent être prolongées. Elles sont écrites par quatre doctorants parmi lesquels deux sont étrangers (Szolem

---

517. C'est-à-dire de l'université d'Helsinki.

518. Hadamard est particulièrement élogieux à ce sujet : Marty « nous a fait connaître comment les vues fécondes qui se sont échangées dans cette ville pendant l'année scolaire ont abouti à deux beaux mémoires de M. Ahlfors dans lesquels les résultats déjà si admirables que la science doit déjà à M. Rolf Nevanlinna ont acquis une forme particulièrement lumineuse et une portée encore agrandie. »

519. Le cas de Frédéric Marty est différent. Il est titulaire de la chaire seulement en 1938-1939 et il présente alors un cours intitulé « la théorie des hypergroupes et ses applications récentes ».

520. *Sur la recherche des points singuliers de certaines fonctions définies par leur développement de Taylor*, 1921.

521. *Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes*, 1923.

522. Dans *Sur les singularités des séries de Dirichlet*, 1930.

523. Dans sa thèse *Recherches sur l'ultraconvergence*, 1933.

Mandelbrojt est polonais et Vladimir Bernstein est russe) et un est normalien, Georges Bourion<sup>524</sup>.

Le travail de Jacques Soula porte plus précisément sur les points singuliers de fonctions définies par leur développement en séries de Taylor<sup>525</sup>. Il étudie notamment les conditions à imposer pour que des points singuliers de développements en séries de Taylor soient principaux<sup>526</sup>. Jacques Soula et Paul Montel, dans le rapport de thèse, font essentiellement référence à des travaux français du début du XX<sup>ème</sup> siècle, ceux de Borel<sup>527</sup>, Hadamard<sup>528</sup>, Léau<sup>529</sup> et Fabry<sup>530</sup>. Soula démontre et prolonge dans son mémoire certains de leurs résultats et de leurs théorèmes : par exemple, ceux d'Hadamard et Borel sur la caractérisation des points singuliers de la série  $H(\phi, k)$ , ceux de Léau sur les points singuliers des séries de fonction  $\sum_n g(a_n)x^n$  dans le cas où  $g$  est une fonction entière et où  $\phi(x) = \sum_n a_n x^n$  vérifie certaines conditions<sup>531</sup>, ou encore ceux de Fabry relatifs aux fonctions de la forme  $\sum g(n)x^n$ . Les principales méthodes utilisées par Soula remontent aux deux premières décennies du XX<sup>ème</sup> siècle. Il s'inspire ainsi de celles de Pincherle pour la théorie générale des opérations, de celles de Borel pour l'étude des points singuliers de Taylor et de celles de Montel pour les séries de polynômes<sup>532</sup>.

524. Élève de l'École normale supérieure entré en 1925, il est notamment de la promotion de Jacques Herbrand et de Miron Nicolesco. Je n'ai pu obtenir aucun renseignement sur la formation initiale ou sur l'origine de Jacques Soula.

525. Soula distingue deux catégories de questions qu'il traite conjointement dans son mémoire. Il se donne deux séries de Taylor dont les rayons de convergence ne sont ni nuls ni infinis  $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  et  $k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ . Il s'intéresse d'une part aux points singuliers de la fonction analytique,  $H[\phi, k](x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$  : à leur expression en fonction des points singuliers  $\beta$  et  $\gamma$  de  $\phi$  et  $k$ , à leur existence effective, cf. SOULA 1921, p. 2-3. En supposant connus les points singuliers de  $\phi$ , il étudie d'autre part les points singuliers de la fonction  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(a_n)x^n$  où  $g$  est une fonction définie pour les  $a_n$ , ( $n = 0, 1; \dots$ ) et en général holomorphe en ces points, cf. SOULA 1921, p. 3.

526. Selon la définition qu'il en donne, SOULA 1921, p. 3, avec les notations précédentes, un point singulier  $\beta$  de  $\phi$  est principal si  $H[\phi, k]$  admet le point singulier  $\beta\gamma$  toutes les fois que  $k(x)$  est singulière en  $\gamma$  et que  $\beta\gamma$  ne peut être obtenu qu'une seule fois.

527. et notamment ses publications de 1898, « Sur les singularités des séries de Taylor », *Bulletin de la société mathématique de France* 26 (1898) ou « Sur la recherche des points singuliers des séries de Taylor », *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (12 décembre 1898).

528. *La série de Taylor et son prolongement analytique*, 1901, Paris : Gauthier-Villars, Collection Scientia (12).

529. On peut mentionner : Leau, « Recherches sur les singularités d'une fonction définie par une série de Taylor », *Journal des mathématiques pures et appliquées* 5 (1899), cf. SOULA 1921, p. 3.

530. « Sur les points singuliers d'une série de Taylor », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (5) 4 (1898). On pourrait également mentionner les recherches que Le Roy présente et qui seront reprises également en 1923 par Szolem Mandelbrojt : Le Roy, « Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor », *Annales de la faculté de Toulouse* 2 (1900).

531. Léau considère notamment le cas où  $\phi$  n'a que le point singulier 1 et où il existe un nombre positif  $q$  tel que  $|1 - x|^q |\phi(x)|$  soit borné au voisinage du point 1, ce que Soula décrit par « ce point singulier est d'ordre fini et [...] son ordre est  $q$  », cf. SOULA 1921, p. 4. Le doctorant étend ce résultat au cas où  $\phi$  n'a qu'un point singulier d'ordre  $q < 1$  et où  $g$  n'est plus qu'holomorphe à l'origine.

532. Cf. MONTEL 1910, *Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe*, 1910, Paris, Gauthier-Villars. Soula va ainsi ramener une grande partie des ses questions à l'étude de la fonction

Les références citées par Szolem Mandelbrojt sont pour l'essentiel identiques. Il mentionne les mêmes ouvrages d'Hadamard, Borel, Fabry et Léau. Il se réfère également à d'autres publications qui se rapportent plus spécifiquement à son sujet de thèse. Il cite ainsi certains travaux de Fatou de 1906<sup>533</sup>, démontrés dans le cas général 10 ans plus tard par Hurwitz et Polya<sup>534</sup>, sur les transformations à faire sur les coefficients d'une série de Taylor de manière à ce que la nouvelle série admette le cercle de convergence comme coupure. En outre, Mandelbrojt s'intéresse plus spécifiquement au cercle de convergence de séries lacunaires et à la propriété de celui-ci d'être une coupure de la série de Taylor. Il cherche à établir une « liaison entre la nature et le nombre de singularités de la série  $\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$  (les  $a_n$  étant quelconques) et la croissance de la suite  $\lambda_n$  ». Il cite alors des recherches récentes d'Alexander Ostrowski, de 1922, sur l'extension du domaine de convergence uniforme d'une suite  $S_{n_1}, S_{n_2}, \dots, S_{n_i}, \dots$  où  $S_n = \sum_{m=1}^n a_m x^m$  en dehors du cercle de convergence de la série<sup>535</sup>. Mandelbrojt trouve ainsi des relations entre la convergence de la suite  $S_n$  en des points extérieurs à l'intérieur du cercle de convergence et l'existence de lacunes pour la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ .

Ces deux premières thèses s'intéressent donc aux points singuliers de certaines séries de Taylor. Les doctorants fondent l'essentiel de leur recherche sur une tradition mathématique empruntée à l'analyse française du début du XX<sup>ème</sup> siècle. D'ailleurs, il peut être intéressant de comparer les remerciements qu'ils adressent à la fin des introductions respectives de leur mémoire. Hadamard est remercié formellement par les deux doctorants<sup>536</sup>. On peut s'interroger sur la signification d'un tel remerciement : il indiquerait la reconnaissance de l'influence intellectuelle exercée par le mathématicien mais pourrait également avoir une visée stratégique. Hadamard ne fait pas partie des jurys pour des raisons institutionnelles mais il est professeur au Collège de France pen-

$Q(x, \lambda) = \lambda \phi(x) + \lambda^2 \phi_2(x) + \dots + \lambda^p \phi_p(x) + \dots$  où  $\phi(x) = \sum a_n x^n$  et  $\phi_p(x) = \sum a_n^p x^n$  si  $p \geq 2$ ,  $\phi_p$  étant l'itérée  $p$  fois de  $\phi$  par l'opération  $H$ , cf. SOULA 1921, p. 5.

533. Fatou, « Séries trigonométriques et séries de Taylor », *Acta mathematica* 30 (1906) 335-400.

534. Hurwitz et Polya, « Zwei Beweise eines von Herrn Fatou Vermuteten Satzes », *Acta mathematica* 40 (1916) 179-183, cf. MANDELBROJT 1923, p. 3.

535. Cf. MANDELBROJT 1923, p. 2. Mandelbrojt fait ainsi référence à la publication d'Ostrowski : « Über voll ständige Gebiete gleichmässiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen », *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* (1) 3-4 (1922) 327-350. Ces références seront d'ailleurs reprises par Georges Bourion dans son étude de l'ultraconvergence de certaines séries en 1933.

536. Soula le remercie « pour les nombreux encouragements reçus », cf. SOULA 1921, p. 7. Mandelbrojt adresse « ses vifs remerciements à M. Hadamard, qui à été le premier à s'intéresser à [ses] recherches dès [son] arrivée à Paris », cf. MANDELBROJT 1923, p. 5. On peut d'ailleurs s'interroger sur la véracité de ces propos qui diffèrent quelque peu des souvenirs que Mandelbrojt relate dans MANDELBROJT 1985, p. 10-14. Dans l'interview qu'il donne à son neveu, il affirme en effet n'avoir parlé pour la première fois à Hadamard qu'avant de faire publier son mémoire de thèse. Il dit cependant avoir assisté, dès son arrivée en France, aux séances du séminaire Hadamard (p.8-9). Selon Mandelbrojt, sa recherche a très fortement été marquée par les publications du mathématicien.

dant l'entre-deux-guerres<sup>537</sup> et considéré comme l'un des « patrons » mathématiques en France<sup>538</sup>.

Après ces deux doctorats sur les singularités de séries de Taylor, en 1930, Vladimir Bernstein<sup>539</sup> s'intéresse à des questions sur les séries de Dirichlet<sup>540</sup>, qu'il formule comme suit<sup>541</sup>

- « quelles sont les suites d'exposants  $\{\lambda_n\}$  pour lesquelles toute fonction  $f(s)$  déterminée par une série du type  $[f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}]$  possède nécessairement au moins une singularité sur la droite de convergence de la série<sup>542</sup> ?
- Est-il possible de déterminer pour les autres suites d'exposants une droite sur laquelle la fonction possède nécessairement au moins une singularité, tout en restant holomorphe dans le demi-plan limité par cette droite<sup>543</sup>; quelle peut être la position de cette droite par rapport à la droite de convergence ? »

Vladimir Bernstein cherche à répondre, dans des cas particuliers, à ces problèmes sur la distribution des points singuliers des séries de Dirichlet. Au contraire de Soula ou Mandelbrojt, il ne se réfère que très peu à des publications mathématiques françaises. Cette absence de références françaises renvoie au bilan historiographique précédent : dans JULIA 1932, Julia ne cite aucun nom de mathématicien français ayant publié sur les séries de Dirichlet avant Vladimir Bernstein.

Le doctorant se réfère surtout aux résultats établis par Pólya au cours des années 1920, ainsi qu'à des résultats de Carlson et de Landau. Ces derniers établissent certaines conditions sur la suite des exposants  $\{\lambda_n\}$  afin que la droite de convergence de la série de Dirichlet soit une coupure ou contienne une infinité de points singuliers<sup>544</sup>. Les théorèmes présentés par Carlson et Landau d'une part, Pólya d'autre part, constituent le fondement de ses travaux, selon les propos du doctorant<sup>545</sup>. Dans son mémoire, il s'attache à les étendre en choisissant des conditions plus générales sur les suites  $\{\lambda_n\}$ .

537. Il y est nommé en 1909.

538. Cf. LELOUP et GISPert (prévu pour 2009).

539. dans sa thèse *Sur les singularités des séries de Dirichlet*, cf. BERNSTEIN 1930.

540. Une série de Dirichlet est de la forme  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ .

541. Cf. BERNSTEIN 1930, p. 2.

542. Pour rappel, on appelle droite de convergence de la série la droite verticale  $x = s_0$  où  $s_0 = \inf \{s \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \text{ converge}\}$ .

543. Il s'agit ici uniquement de droite verticale  $x = x_0$ .

544. Il s'agit des résultats présentés dans les références suivantes : F. Carlson et F. Landau, « Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des Fabryschen Lückensatzes », *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* (1921) 183-188; George Pólya, « Über die Existenz unendlich vieler singulärer Punkte auf der Konvergenzgeraden gewisser Dirichletscher Reihen », *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft* (1923) 45-50 et George Pólya, « Eine Verallgemeinerung des Fabryschen Lückensatzes », *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* 1927 187-195, cf. BERNSTEIN 1930, p. 3.

545. Le rapport de la thèse de Vladimir Bernstein est déclaré manquant aux Archives et on ne peut donc pas s'en servir pour faire une comparaison avec l'introduction du mémoire qui constitue ici ma seule source.

Vladimir Bernstein ne se réfère pas aux mêmes articles que Soula ou Mandelbrojt. Pourtant, il situe ses résultats dans la continuité de recherches déjà entreprises pour l'étude de singularités de fonctions définies par des séries de Taylor. Il introduit l'objet de son travail en partant de considérations sur les séries de Taylor et il compare le cercle de convergence des séries de Taylor avec la droite de convergence des séries de Dirichlet. Il établit de plus une analogie entre certains de ses résultats sur les séries de Dirichlet et certains de ceux établis par Soula, dans sa thèse, ou encore par Lindelöf et Carlson sur les séries de Taylor<sup>546</sup>.

On perçoit donc une dynamique entre les différentes thèses de Soula, Mandelbrojt et Bernstein en même temps qu'une évolution des références citées. La seule publication française que mentionne Vladimir Bernstein dans son introduction est en effet la monographie de Georges Valiron, 1926, *Théorie générale des séries de Dirichlet*, Paris : Gauthier-Villars (1926), *Mémorial des sciences mathématiques* (17). Elle semble avoir servi au doctorant d'ouvrage « initiateur » à la théorie des séries de Dirichlet<sup>547</sup>. En effet Valiron y analyse et y résume les idées et les résultats de l'essentiel des textes que Bernstein cite dans sa bibliographie, ceux de Landau et Carlson et ceux de Pólya<sup>548</sup>. Dans sa *Notice sur travaux scientifiques*, Georges Valiron indique toutefois qu'après la publication de cet ouvrage, il ne s'est plus intéressé à la théorie des séries de Dirichlet<sup>549</sup>. Les doctorats de Bernstein, de Soula, et Mandelbrojt sont surtout reliés entre

546. Il écrit ainsi, cf. BERNSTEIN 1930, p. 6 :

« Les deux premiers paragraphes du deuxième chapitre contiennent la démonstration de deux théorèmes que l'on peut considérer comme l'analogue des théorèmes que MM. Lindelöf, Carlson et Soula ont démontrés pour les séries de Taylor. »

547. Cette affirmation reste cependant une supposition de ma part qui tient non seulement à la date de parution de cet ouvrage, quatre années avant la soutenance de la thèse de Vladimir Bernstein, mais également aux propos qu'écrit le doctorant, BERNSTEIN 1930, p. 2 :

« Plusieurs auteurs se sont occupés de problèmes en rapport avec les questions qui nous intéressent ; je n'indiquerai ici que les résultats qui se rattachent directement à ceux qui forment l'objet de ce travail ; quant aux autres, on en trouvera une exposition assez complète dans le fascicule du *Mémorial des Sciences Mathématiques* consacré aux séries de Dirichlet. »

Le « fascicule du *Mémorial des Sciences Mathématiques* consacré aux séries de Dirichlet » désigne ici la monographie de Valiron que cite Bernstein dans sa bibliographie VALIRON 1926, p. 50-55.

548. Valiron leur consacre l'essentiel du chapitre 10 de son ouvrage intitulé « Singularités de la fonction  $f(s) [= \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}]$  dans le voisinage de la droite de convergence », VALIRON 1926, p. 21-22.

549. VALIRON 1952, p. 31. Compte-tenu de l'absence de remerciements à la fin de la thèse et de l'absence de rapports, les liens qui peuvent exister entre le doctorant et les mathématiciens français de l'époque n'apparaît pas clairement.

L'exemple de Vladimir Bernstein illustre un des problèmes que pose l'utilisation de sources telles que les avants-propos des thèses et les rapports sur la thèse pour saisir l'influence de la formation reçue par les étudiants, et donc la marque d'une certaine pratique mathématique dans l'écriture de la thèse. Dans quelle mesure peut-on trouver une trace dans les doctorats des cours suivis dans les différentes institutions françaises ou étrangères, des relations suivies par l'étudiant pour élaborer ses résultats ? La part de l'implicite dans les références évoquées par le jeune mathématicien joue un rôle dont il semble mal aisé de saisir l'exacte importance. Dans le cas de Vladimir Bernstein on peut notamment

eux par leur intérêt commun pour une question liée au prolongement analytique de certaines séries. Par ailleurs, on peut rappeler que Mandelbrojt va ensuite travailler sur les séries de Dirichlet et notamment sur la notion de droite de convergence<sup>550</sup>.

Le travail que présente trois ans plus tard Georges Bourion<sup>551</sup> prolonge certaines questions abordées par les trois précédents doctorants. Dès l'introduction de son mémoire, Bourion situe l'origine de ses recherches dans les publications d'Ostrowski sur les séries de Taylor lacunaires. Ces travaux étaient également cités par Mandelbrojt en 1923. En outre, Bourion présente sa thèse comme la suite des travaux de Vladimir Bernstein sur la théorie des séries de Dirichlet, où ce dernier montre que la fonction définie par une série de Dirichlet peut être holomorphe dans un demi-plan contenant le demi-plan de convergence<sup>552</sup>. Montel, dans le rapport de thèse, retient également les influences principales d'Ostrowski et de Bernstein.

Dans son doctorat, Georges Bourion s'intéresse plus particulièrement à la notion d'ultraconvergence pour différentes séries. Il définit cette notion, qui semble désigner sous le même nom les deux phénomènes mis en avant par Ostrowski et Bernstein<sup>553</sup> :

« Étant donnée une série de fonctions analytiques qui converge uniformément dans un domaine  $D$  et y définit une fonction analytique  $f(x)$ , il peut arriver qu'une suite de sommes partielles de cette série converge uniformément dans un domaine plus étendu ; on obtient alors une représentation de  $f(x)$  *meilleure* que celle d'où l'on est parti, en ce sens qu'elle reste valable dans les régions où la série diverge. C'est le phénomène de l'ultraconvergence. »

Plus précisément, Georges Bourion regarde dans un premier temps le phénomène de l'ultraconvergence pour les séries de Taylor. Il étudie les domaines de convergence de suites partielles de ces séries<sup>554</sup>. Il établit un lien entre les résultats obtenus et les structures « lacunaires » des séries de Taylor et entre les domaines de convergence et les indices des suites partielles correspondantes. Il s'intéresse également à la conservation de la structure lacunaire d'une série de Taylor possédant une suite partielle ultraconvergente, lorsqu'on développe en série de Taylor la fonction  $f$  autour d'un autre point de son domaine d'existence. Dans un deuxième temps, il étend plusieurs des résultats

---

s'interroger sur la fonction de l'ouvrage de Valiron dans l'origine du choix du sujet des théories de Dirichlet, sur son rôle dans le choix des publications étudiées plus précisément par Bernstein.

550. Cf. le bilan historiographique précédent. C'est Paul Lévy qui signalait dans LÉVY 1967, p. 181 la contribution de ce dernier à cette théorie.

551. *Recherches sur l'ultraconvergence* cf. BOURION 1933.

552. Cf. BOURION 1933, p. 2.

553. BOURION 1933, p. 1. Dans l'introduction de sa thèse, Georges Bourion cite d'autres travaux de mathématiciens, comme ceux de Porter, Jentzsch pour les séries de Taylor, ceux d'Harald Bohr pour les séries de Dirichlet (cf. la bibliographie donnée par Bourion BOURION 1933, p. 3-4), mais ils semblent avoir été moins déterminants dans l'élaboration des résultats de Bourion.

554. qu'il appelle « suite partielle de polynômes sections », BOURION 1933, p. 2.



obtenus pour les séries de Taylor à d'autres classes de séries de fonctions analytiques et notamment aux séries de Dirichlet.

Les méthodes utilisées par Georges Bourion, telles qu'elles sont annoncées dans l'introduction de son mémoire ou rapportées par Montel, ne semblent pas différer de celles utilisées à la fois par Ostrowski et par Bernstein, ni de celles présentées dans les thèses précédentes de Soula et Mandelbrojt. Il n'en présente pas de nouvelles et s'inspire de celles déjà proposées dans les ouvrages qu'il cite.

Mis à part ceux de Bernstein, Bourion ne cite pas d'autres travaux de mathématiciens français<sup>555</sup>. L'étude de ces quatre doctorats révèle ainsi une dynamique de recherche autour de l'étude de la convergence de fonctions, qui, dans les années 1930, se développe indépendamment de travaux de mathématiciens français. Les doctorants se citent entre eux. De plus, Bourion introduit la notion d'ultraconvergence qui semble généraliser les recherches entreprises par Soula, Mandelbrojt puis Bernstein. Les liens entre les travaux de Bourion et Bernstein sont d'ailleurs explicités. Cette dynamique se développe ainsi dans quatre thèses. Elle ne se retrouve cependant pas dans les publications des membres de l'Enseignement supérieur français de l'entre-deux-guerres.

Il apparaît probable que la chaire du cours Peccot ait joué un rôle dans la diffusion des recherches des doctorants. Elle a sans doute permis que leurs résultats soient mieux connus. En effet, elle est occupée par Mandelbrojt en 1928 et Wladimir Bernstein en 1930 et par Georges Bourion en 1936-37<sup>556</sup>.

### 5.3.4 Une notion particulière de dérivée : à partir de Dimitri Pompeiu

Un groupe de trois doctorants roumains, Miron Nicolesco<sup>557</sup>, Calugareano<sup>558</sup> et Nicolas Theoderesco<sup>559</sup> s'intéressent à l'extension de la notion de dérivée pour les fonctions de la variable complexe.

Miron Nicolesco s'intéresse principalement aux propriétés différentielles des fonctions à une ou plusieurs variables complexes non nécessairement analytiques. Il cherche à étendre la notion de fonctions harmoniques conjuguées dans le plan à l'espace à quatre dimensions et étudie les aspects théoriques de cette extension. Quant à Gheorgu Calugareano, il s'intéresse davantage aux fonctions polygènes et aux applications qu'il peut

---

555. Les remerciements adressés par Georges Bourion à la fin de son mémoire à Montel sont très formels et ne semblent être écrits que pour remercier le mathématicien de se charger du rapport, cf. BOURION 1933, p. 3.

556. Wladimir Bernstein écrit d'ailleurs pour l'*Annuaire du Collège de France* de 1930-1931, un résumé détaillé de son cours. Il y expose l'ensemble des résultats acquis sur la distribution des singularités des séries de Dirichlet.

557. Dans *Fonctions complexes dans le plan et dans l'espace*, 1928.

558. Dans *Sur les fonctions polygènes d'une variable complexe*, 1928.

559. Dans *La dérivée aréolaire et ses applications à la physique mathématique*, 1931.

faire de cette théorie aux équations aux dérivées partielles<sup>560</sup>. Enfin, Nicolas Théodoresco, après avoir introduit la notion de dérivée aéroilaire, l'étudie en la concevant « comme une opération *indépendante* de la dérivée partielle »<sup>561</sup>. Il applique ensuite les résultats trouvés à divers problèmes de physique mathématique, tels que l'équilibre d'un milieu continu, en étudiant le parallélisme entre certaines équations aux dérivées partielles et certaines équations aux dérivées aréolaires.

Ces trois thèses ont cependant en commun le recours à la théorie des équations différentielles et la référence à une même notion, celle de « dérivée aéroilaire », introduite initialement par Pompeiu au début des années 1910<sup>562</sup>. Dans son doctorat, soutenu trois ans plus tard que ceux de Nicolesco et Calugareano, Theoderesco affirme d'ailleurs que cette idée de M. Pompeiu « n'a pas reçu des développements systématiques » mais « a été reprise par MM. N. Nicolesco et G. Calugaréano »<sup>563</sup>.

Le doctorat de Miron Nicolesco est celui des trois dont le contenu reste dans le champ de la théorie des fonctions. Calugareano et Théodoresco appliquent en effet certains de leurs résultats à d'autres domaines de l'analyse et des sciences mathématiques : respectivement la théorie des équations différentielles et la physique mathématique. Le décalage entre les sujets abordés par chacun d'entre eux se traduit également dans la composition de leurs jurys ainsi que dans les références qu'ils citent. Paul Montel est ainsi président et rapporteur de la thèse de Nicolesco, Picard occupe ces mêmes fonctions pour celle de Calugareano et Henri Villat préside le jury de la thèse de Theoderesco<sup>564</sup>. Si Paul Montel est un membre habituel des jurys pour les thèses en théorie des fonctions, ce n'est pas le cas de Picard ni de Villat. Émile Picard, hormis pour quelques thèses pendant la première guerre mondiale, n'est membre d'aucun autre jury de thèse en théorie des fonctions. Henri Villat, titulaire de la chaire « Mécanique des

---

560. C'est en tout cas ce qu'écrit Émile Picard dans le rapport sur la thèse :

« M. Calugareano met bien en évidence dans son travail ce que l'on peut considérer des fonctions polygènes dans l'étude des équations différentielles dans l'étude des équations différentielles. »

Une fonction polygène de  $z$  est une fonction continue telle que  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ ,  $P$  et  $Q$  étant continues et une fois dérivables par rapport à  $x$  et  $y$ . On a alors que pour tout  $(x, y)$  et pour tout  $\xi, \eta$ , la limite  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x + a\xi, y + a\eta) - f(x, y)}{a}$  existe, cf. CALUGARÉANO 1928.

561. Cf. THEODORESCO 1931, p. 2.

562. Dans l'introduction de sa thèse, THEODORESCO 1931, p. 2, Théodoresco en donne la définition suivante pour une fonction continue  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ . Il note la dérivée aéroilaire  $\phi(z)$  et la définit comme suit en supposant que les fonctions  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$  admettent des dérivées partielles du premier ordre continues :

$$\phi(z_0) = \lim \frac{\int_C f(z) dz}{\text{aire de } D}$$

lorsque le contour  $C$  se resserre indéfiniment autour du point  $z_0$  ( $D$  est le domaine intérieur autour de  $z_0$  délimité par  $C$ ).

563. Cf. THEODORESCO 1931, p. 2.

564. Le nom du rapporteur est inconnu pour le mémoire de Theoderesco. Le rapport de thèse est en effet déclaré manquant aux Archives nationales.

fluides et applications » ne fait pas partie des membres de jurys traditionnels en analyse, au contraire de ceux de mécanique des fluides<sup>565</sup>. De plus en regardant les autres membres qui constituent le jury des thèses de Calugareano et de Theodoresco, on note respectivement la présence de Goursat et d'Henri Béghin, ce qui confirme le décalage entre ces deux mémoires et ceux classés en théorie des fonctions. En effet, Edouard Goursat est habituellement membre de jury de thèses classées en théorie des équations différentielles. Or, Calugareanu fait de nombreuses applications des fonctions polygènes à l'intégration d'équations différentielles. La présence d'Edouard Goursat dans son jury apparaît ainsi significative des questions abordées par le doctorant. Quant à Henri Béghin, il ne participe à aucun autre jury d'une thèse classée en analyse pendant l'entre-deux-guerres et il est surtout impliqué dans des travaux de mathématiques appliquées et en mécanique<sup>566</sup>.

Le doctorat de Miron Nicolesco apparaît comme celui des trois qui est le moins en décalage avec les autres thèses classées en théorie des fonctions, par le sujet qu'il aborde mais également par la relation entre le doctorant et Paul Montel<sup>567</sup>. Les remerciements qui sont adressés au mathématicien à la fin de l'introduction apportent ici des informations sur cette relation qui dépasse le cadre formel et institutionnel. Ils sont beaucoup plus appuyés que dans les autres mémoires<sup>568</sup>. Les liens entre le doctorant et Montel sont confirmés par la notice nécrologique de Nicolesco dans le Bulletin de l'*Association amicale de secours des anciens élèves de l'Ecole normale supérieure*<sup>569</sup>. Cependant, dans le contenu même du mémoire, Nicolesco ne cite aucun travail de Montel, même publiés avant guerre<sup>570</sup>. Il se réfère davantage à des notions introduites par Vito Volterra, telles que les fonctions de lignes dans l'espace à trois dimensions ou

---

565. Si on regarde les autres thèses d'analyse dont il préside le jury (celles de Caius Jacob, *Sur la détermination des fonctions harmoniques conjuguées par certaines conditions aux limites. Applications à l'Hydrodynamique*, 1935 et de Raymond Marrot, *Sur l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann*, 1944), il s'agit de mémoires qui traitent tous de sujets d'analyse applicables et appliqués à des problèmes de mathématiques appliquées et plus précisément de mécanique.

566. D'après CHARLE et TELKES 1989, Henri Béghin a occupé pendant sa carrière presque exclusivement des charges de professeur ou de maître de conférence en mécanique (mécanique des fluides ou mécanique physique et expérimentale ou encore cinématique, statique, machines).

567. Signalons également qu'il est entré à l'École normale supérieure et y a poursuivi ses études, cf. HOCQUENGHEM 1976.

568. Nicolesco écrit ainsi, NICOLESCO 1928, p. 2 :

« M. Montel fut pour moi le Maître véritable qui, dès le début, s'est intéressé vivement à mes recherches et qui m'a donné par la suite de bon conseils et des suggestions ; nombre de pages de ce travail s'en ressentent heureusement. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici ma vive gratitude, ainsi que toute mon admiration. »

569. Hocquenghem, dans HOCQUENGHEM 1976, p. 131, signale ainsi que Nicolesco a « rédigé sa thèse sous la direction de Montel » et que ce dernier fut ensuite pour lui « un amical conseiller que Nicolesco ne manquait jamais de visiter. »

570. En outre, si on regarde l'ensemble des publications de Paul Montel et notamment celles qu'il a publiées depuis la fin de la première guerre mondiale, aucune ne semble se rapporter aux questions abordées par le doctorant dans son mémoire.

les fonctions conjuguées des fonctions de ligne dans l'espace à quatre dimensions<sup>571</sup>. Il utilise également les notions de bi-point de Cosserat<sup>572</sup> et de dérivée aérolaire de Pompeiu. Paul Montel apparaît alors davantage comme un guide ou un conseiller de Niculesco plutôt qu'un « Maître » qui fait travailler ses étudiants sur ses propres sujets de recherche.

### 5.3.5 Quelques inclassables

Cinq derniers doctorats, classés en théorie des fonctions de la variable complexe, n'ont pu être rattachés aux précédents groupes, ni entre eux. Ils se distinguent du reste du corpus à la fois par leur sujet et par les références citées. Tous ont cependant obtenu la mention très honorable. Il ne s'agit donc pas de travaux déconsidérés parmi les thèses classées en théorie des fonctions. Comme ils ne sont pas reliés entre eux, la présentation de leur travail sera chronologique.

#### Des thèses sur des domaines « délaissés » par la recherche

**La thèse d'Alexandre Ghika : à la frontière du calcul différentiel et intégral** Alexandre Ghika, un doctorant roumain, aborde dans sa thèse<sup>573</sup> des sujets à la frontière de plusieurs domaines de l'analyse. Il consacre ainsi la première partie de son travail à trouver des systèmes complets de fonctions intégrales qui permettent de décomposer toute fonction régulière sur un domaine ouvert  $D$ , à contour fini et rectifiable  $C$  et sommable sur  $C$ . Il utilise pour cela l'intégrale de Lebesgue et la théorie des séries de fonctions orthogonales. Dans un deuxième temps, Ghika applique ses premiers résultats à la théorie des équations intégrales de première espèce d'un type particulier, puis aux équations différentielles linéaires d'ordre infini<sup>574</sup>.

Le travail de Ghika se situe donc à la frontière entre la théorie des fonctions et le calcul différentiel et intégral. Le doctorant n'aborde pas de thèmes ou de notions que l'on peut retrouver dans une autre thèse française de l'époque, classée en théorie des fonctions, ce que souligne d'ailleurs Arnaud Denjoy rapporteur de la thèse. Ce dernier écrit dans les paragraphes de conclusion de son rapport que : « Les questions que [Ghika]

571. Il introduit ces notions en cherchant à « étudier quelques transformations ponctuelles de l'espace à quatre dimensions, en cherchant à généraliser la théorie des fonctions harmoniques conjuguées dans le plan » ; cf. notamment NICULESCO 1928, p. 27 ou 48.

572. Cf. NICULESCO 1928, p. 53/

573. *Sur les fonctions de carré sommable le long des contours de leurs domaines d'holomorphisme et leurs applications aux équations différentielles linéaires d'ordre infini*, 1929

574. Cf. GHIKA 1929, p. 4-5. Il cherche ainsi à résoudre les équations intégrales du type :

$$\int_C y(t)K(t,x)dt$$

où  $K$  vérifie certaines propriétés relatives aux domaines  $D$ ,  $C$  et  $D'$ , où  $D'$  est le complémentaire ouvert de  $C \cup D$ .

a examinées [...] paraissent avoir été négligées par les autres analystes. »<sup>575</sup>. D'ailleurs, dans son introduction, Ghika ne cite pas de mathématicien français, hormis Henri Lebesgue pour son apport à la notion d'intégrale<sup>576</sup>. Les références les plus nombreuses sont pour les travaux de Riesz et de Fischer sur les systèmes de fonctions orthogonales et normales. Alexandre Ghika cherche en effet à créer une théorie analogue pour les fonctions de carré sommable le long des contours de leurs domaines d'holomorphisme.

**La thèse d'Éloi Lefebvre : sur les fonctions multiformes** René Garnier écrit dans le rapport sur la thèse d'Éloi Lefebvre<sup>577</sup> que son travail « témoigne d'un effort méritoire dans un domaine bien délaissé – et de commerce un peu sévère... »<sup>578</sup>. Ce domaine, celui des fonctions multiformes, est pourtant un domaine de l'analyse française. Florin Vasilescu, en 1925, a ainsi présenté dans sa thèse les bases de la théorie des fonctions multiformes de la variable réelle. Pourtant, Éloi Lefebvre ne cite pas Vasilescu. Il n'adopte pas non plus le cadre de son travail, les variables des fonctions qu'il étudie n'étant pas réelles. L'objet de son étude est la « recherche des propriétés des fonctions  $z(x)$  qui peuvent être définies par une relation,  $P \log(z) + Q = xR$ , dans laquelle  $P, Q, R$  sont des polynômes en  $z$  et à coefficients complexes ou réels, de degrés  $p, q, r$ . » Selon le doctorant, ces fonctions  $z(x)$  sont « formées, en général, par une infinité de branches lorsque  $x$  varie. »<sup>579</sup>.

Éloi Lefebvre évoque Henri Lebesgue dans les remerciements qu'il adresse en préambule. Il affirme ainsi que c'est « M. H. Lebesgue qui, dans des conférences d'analyse, a attiré [son] attention sur les fonctions multiformes ». Pourtant il ne se réfère pas aux travaux de ce dernier. Il situe en effet son travail comme une suite des recherches que Pierre Boutroux expose en 1908 dans ses *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*<sup>580</sup>. Il dit vouloir préciser « de façon concrète la notion de fonction multiforme », en attendant que des théories plus générales la dé-

575. Le jury de la thèse d'Alexandre Ghika est cependant semblable à celui de la majorité des thèses en théorie des fonctions de la fin des années 1920 et des années 1930 : Paul Montel le préside, Arnaud Denjoy est le rapporteur et le troisième membre du jury est Jean Chazy.

576. Arnaud Denjoy n'est pas remercié dans le corps de l'introduction, un simple « hommage de profond respect » lui est adressé en début de mémoire.

577. *Propriétés d'une famille de fonctions à une infinité de branches*, 1939. Je n'ai pu trouver aucun renseignement sur ce doctorant. Il n'est en tout cas ni normalien, ni polytechnicien.

578. La présence de René Garnier dans la fonction de rapporteur peut être interprétée comme un moyen de souligner encore davantage la singularité de ce mémoire parmi les thèses de théorie des fonctions. En effet, il s'agit du seul doctorat d'analyse sur lequel se dernier rapporte. En effet, il est habituellement rapporteur de thèses d'arithmétique et d'algèbre, comme celle d'André Weil ou de Claude Chevalley ou encore de géométrie, comme celle de Max Eger.

579. Selon l'introduction du mémoire, cf. LEFEBVRE 1939, p. 1.

580. Cf. BOUTROUX Pierre, *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, Paris, Gauthier-Villars, 1908, monographie citée par Éloi Lefebvre LEFEBVRE 1939, p. 2. Comme l'explique René Garnier, Éloi Lefebvre évoque des fonctions analogues à celles que Boutroux considère, comme par exemple les solutions de l'équation  $z - \log(z+1) = x - x_0$ , fonctions qui peuvent présenter des singularités diverses et imprévues.

finissent de façon abstraite<sup>581</sup>. Cette dernière affirmation laisse penser qu'il ne connaît pas le travail de Vasilescu de 1925. On peut alors s'interroger sur la portée de la thèse de Lefebvre : elle a pour principale référence une publication de 1908 et ignore des recherches publiées entre temps. De plus, pourquoi a-t-il choisi ce sujet ? Pourquoi des mathématiciens tels Picard, Montel ou Lebesgue, dont il se réclame pourtant l'« élève »<sup>582</sup>, ne lui ont-ils pas indiqué les publications relatives à ce sujet ? La question est encore ouverte et je n'ai pas toutes les informations pour y répondre. Je ne dispose en effet d'aucun renseignement sur le doctorant, sur sa formation mathématique ou sur ses relations réelles avec les membres de l'enseignement supérieur français.

### Le cas de Nachman Aronszajn : l'influence de Maurice Fréchet en analyse

La thèse de Nachman Aronszajn<sup>583</sup> est la seule de l'entre-deux-guerres, classée en théorie des fonctions de la variable complexe, et plus généralement en théorie des fonctions, à se référer principalement à certains travaux de Maurice Fréchet. Le doctorant présente d'ailleurs explicitement sa thèse comme un prolongement des recherches du mathématicien. Il reprend les travaux de Fréchet sur la décomposition d'une fonction  $f(z)$  en deux fonctions aux ensembles de singularités plus simples que celui de  $f(z)$ <sup>584</sup>. Aronszajn cherche notamment à résoudre la question suivante, issue des recherches du mathématicien : étant donnée une fonction  $f(z)$  analytique et uniforme en dehors d'un certain ensemble singulier  $F$ , peut-on la décomposer en somme de deux fonctions  $f_1(z)$  et  $f_2(z)$  dont les ensembles singuliers  $F_1$  et  $F_2$  sont compris dans  $F$  et plus simples que  $F$ <sup>585</sup>. Tout le mémoire d'Aronszajn est consacré à la résolution de cette question et à ses applications.

La thèse d'Aronszajn porte ainsi sur des questions à l'interface de la théorie des ensembles et de la théorie des fonctions de la variable complexe. Les références nombreuses et explicites au travail de Fréchet, faites dans la thèse et dans le rapport écrit par Fréchet lui-même, témoignent d'un lien intellectuel étroit entre le doctorant et le professeur. Elles inscrivent également la thèse dans un ensemble de travaux inspirés par les recherches du mathématicien sur les ensembles abstraits que l'étude des thèses classées en topologie a révélé<sup>586</sup>. D'ailleurs, hormis les thèses classées en théorie des

581. Cf. LEFEBVRE 1939, p. 1-2.

582. Cf. l'introduction de sa thèse.

583. *Sur les décompositions des fonctions analytiques uniformes et sur leurs applications*, 1935

584. La publication que cite Aronszajn est FRÉCHET Maurice, « Sur certaines décompositions de la fonction complexe uniforme la plus générale », *Acta Mathematica* 54 (1930) 37-79. D'après Fréchet, ses travaux généralisent le théorème classique de Mittag-Leffler sur l'existence d'une fonction ayant, en des points isolés donnés, des parties principales données, cf. FRÉCHET 1930, p. 37-38.

585. D'après Fréchet dans le rapport de thèse. Aronszajn, dans l'introduction de sa thèse, et Fréchet, situent l'origine de cette question dans les recherches de Fréchet. Aronszajn écrit ainsi, ARONSZAJN 19, p. 4 : « les recherches de M. Fréchet m'ont amené à me poser la question, ... » ; Fréchet affirme dans le rapport : « Le travail présenté par M. Aronszajn comme Première Thèse a comme point de départ deux questions posées par le rapporteur ».

586. Je renvoie ici au chapitre précédent de la présente thèse, à la sous-partie 4.3.3, p.214.

probabilités pour lesquelles Fréchet est très fréquemment dans le jury en tant que président ou rapporteur<sup>587</sup>, les seules autres thèses de sciences mathématiques pour lesquelles il est soit président soit rapporteur traitent de sujets proches de théorie des ensembles<sup>588</sup>.

La nationalité polonaise du doctorant pourrait apporter ici un éclairage sur son choix d'un sujet lié à la théorie des ensembles. En effet, les mathématiques polonaises de l'entre-deux-guerres sont réputées pour les travaux en théorie des ensembles abstraits<sup>589</sup>. L'un des signes en est le succès rencontré par la revue polonaise *Fundamenta Mathematicae* publiée à partir de 1920<sup>590</sup>.

Les deux derniers doctorats classés en théorie des fonctions de la variable complexe sont soutenus par deux étudiants normaliens. Le premier, celui d'Hubert Delange, concerne la convergence de séries de polynômes<sup>591</sup>. Le second, présenté par Pierre Lelong<sup>592</sup> porte sur la théorie des fonctions de deux variables complexes.

**La thèse d'Hubert Delange : sur les séries de polynômes** Hubert Delange considère une suite de polynômes

$$P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z), \dots$$

donnée arbitrairement et il regarde la convergence de la série  $\sum a_n P_n(z)$ . Si les séries de Taylor constitue un cas particulier d'une telle série, les méthodes et questions traitées ne se rapportent pas aux travaux de Soula, Mandelbrojt ou Bourion et n'ont pas de rapports directs avec les séries trigonométriques.

Il examine en fait plus précisément les liens entre la forme des domaines de convergence des séries de polynômes<sup>593</sup> et la distribution des zéros des polynômes<sup>594</sup>. Hubert

587. Cf. le chapitre 6 sur les thèses de probabilités. C'est le cas pour les doctorats de Wolfgang Doeblin en 1938, de Jean Ville en 1939, de Gustave Malécot en 1939, de Robert Fortet en 1939, de Michael Loeve en 1941, d'André Blanc-Lapierre en 1945.

588. Il s'agit des thèses suivantes :

- Appert, Antoine, *Propriétés des espaces abstraits les plus généraux*, 1934, (référéncé sous les mots-clés : « Géométrie – Topologie »)
- Kurepa, Georges, *Ensembles ordonnés et ramifiés*, 1935, (référéncé sous le mot-clé : « Théorie des ensembles »)
- Monteiro Anteino, *Sur l'additivité des noyaux de Fredholm*, 1936 (référéncé sous les mots-clés : « Analyse – Equations intégrales »)
- Ky Fan, *Sur quelques notions fondamentales de l'Analyse générale*, 1941 (référéncé sous le mot-clé : « Théorie des ensembles »).

589. Cf. par exemple PIER 1994a.

590. Je renvoie ici également à DUDA 1996 qui analyse les circonstances de l'émergence de ce journal, ainsi que sa réception, l'étendue et les causes de son succès.

591. *Sur la convergence de séries de polynômes de la forme  $\sum a_n P_n(z)$  et sur certaines suites de polynômes*, 1939.

592. *Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes*, 1942.

593. domaines de convergence dans le plan complexe.

594. Cf. l'introduction de la thèse, DELANGE 1939, p. 1-4, et le rapport de thèse écrit par Paul Montel.

Delange introduit pour l'ensemble des zéros de polynômes les notions de fonction d'ensemble, de distribution régulière des zéros des polynômes, qui sont des notions relatives à la théorie des ensembles et à la théorie de la mesure. Suivant les propriétés vérifiées par ces fonctions, il en déduit notamment des résultats sur les domaines de convergence des séries  $\sum a_n P_n$ <sup>595</sup>. Les méthodes et les notions mathématiques utilisées diffèrent ainsi de celles employées dans les thèses sur les domaines de convergence de certaines séries.

Hubert Delange ne cite aucun mathématicien dans son introduction<sup>596</sup>. Pour avoir des références, il faut regarder le contenu même de la thèse où parmi les quelques rares citations figurent les travaux de la Vallée Poussin sur les fonctions d'ensemble<sup>597</sup> ou de Carathéodory sur l'utilisation de la mesure linéaire des ensembles<sup>598</sup>, ainsi qu'un résultat de la thèse d'Henri Cartan sur le recouvrement par des cercles de l'ensemble des points vérifiant une certaine relation<sup>599</sup>.

On peut signaler les remerciements particuliers qu'adresse Delange à Paul Montel à la fin de l'introduction<sup>600</sup> d'autant qu'ils sont repris par Jacqueline Ferrand dans la notice nécrologique qu'elle écrit pour Delange dans l'annuaire de l'*Association amicale de secours des anciens élèves de l'Ecole normale supérieure*<sup>601</sup>. L'influence de Montel sur Delange est cependant difficile à mesurer. Le mathématicien est membre du jury de l'essentiel des thèses traitant de polynômes<sup>602</sup> et il a publié sur le sujet des polynômes et des séries de polynômes<sup>603</sup>. Cependant, ses travaux ne sont repris explicitement à aucun moment dans le travail de Delange.

**Pierre Lelong et les fonctions de plusieurs variables complexes** Pierre Lelong aborde également, dans sa thèse, des questions sur les domaines de convergence de certaines séries. Il s'intéresse à la représentation en série de Hartogs des fonctions de deux variables complexes  $f(x, y)$ , définies dans l'espace à quatre dimensions, la représentation s'écrivant sous la forme  $f(x, y) = \sum A_n(x)(y - y_0)^n$ . Selon Paul Montel

595. limités dans l'essentiel des cas par des courbes équipotentielles.

596. Paul Montel, dans le rapport, n'évoque pas non plus de lien entre les recherches de Delange et les recherches d'autres mathématiciens contemporains ou antérieurs.

597. Cf. DELANGE 1939, p. 21. Il s'agit ici de publications datant du milieu des années 1910 et donc de citations anciennes.

598. Cf. DELANGE 1939, p. 44.

599. Cf. DELANGE 1939, p. 49-50. Ce dernier résultat qui provient de la thèse d'Henri Cartan n'est cependant pas directement relié à l'objet central de la thèse de ce dernier, mais il figure comme un des résultats intermédiaires utilisé par le doctorant dans une de ses démonstrations.

600. Pour « les conseils et les encouragements [donnés] pendant la préparation de son travail ».

601. Cf. FERRAND 2005, p. 52.

602. comme par exemple celles de Dieudonné, *Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe*, 1931, de Lucien Hibbert, *Univalence et Automorphie pour les polynômes et les fonctions entières*, 1937.

603. Ses travaux sur les polynômes publiés pendant l'entre-deux-guerres portent essentiellement sur la majoration des modules des zéros des polynômes dans des notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* en 1923, 1926, 1931, 1934, 1936. Il a également fait paraître, avant la première guerre mondiale, une monographie sur les séries de polynômes : *Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe*, Paris : Gauthier-Villars (1910) Collection Borel (1) ; cf. MONTEL 1947b, p. 270.



dans le rapport de thèse, « ce développement permet de considérer les valeurs de la fonction comme formées par la réunion des valeurs des sommes de séries de Taylor en  $y - y_0$  dépendant d'un paramètre  $x$  ».

Pierre Lelong étudie plus particulièrement les propriétés du domaine de convergence de telles séries. Pendant toute la première partie de son mémoire, il cherche à déterminer le domaine  $(H)$  de convergence uniforme de la série de Hartogs ainsi définie. Il fonde ses recherches sur les travaux d'Hartogs relatifs à ces séries<sup>604</sup>. Il relie également cette étude à la théorie des fonctions sous-harmoniques et fait de cette théorie l'un des objets principaux de ses recherches<sup>605</sup>.

À partir de la suite de fonctions  $A_n(x)$  holomorphes dans un certain domaine  $d$ , définies par le développement précédent, il construit les suites de fonctions sous-harmoniques  $U_n(x) = \frac{1}{\phi(n)} \log |A_n(x)|$  avec  $\phi$  une fonction choisie telle que la suite  $U_n(x)$  soit bornée dans son ensemble à l'intérieur du domaine  $d$ <sup>606</sup>. Lelong montre comment l'étude des propriétés de la famille de fonctions sous-harmoniques  $(U_n(x))$  lui permet de trouver le domaine de convergence uniforme de la série de Hartogs<sup>607</sup>. En partant d'une fonction sous-harmonique  $V(x)$  donnée quelconque, il construit également une série de Hartogs  $f(x, y)$  dont le domaine  $(H)$ , défini à partir de  $V$ <sup>608</sup>, en est le domaine de convergence uniforme. Il établit certaines propriétés de  $(H)$ <sup>609</sup> et de l'ensemble singulier  $(S)$  de la fonction  $f(x, y)$ <sup>610</sup>.

Enfin dans un dernier temps de sa thèse, Lelong étudie les croissances comparées d'une classe de fonctions entières en  $y$  obtenues en laissant  $x$  constant pour une fonction  $f(x, y)$  définie par une série de Hartogs, dans le cas où  $f(x, y)$  n'a pas de singularité dans le domaine  $x \subset d$ ,  $|y| < \infty$ <sup>611</sup>. Au cours de ses différentes démonstrations, il donne « une définition générale et de caractère géométrique de la croissance totale introduite par É. Borel » qui intervient au détour d'une démonstration<sup>612</sup>, mais qu'il mentionne dès l'introduction de son mémoire<sup>613</sup>. Pierre Lelong reprend en outre des

604. publiées en 1906, cf. HARTOGS 1906.

605. C'est d'ailleurs le seul doctorat, classées en théorie des fonctions, qui utilise explicitement cette classe de fonctions dans l'entre-deux-guerres.

606. Cf. LELONG 1941, p. 1.

607.  $\sum A_n(x)(y - y_0)^n$ .

608. On considère la fonction  $R$  telle que  $V(x) = -\log R(x)$  et  $H$  est alors un domaine semi-cercle défini par  $x \in d$ ,  $|y - y_0| < R(x)$ .

609. À l'aide de résultats établis par Henri Cartan et Thullen en 1932, qu'il cite, LELONG 1941, p. 3, il montre notamment que la sous-harmonicité de  $V$  suffit pour que  $H$  soit également domaine d'holomorphie de  $f$ .

610. Cf. LELONG 1941, p. 3.

611. Il rattache également cette étude à la question de la croissance de la fonction  $f$  au voisinage de points singuliers de  $f$  sur une variété caractéristique.

612. Cf. LELONG 1941, p. 78.

613. Cf. LELONG 1941, p. 5. Cette mention dès le début du travail pourrait souligner l'importance qu'il accorde à cette nouvelle définition d'une notion considérée comme classique par l'ensemble des mathématiciens de l'entre-deux-guerres et utilisée à plusieurs reprises dans les thèses classées de théorie des fonctions de la variable complexe. Pierre Lelong insiste d'ailleurs sur l'importance qu'il accorde

notions telles que les notions d'ordre, de croissance des fonctions complexes. Pierre Lelong utilise alors certaines références identiques à celles qui sont citées par le premier groupe de thèses que j'ai identifié, celui qui a pour source des théorèmes de Picard : des travaux d'Émile Borel<sup>614</sup>, de Valiron<sup>615</sup>, d'André Bloch et d'Henri Cartan<sup>616</sup>. L'article d'Henri Cartan cité par Pierre Lelong ne concerne cependant pas les thèmes travaillés par Cartan dans sa thèse. Il est intitulé « Sur la fonction de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables, et ses applications aux fonctions méromorphes d'une variable ». C'est l'article qui concerne le plus directement les recherches de Pierre Lelong<sup>617</sup>.

Le sujet de la thèse autour des fonctions de deux variables complexes, ainsi que certaines classes de fonctions qu'il manipule, les fonctions sous-harmoniques, sont inédits dans le corpus des thèses classées en théorie des fonctions. Certaines questions abordées par Lelong sur les séries de Hartogs font toutefois référence à des notions travaillées dans d'autres groupes de thèses et il s'attache à les généraliser. D'après Paul Lévy<sup>618</sup>, l'approche de Lelong et les problèmes qu'il étudie sont également différents de ceux des autres mathématiciens qui travaillent sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. Il désigne ses contributions comme une branche particulière de la théorie<sup>619</sup>. Cette indépendance des travaux de Lelong est d'ailleurs confirmée par Pierre Lelong lui-même, lors d'un entretien qu'il m'a accordé, le 5 juin 2008. Il affirme ainsi que le sujet des fonctions de plusieurs variables complexes était tabou dans le milieu de la recherche mathématique des années 1930, qui l'associait au domaine de la mécanique. Il aurait ainsi dû affronter une certaine opposition de la part d'Henri Cartan alors qu'il cherchait à présenter des notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* sur les fonctions polyharmoniques.

---

à la notion de croissance totale, il la présente comme « le point de départ des travaux d'Émile Borel dans *Leçons sur les séries à termes positifs*, p.81 ».

614. sur notamment sa notion d'ordre LELONG 1941, p. 78.

615. sur la croissance de fonctions holomorphes, LELONG 1941, p. 83, G. Valiron, *Bull. Sc. Math.* 47 (1923) 177.

616. LELONG 1941, p. 92, A. Bloch, *C.R.A.S.* (181) 1925 et H. Cartan, *C.R.A.S.* 189 (1929) 521.

617. Les remerciements qu'il adresse en fin d'introduction aux membres de son jury, Montel, Denjoy et Valiron ne dépassent pas le cadre formel et n'apportent pas de renseignements sur une influence de ces mathématiciens.

618. Dans son article sur « Les mathématiques », cf. LÉVY 1967, p. 182-184.

619. Cf. LÉVY 1967, p. 183-184. Paul Lévy décrit comme précurseurs de cette théorie Cauchy puis Poincaré. Certains travaux de F. Hartogs, E.E. Levi et W. Osgood « furent [ensuite] la base de travaux ultérieurs qui firent l'objet de nombreuses notes présentées à l'Académie ». Parmi ces travaux, Paul Lévy distingue, en plus des contributions de Lelong, d'une part les travaux d'Henri Cartan à partir de 1930 sur les isomorphismes holomorphes et ceux de Cartan et Thullen sur les domaines d'holomorphicité des fonctions de plusieurs variables, suivis par des notes de Thullen, Behnke et K. Stein ; d'autre part, il évoque les travaux d'André Weil puis de K. Oka sur les problèmes d'approximation par les polynômes.

L'analyse des thèses classées en théorie des fonctions de la variable complexe met en évidence une certaine périodisation de l'entre-deux-guerres par rapport aux références qui sont citées par les doctorants, quel que soit le groupe thématique auquel ils se rattachent. Les thèses qui sont soutenues de 1914 jusqu'au milieu des années 1920 utilisent pour l'essentiel des travaux français en théorie des fonctions de la fin du XIX<sup>ème</sup> et du début du XX<sup>ème</sup> siècle. À partir du milieu des années 1920, les références changent et les travaux précédents ne sont presque plus cités. Les doctorants s'approprient de nouvelles théories, énoncées le plus souvent par des mathématiciens étrangers, comme Nevanlinna et Ahlfors et ils se réfèrent à des publications récentes et contemporaines de la soutenance.

En outre, une part importante de ces thèses correspond à l'étude de sujets isolés et indépendants. Cinq doctorats (sur 25) ne se rattachent à aucun des groupes thématiques en théorie des fonctions de la variable complexe. De plus, ce constat d'indépendance reste vrai à l'intérieur des groupes constitués. Certaines thèses ne sont regroupées que par des critères thématiques et non pas par un réseau de références communes.

## 5.4 Doctorants et membres de jury

### 5.4.1 Les doctorants en théorie des fonctions

La population des 38 doctorants en théorie des fonctions est composée à 37% de normaliens (soit 14 doctorants) et à 47% d'étudiants étrangers (soit 18 doctorants), le reste étant des étudiants français ayant suivi une formation dans les universités<sup>620</sup>.

La part d'étudiants étrangers est particulièrement importante en théorie des fonctions. Pour l'ensemble des thèses soutenues à la Sorbonne entre 1914 et 1945, elle ne représente que 29%. Ce phénomène peut traduire l'attrait exercé par ce domaine : les étudiants étrangers voulant perfectionner leur formation mathématique en France se dirigent prioritairement dans ce champ des mathématiques. Se voit donc ici renforcée une image qui apparaît à la lecture de l'historiographie sur cette période : la théorie des fonctions est l'un des pôles attracteurs de la recherche mathématique française pendant l'entre-deux-guerres.

Les doctorants étrangers n'étudient pas pour autant uniquement des sujets en théorie des fonctions de la variable complexe, qui est pourtant historiographiquement l'un des thèmes où sont reconnus les travaux français. Six des neuf doctorants en théorie des fonctions réelles sont étrangers, soit 67%, mais seulement 10 sur 25, soit 40%, en théorie des fonctions de la variable complexe.

---

620. Ce qui représente 6 étudiants. Seul un doctorant, Raphaël Salem provient d'une école d'ingénieur, celles des Arts et Manufactures.

Comme en attestent différents témoignages de mathématiciens roumains prononcés lors de son jubilé ou pour la cérémonie de remise de son sabre d'Académicien français, Paul Montel entretient des relations privilégiées avec eux<sup>621</sup>. D'ailleurs, la majorité des huit étudiants roumains revendiquent des liens forts avec lui. Pourtant, seulement trois d'entre eux reprennent ses recherches. C'est le cas par exemple pour Froda et Popoviciu, en théorie des fonctions de la variable réelle mais il n'en est pas de même, par exemple, pour Calugareano ou Theodoresco qui traitent respectivement de questions sur les fonctions polygènes et de la dérivée aréolaire de Pompeiu ainsi que de son application à la physique mathématique.

Enfin, onze des quatorze normaliens soutiennent une thèse classée en théorie des fonctions de la variable complexe. Cette part renvoie aux témoignages de certains des doctorants de l'entre-deux-guerres, comme André Weil et Jacqueline Ferrand, qui affirment que les normaliens étaient orientés de façon privilégiée vers cette théorie<sup>622</sup>. Si on prend en compte l'ensemble des thèses soutenues, il faut relativiser cette affirmation<sup>623</sup>. Cependant, elle correspond à une certaine réalité du point de vue des doctorants en théorie des fonctions. Pendant l'entre-deux-guerres, l'élite mathématique de la scène universitaire française est presque composée uniquement de mathématiciens issus de l'École normale. Ils apparaissent dès lors garants d'une certaine qualité de la recherche. Ils représentent un groupe important parmi les doctorants français en théorie des fonctions de la variable complexe<sup>624</sup>. Cet investissement est encore plus marqué pour l'ensemble des 13 thèses sur les propriétés générales des fonctions complexes que met en évidence l'historiographie, sept parmi les 13 doctorants sont normaliens. Il apparaît alors comme un domaine d'excellence.

Tous les doctorants et tous les groupements de thèses ne peuvent être considérés de la même façon. L'historiographie met particulièrement en évidence l'ensemble des doctorats sur les fonctions d'une variable complexe dont le sujet a pour source les théorèmes de Picard ou le théorème de représentation conforme de Riemann. En outre, les doctorants n'ont pas tous le même parcours à l'issue de leur soutenance. Henri Cartan, dont le sujet est déjà décalé par rapport aux sujets abordés dans le groupe de thèses auquel je l'ai relié, se distingue par exemple assez vite par sa carrière et par

---

621. Cf. MONTEL 1947a et MONTEL 1938. Pour davantage de renseignements à ce sujet, je renvoie à LELOUP et GISPERT prévu pour 2009.

622. Cf. WEIL 1991, les propos de Jacqueline Ferrand lors de son entretien et les notices de normaliens qu'elle a écrites, celles de Delange ou de Dufresnoy par exemple.

623. Certains écrits normaliens appartiennent ainsi au domaine émergent du calcul des probabilités, à la théorie des fonctions analytiques, certes, mais encore à l'arithmétique et à l'algèbre (avec Claude Chabauty ou Jean Kuntzmann) ou encore à la géométrie algébrique (tels Max Eger, Luc Gauthier ou Léonce Lesieur) ou à la géométrie différentielle (avec Frédéric Roger ou Eugène Blanc) et également à la physique mathématique tels Jacques Lévy sur le problème des trois corps ou Marcel Mayot sur la stabilité des amas d'étoiles.

624. 11 sur 25

l’empreinte qu’il laisse sur le milieu mathématique<sup>625</sup>. Les normaliens, comme Jean Dieudonné, René de Possel, Jacqueline Ferrand et Jacques Dufresnoy, ont souvent un parcours professionnel plus rapide<sup>626</sup>.

On ne peut manquer de relever parmi l’ensemble des doctorants en théorie des fonctions de la variable complexe la présence de plusieurs membres fondateurs du groupe Bourbaki, tels Henri Cartan, Jean Dieudonné et René de Possel, auxquels il faut rajouter Szolem Mandelbrojt (qui participa aux premières réunions). Un tiers du groupe soutient une thèse classée dans ce domaine<sup>627</sup>. Ces derniers travaillent ainsi sur un sujet « traditionnel » des sciences mathématiques françaises. Ils en proposent cependant une approche nouvelle et ils cherchent plus ou moins explicitement à montrer l’originalité de leurs travaux et à se démarquer des recherches existantes. Ils s’approprient les travaux étrangers et contribuent ainsi au développement de nouvelles mathématiques. On peut par ailleurs supposer que ces thèses sont intégrées à la mémoire collective du groupe Bourbaki. Elles peuvent alors avoir contribué à une image d’un milieu mathématique dominé par la théorie des fonctions de la variable complexe.

### 5.4.2 Le rôle des membres de jury de thèse

L’étude des thèses et des références qui y sont citées met à jour un réseau d’influences intellectuelles pour les doctorants. Ces derniers se réfèrent ainsi à divers mathématiciens, étrangers comme français. L’étude ci-dessus montre l’importance des références à des travaux allemands, finlandais mais également français, et elle révèle également comment ces références se renouvellent au cours du temps suivant le développement des thématiques de recherches.

En comparant les mathématiciens dont les recherches servent de base aux travaux des doctorants avec les membres de jury de thèse, je cherche ici à mieux cerner le rôle des présidents et des rapporteurs pour les doctorats de théorie des fonctions. Ce

---

625. Différents témoignages de mathématiciens d’avant-guerre (Weil, Schwartz, Jacqueline Ferrand, etc.) comme d’après-guerre font ainsi d’Henri Cartan l’un des « héros » mathématiques d’une génération. En témoigne par exemple la page historique sur le département de mathématiques de l’École normale supérieure, <http://www.dma.ens.fr/presentation/histoire.html> où Martin Andler écrit : « en 1940, Henri Cartan est nommé professeur à l’ENS. C’est avec lui que les mathématiques les plus modernes font leur entrée dans l’enseignement. Son influence sur des générations de mathématiciens sera immense. » ou la journée commémorative du 100<sup>ème</sup> anniversaire de sa naissance, le 28 juin 2004 à l’É.N.S. organisée par la Société Mathématique de France.

626. Le devenir mathématique de certains doctorants reste d’ailleurs à explorer, comme par exemple celui de Milloux ou Rauch. Milloux occupe différents postes dans l’enseignement supérieur, comme à Strasbourg, et il continue à publier régulièrement. Selon le *Zentralblatt* et les *Mathematical Reviews*, Rauch a continué à publier une dizaine de travaux dont le dernier date de 1944.

627. Outre ces quatre mathématiciens faisaient également partie des premiers membres de Bourbaki André Weil, Charles Ehresman, Jean Delsarte, Jean Coulomb, Claude Chevalley, cf. BEAULIEU 1990 et le site officiel de l’association Bourbaki <http://www.bourbaki.ens.fr/>. Pour plus de renseignements biographiques à leur sujet et leur parcours pendant l’entre-deux-guerres, je renvoie à la thèse de Liliane Beaulieu, BEAULIEU (1990), notamment au premier chapitre.

faisant, il faut tenir compte de la nature même du corpus que j'ai analysé : les avant-propos et les rapports, auxquels j'ai rajouté pour un ensemble de thèses classées en théorie des fonctions de la variable complexe les mémoires eux-mêmes. Les doctorants n'adressent en général pas ou peu de reconnaissance explicite aux mathématiciens qui les ont influencés de façon déterminante. Peu de travaux sont en général cités dans les thèses et la part de l'implicite est grande. Les étudiants n'explicitent pas quelles ont été les personnes qui les ont incités à choisir le domaine de la théorie des fonctions. Ils ne présentent pas non plus les raisons de leur choix de sujet. En outre, le travail de doctorat étant un travail mathématique devant être soutenu devant des membres du corps professoral de la faculté de la Sorbonne, il faut sans doute prendre en compte une part de stratégie de carrière dans le choix des références mathématiques.

Seuls trois mathématiciens occupent de façon significative la fonction de président pour les thèses classées en théorie des fonctions<sup>628</sup> : Émile Picard à 7 reprises entre 1914 et 1931<sup>629</sup>, Émile Borel, 8 fois entre 1921 et 1939<sup>630</sup> et surtout Paul Montel à 13 reprises entre 1927 et 1942<sup>631</sup>.

Dans le cas de Picard et de Borel, il n'existe que peu ou pas de rapports entre les sujets des travaux des étudiants et les sujets de recherches sur lesquels ils publient pendant l'entre-deux-guerres. Leur présence en tant que président de jury s'explique donc davantage par des raisons honorifiques et également circonstanciées pour Picard pendant la première guerre mondiale<sup>632</sup>. Dans le cas de Montel, la situation est moins claire. En effet certains de ses travaux publiés pendant l'avant-guerre sont considérés comme classiques entre 1914 et 1945, comme par exemple ceux sur les familles normales de fonctions, même s'il publie moins sur ce sujet dans l'entre-deux-guerres. Quelques-unes de ses recherches en théorie des fonctions de la variable réelle ou sur la théorie des fonctions univalentes parues dans l'entre-deux-guerres sont reprises et généralisées dans quelques thèses, comme par exemple dans celle d'André Marchaud. Cependant, le mathématicien est peu cité dans les thèses dont il préside le jury. Pour dix d'entre elles (sur les treize), aucune référence n'est faite à ses travaux.

Les présidents des jurys des thèses n'exercent donc pas ou très peu de rôle intellectuel, ce qui confirme pour les doctorats classés en théorie des fonctions la fonction institutionnelle du président de jury, telle qu'elle est déjà abordée dans LELOUP et GIS-

628. En plus d'Émile Picard, Émile Borel et Paul Montel, figurent parmi les présidents de thèse : à une reprise Villat en 1931, Goursat en 1925, Andoyer en 1927 et à deux reprises Appell en 1915 et 1916, Vessiot pour deux étudiants normaliens en 1927 et 1933, et à trois reprises Julia en 1932, 1935 et 1941.

629. Un en 1914, un en 1916, un en 1923, deux en 1928 et deux en 1931.

630. Un en 1921, un en 1923, un en 1924, un en 1929, un en 1932, un en 1934, un en 1938, un en 1939.

631. Un en 1927, un en 1928, un en 1929, un en 1930, deux en 1933, deux en 1937, 3 en 1939, ainsi qu'un en 1941 et un en 1942.

632. Avec Paul Appell, Émile Picard a fait partie de l'essentiel des jurys des thèses de sciences mathématiques soutenues en France pendant 1914 et 1919.

PERT prévu pour 2009. Les informations renseignent alors sur le poids de Picard, Borel et Montel sur le milieu universitaire français de l'entre-deux-guerres de la théorie des fonctions<sup>633</sup>. Ce constat est d'ailleurs éclairé par la nature et l'origine des étudiants dont Picard, Borel ou Montel président le jury. Parmi les sept doctorants dont Émile Picard préside le jury, cinq d'entre eux sont d'anciens élèves de l'École normale supérieure : Georges Valiron, Georges Giraud, Henri Cartan, Frédéric Marty et Jean Dieudonné, l'un des deux autres étudiants étant Szolem Mandelbrojt. Cinq des huit doctorants dont Émile Borel préside le jury sont d'origine étrangère : un Russe en 1923, Ervand Kogbeliantz, privat-docent de l'université de Moscou, un Roumain en 1929, un Indien en 1932 et, en 1934 et 1938, deux des trois seuls Chinois à venir soutenir une thèse de sciences mathématiques à la faculté des sciences parisiennes<sup>634</sup>. Quant à Montel, 5 des 13 doctorants dont il préside le jury sont issus de l'École normale supérieure<sup>635</sup> et six sont d'origine étrangère<sup>636</sup>. Picard apparaît donc comme un membre institutionnel fort dont les normaliens recherchent la présidence de jury<sup>637</sup>, tandis que Borel s'occupe davantage des étudiants étrangers. Montel présidant les jurys de doctorat pour les deux catégories d'étudiants apparaît comme un membre incontournable de jury à partir de la fin des années 1920, au moment où Picard s'efface de la scène.

La part institutionnelle de la fonction de président de jury en théorie des fonctions apparaît d'autant plus lorsqu'on compare la population des rapporteurs de thèses à celle des présidents. Picard et Borel n'occupent la fonction de rapporteur qu'à 3 et 1 reprises respectivement<sup>638</sup>. Un nombre plus important de mathématiciens, dix au total, participent à cette tâche : Picard (3), Appell (2), Andoyer (1), Fréchet (1), Garnier (1), Borel (1), Julia (1), Valiron (5), Denjoy (6), Montel (14)<sup>639</sup>.

---

633. J'emploie ici le terme « institutionnel » pour qualifier la fonction de président, car cette fonction ne s'explique pas par des intérêts de recherche communs entre le doctorant et le président. Elle résulte du poids institutionnel qu'exerce le mathématicien sur le milieu mathématique universitaire en raison des positions académiques qu'il occupe (professeur à la faculté de la Sorbonne, académicien ou correspondant à l'Académie, etc.). C'est ce même sens qui avait été utilisé dans LELOUP et GISPERT prévu pour 2009.

634. Le troisième Chinois est Ky Fan qui soutient une thèse en 1941, *Sur quelques notions fondamentales de l'Analyse générale*, présidée et rapportée par Maurice Fréchet et dont le sujet se rapporte à certains des intérêts de ce dernier mathématicien en théorie des ensembles abstraits.

635. André Marchaud, Miron Nicolesco, Hubert Delange, Pierre Lelong et Jacqueline Ferrand.

636. Deux Roumains, un Russe, un Suisse, un Haïtien et un Polonais.

637. On peut d'ailleurs s'interroger sur le rôle que tient Gaston Julia en tant que président de jury. Certes il n'apparaît en tant que président qu'à la fin des années 1930 : en 1932, 1935 et 1941. Sachant que Picard cesse de présider des jurys en 1931, on peut se demander si ce dernier ne remplace pas Picard dans la figure institutionnelle du mathématicien dont on recherche la présence dans un jury.

638. Les deux premiers qu'écrit Picard correspondent de plus à des doctorats qui sont soutenus pendant la première guerre mondiale où la population des mathématiciens français susceptibles d'accomplir cette tâche est alors réduite.

639. Il faut cependant remarquer que les rapports des quatre thèses soutenues en 1930 et 1931 sont déclarés manquants aux archives et pour ces thèses en particulier, hormis dans le cas de Dieudonné, le nom du rapporteur est donc inconnu.

Trois mathématiciens écrivent de façon prépondérante des rapports sur les thèses en théorie des fonctions : Montel de façon régulière tout au long de la période<sup>640</sup>, Denjoy, à partir de 1927 et Valiron à partir de 1933. Cette différence s'explique par les postes qu'ils occupent au sein de la faculté des sciences de Paris. Paul Montel est ainsi dès 1911 chargé de conférences puis maître de conférences à la faculté des sciences de Paris et il occupe successivement les chaires de mathématiques générales (de 1922 à 1925), de mécanique rationnelle (de 1925 à 1928) et de théorie des fonctions et des transformations de 1928 à 1941, avant d'être nommé doyen de 1941 à 1946<sup>641</sup>. Denjoy n'est nommé chargé de cours à la faculté des sciences de Paris qu'en 1922<sup>642</sup> et il devient ensuite successivement maître de conférence en avril 1925, directeur de recherches et professeur de mathématiques générales de 1931 à 1933, puis professeur de calcul différentiel et intégral jusqu'en 1940, date à laquelle il devient professeur de géométrie supérieure<sup>643</sup>. Quant à Valiron, il est pendant les années 1920 en poste à Strasbourg et n'est chargé d'un cours de mathématiques à la faculté de Paris qu'en octobre 1931. Il devient maître de conférences de calcul des probabilités et de physique mathématique en novembre 1932, puis professeur sans chaire en janvier 1935 et maître de conférences de calcul différentiel et intégral en mars 1939<sup>644</sup>.

En regardant les auteurs des publications mathématiques citées par les doctorants on constate fréquemment que le nom du rapporteur n'est pas mentionné. Le seul pour lequel cette conclusion ne s'applique pas est Georges Valiron, lui-même ancien doctorant en 1914. Dans trois des doctorats sur lesquels il rapporte<sup>645</sup>, ses travaux servent de référence et de base aux doctorants. Ils généralisent même certains de ses résultats. Pour Montel ou Denjoy en revanche, ce n'est pas le cas. Paul Montel n'est cité comme influence manifeste des doctorants essentiellement que pour deux thèses dont il est le rapporteur<sup>646</sup>. Certains de ses travaux sont également cités dans d'autres mémoires sur lequel il rapporte, non pas en tant que résultats mathématiques repris et utilisés directement mais comme résultats considérés classiques en théorie des fonctions, qui font partie intégrante du bagage mathématique d'un doctorant de l'entre-deux-guerres. Dans le cas de la théorie des fonctions univalentes, il est cependant présenté comme l'un de ceux qui a travaillé le sujet, même si les doctorants ne se fondent pas sur ses publications.

---

640. De 1921 à 1942.

641. Cf. CHARLE et TELKES 1989 et MAURAIN 1940.

642. alors qu'il est encore professeur de mathématiques générales à la faculté des sciences de Strasbourg de 1913 à mars 1925.

643. Cf. CHARLE et TELKES 1989, p. 107-108.

644. Cf. MAURAIN 1940, p. 66-67. Il ne pouvait donc de fait être président d'un jury de thèse pendant l'entre-deux-guerres.

645. Rauch, Hiong et Chuang.

646. Il s'agit de deux thèses classées en théorie des fonctions de la variable réelle : Marchaud et Popoviciu.



Le rapporteur apparaît en fait comme le mathématicien le plus qualifié de la faculté des sciences de Paris pour rapporter sur le sujet du mémoire. Les exemples de Julia pour la thèse de René de Possel ou de Paul Montel pour celle de Jean Dieudonné illustrent cette affirmation. Si, dans le cas de René de Possel, ce dernier ne mentionne aucune publication de l'auteur se rapportant directement aux questions de représentation conforme qu'il étudie, il n'en demeure pas moins qu'au moment où l'étudiant soutient son doctorat, Gaston Julia est celui qui au sein de la faculté des sciences de Paris, à côté de Montel, Denjoy ou Valiron<sup>647</sup>, a publié le plus et le plus récemment sur son sujet de thèse : la représentation conforme. Lorsque Jacqueline Ferrand soutient son mémoire dix ans plus tard, la situation a évolué. Autour de 1942, parmi les mathématiciens qui occupent une charge à la Sorbonne, Denjoy est celui qui publie le plus sur la question et c'est alors lui qui s'occupe de son rapport.

Si le sujet étudié par le doctorant est également travaillé par des mathématiciens en poste à la Sorbonne, le rapporteur du mémoire est, pour les doctorats en théorie des fonctions, le scientifique qui a publié le plus récemment sur le sujet : il en est ainsi, par exemple, de la thèse de Chi-Tai Chuang sur les familles normales des fonctions. Valiron en est le rapporteur, même si Paul Montel est le créateur de cette théorie. Pour certains doctorats l'écart reste cependant grand entre le sujet du mémoire et les sujets sur lesquels ont publié les membres du corps professoral de la Sorbonne. Le choix du rapporteur se porte alors, dans la majorité des cas, sur le mathématicien qui a travaillé des thèmes proches. C'est par exemple le cas pour la thèse de Jean Favard, *Sur les fonctions harmoniques presque périodiques*. Dans ce mémoire Jean Favard présente et approfondit une théorie nouvelle d'un mathématicien finlandais, Harald Bohr, sur laquelle aucun mathématicien français n'a jusqu'alors travaillé. Dans ce mémoire, Jean Favard étudie la possibilité du développement de telles fonctions en séries analogues aux séries de Fourier. La thématique se rapproche alors de la théorie des séries trigonométriques, théorie qu'Arnaud Denjoy a le plus travaillé, en 1927, parmi les mathématiciens français, en poste à la faculté des sciences de Paris. C'est lui qui écrit d'ailleurs le rapport.

La figure de Montel et sa forte présence parmi les membres de jury n'impliquent donc pas une influence intellectuelle du mathématicien d'une même ampleur. Il joue cependant un rôle particulier comme en attestent la correspondance reçue par Montel et conservée à l'Académie des sciences<sup>648</sup> ainsi que divers hommages qui lui sont rendus<sup>649</sup>. Il ne s'implique pas directement dans le travail des doctorants ou des étudiants mais il est présent pour offrir son aide et son assistance, intellectuelle comme matérielle.

647. Valiron étant tout juste arrivé à la faculté des sciences de la Sorbonne en 1932.

648. Dossier Paul Montel et Fonds Paul Montel 72J.

649. La remise de son sabre d'académicien ou son jubilé mathématique, par exemple, cf. MONTEL 1938, 1947a.

Les lettres conservées et consultables à l'Académie des sciences, qui ne constituent certes qu'une partie de la correspondance du mathématicien, ne révèlent pas d'échange fourni entre Montel et certains doctorants en théorie des fonctions de l'entre-deux-guerres durant l'élaboration de leur thèse<sup>650</sup>. Cependant ces courriers montrent la réponse rapide qu'adresse Paul Montel aux diverses sollicitations. Ainsi les lettres de Jean Anastissidis datant de 1939 témoignent des conseils qu'apporte Montel à ses travaux ainsi que des directions de recherche qu'il lui propose. Dans la première lettre<sup>651</sup>, Jean Anastissidis écrit ainsi :

« Je m'estimerai très heureux si, sur la base de mon travail, dont je joins également l'original grec pour le renvoi aux formules et à la bibliographie, vous me jugiez capable d'entreprendre, sous votre direction, une étude scientifique qu'il vous plaira de fixer. »

Cette première lettre contient des indications de Montel sur les possibles sujets de recherche à étudier et la seconde lettre envoyée par Anastassiadis confirme l'envoi d'une réponse par Montel au premier courrier. L'étudiant grec envoie à l'occasion de ce deuxième courrier trois notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* sur lesquelles il demande l'opinion de Montel et il écrit également :

« Je vous remercie infiniment pour l'intérêt que vous avez pour moi. J'estime, Monsieur le Professeur, que c'est vous qui m'avez donné les savantes directions en Mathématiques, les bases du travail<sup>652</sup>. »

Montel a pour les doctorants en théorie des fonctions au moins un rôle de « conseiller » ou de « relecteur ». Il l'exerce de façon encore plus importante envers les étudiants roumains. Il fait partie de la plupart des jurys de thèses et, selon Simion Stoilow<sup>653</sup> dans son allocution prononcée à l'occasion du jubilé scientifique de Paul Montel<sup>654</sup>, Montel serait le mathématicien français que consultaient prioritairement les étudiants roumains

650. Ainsi la première lettre qu'adresse Biernacki à Montel date seulement du 27 mars 1938 et concerne l'impression du mémoire de thèse (la thèse est soutenue le 11 mai 1928), les autres à être conservées sont écrites après 1935 (Fonds Paul Montel 72J). De même l'unique courrier conservé de Dieudonné date du 7 novembre 1932, alors que Dieudonné a soutenu sa thèse le 29 juin 1931. Le cas est identique pour Szolem Mandelbrojt dont les premiers courriers à être conservés sont de 1927, alors que ce dernier a soutenu sa thèse en 1923.

651. du 4 janvier 1939. Selon la lettre, Jean Anastissidis possède un doctorat grec en sciences mathématiques et c'est sous les conseils du professeur Varopoulos qu'il contacte Paul Montel. (On peut d'ailleurs signaler que Varopoulos est lui-même titulaire d'un doctorat d'université de la faculté de la Sorbonne, obtenu en 1923, pour le mémoire *Sur la croissance et les zéros d'une classe de fonctions transcendentes* dont le jury était composé de Vessiot, président, ainsi que de Montel et Julia).

652. Survient ensuite la seconde guerre mondiale qui perturbe non seulement les communications entre les deux pays mais également le travail des mathématiciens. La lettre suivante conservée à l'Académie des sciences ne sera envoyée qu'à la fin du conflit en 1945.

653. Ancien doctorant de la faculté de la Sorbonne en 1916 où il a soutenu un mémoire, *Sur une classe de fonctions de deux variables définies par les équations linéaires aux dérivées partielles*, il parle en 1947 en tant que membre de l'Académie Roumaine et ministre de Roumanie en France.

654. Cf. MONTEL 1947a, p. 36-38.

venus travailler en France. Ce seraient vers lui qu'ils étaient en général orientés<sup>655</sup>. Si le lien intellectuel n'est pas manifeste, certains témoignages d'étudiants roumains venus à Paris confirment ainsi un lien « paternel » qui unit Montel et les étudiants. Le mathématicien les conseille sur leurs travaux et essaie également de leur trouver des financements<sup>656</sup>. Le rôle particulier que joue Montel peut notamment être avancé

---

655. Simion Stoilow dans le cadre de la cérémonie prononce alors ces paroles, entourées de toutes l'emphase qui sied à ce genre de réunion :

« Pour plusieurs générations de mathématiciens roumains vous êtes cependant encore quelque chose de plus. Tous mes compatriotes venus à Paris, entre 1919 et 1939, pour parachever leurs études mathématiques et pour s'initier à l'art de la recherche, ont été accueillis par vous avec cette courtoisie généreuse qui sans doute jaillit tout naturellement de votre esprit, mais où chacun d'eux pouvait trouver ce qu'il lui fallait pour se sentir rapidement à l'aise.

Dans cette ambiance morale et intellectuelle, dans ce climat spirituel que vous créez autour de vous, il leur semblait saisir quelque chose qui trouvait en eux une résonance intime. Car, au sentiment d'admiration éprouvé, se mêlait en eux instantanément cette sympathie intelligente qui vient du sentiment profond que l'on comprend et que l'on est compris.

Aussi, si les premiers venus après la guerre, en 1919 ou en 1920, furent dirigés sur vous, les autres y vinrent tous seuls. Et c'est ainsi que *toutes les thèses* de mathématiques, soutenues en Sorbonne par des Roumains, entre 1919 et 1939 (et elles sont relativement nombreuses), ont été inspirées par vous ou dirigées par vos conseils, que toutes ont été soutenues devant vous. Tous ces jeunes mathématiciens ont fait leurs premiers pas dans la recherche, guidés par vous ; la plupart d'entre vous se sont formés à votre école. »

On mesure ici l'exagération des propos de Stoilow : si Montel est présent dans une grande partie des jurys des thèses roumaines de sciences mathématiques, cette présence n'est pas systématique (par exemple, il ne fait pas partie de celle de Georges Calugaréano, soutenue en 1928, *Sur les fonctions polygènes d'une variable complexe*, qui est pourtant classée parmi les thèses de théorie des fonctions et dont le jury est composé de Picard (président et rapporteur), Goursat et Julia et dont le thème ne se rapporte pas à des notions mathématiques travaillées par Montel).

656. La remise de l'épée d'académicien à Montel en Roumanie, à l'université de Bucarest semble ainsi significative. De plus à cette occasion, P. Sergescu, professeur de l'université de Cluj s'exprime au nom des élèves Roumains, MONTEL 1938, p. 18-19 et décrit le rôle particulier joué par Paul Montel parmi les autres mathématiciens français de l'entre-deux-guerres :

« Nous, [les étudiants roumains d'après-guerre], eûmes la joie et la chance d'écouter des maîtres vénérés, comme É. Picard et É. Goursat, ou comme É. Borel ou H. Lebesgue. Nous rencontrâmes à Paris, pour notre bonheur, un maître jeune, bienveillant, prêt à se pencher sur toutes les peines morales et matérielles de cette jeunesse, éloignée de sa patrie, un maître dont les travaux étaient unanimement admirés et dont les cours, faits de clarté et d'élégance, ravissaient l'esprit et prenaient le cœur. Il devint vite pour nous le symbole de ce que nous rêvions trouver de beau en France. Ce jeune maître s'appelait Paul Montel.

Vous ne vous êtes pas borné au seul rôle de professeur, vous avez été un vrai père pour vos étudiants. Les Roumains qui ont été vos élèves sont émus par le souvenir de votre bonté, par la libéralité avec laquelle vous distribuiez à tous des idées scientifiques, des conseils, ou des appuis matériels. »

Ces renseignements reposent sur une source qui peut être sujette à caution, car par principe, les discours prononcés lors de cérémonies telles qu'une remise d'épée d'académicien sont par nature hagiographique. Il faudrait pour confirmer avoir d'autres renseignements. Dans l'état actuel de mes recherches, je n'ai cependant pas pu trouver d'autres indications de ses relations que dans les correspondances que j'ai évoquées ci-dessus.

comme l'une des explications à la proportion importante d'étudiants étrangers parmi les doctorants en théorie des fonctions.

## 5.5 Les dynamiques de recherches en théorie des fonctions

L'étude des thèses classées en théorie des fonctions a permis de mettre en évidence plusieurs dynamiques au moyen des références citées par les doctorants, des théories auxquelles ils se réfèrent et des questions qu'ils abordent. Ces références sont endogènes ou exogènes au corpus. Il y a ainsi des dynamiques entre plusieurs thèses : elles se citent, elles se fondent sur des références mathématiques communes, elles se prolongent mutuellement, elles adoptent un point de vue semblable. C'est notamment le cas pour certaines thèses sur des questions de convergence et d'ultraconvergence de séries ou sur des propriétés différentielles de fonctions de la variable réelles. C'est encore le cas pour des thèses sur la distribution des valeurs des fonctions de la variable complexe et de leurs cercles de remplissage, les cercles de remplissage de telles fonctions ou sur les fonctions univalentes. Le lien entre différentes thèses d'un même groupe thématique n'est cependant pas systématique. L'étude de ces dernières thèses étudie peut alors montrer les évolutions des influences mathématiques des doctorants, le renouvellement des citations, l'apport de nouvelles théories et de nouvelles approches sur le sujet. C'est par exemple le cas pour les thèses sur les séries trigonométriques ou pour les thèses sur la représentation conforme. Ces thèses paraissent s'inscrire dans des élans de la recherche qui dépasse le cadre des doctorats. Certains des thèses sur les séries trigonométriques apparaissent ainsi comme des échos de l'évolution anglaise de ce sujet.

La comparaison de cette étude et de l'historiographie révèle l'influence de certains travaux de mathématiciens. Ainsi plusieurs travaux de Valiron ou Montel, qui ne sont pas mentionnés par l'historiographie, sont repris par quelques étudiants. L'étude des thèses à un troisième niveau d'analyse permet également d'affiner le bilan historiographique : elle met en valeur l'appropriation de nouvelles théories, l'utilisation de méthodes particulières. Elle montre comment certaines sont considérées comme des méthodes classiques et comment des théories sont intégrées, développées et généralisées peu de temps après leur publication.

Il faut toutefois garder en mémoire les biais qu'engendre le corpus étudié et le rôle important joué par l'implicite dans les avant-propos, dans les thèses elles-mêmes et également dans les rapports qu'écrivent les mathématiciens. Valiron ne cite par exemple presque jamais, dans les rapports, ses propres résultats ou ses propres publications auxquels se réfèrent pourtant certains doctorants dont il est le rapporteur de thèse.



# Chapitre 6

## Les thèses en calcul des probabilités (troisième niveau d'analyse)

### Sommaire

---

6.1	Le calcul des probabilités du début du XX <sup>ème</sup> siècle jusqu'à la fin des années 1930 : un bilan historiographique .	351
6.2	Une unique thèse dans l'immédiate après-guerre : une vision « borélienne » des probabilités, la thèse de Robert Deltheil . . . . .	367
6.3	Les autres thèses (1937-1945) . . . . .	376
6.4	Conclusion . . . . .	417

---

Dans ce dernier chapitre, le troisième niveau d'analyse est appliqué aux thèses classées en « calcul des probabilités ». La focale d'étude est donc la même que celle relative à une partie des thèses de théorie des fonctions de la variables complexes.

Les deux domaines mathématiques n'ont pas le même statut en France pendant l'entre-deux-guerres. Comme je l'ai déjà évoqué, la théorie des fonctions de la variable complexe est un domaine à la pointe de la recherche mathématique française du début du XX<sup>ème</sup> siècle, dont la réputation d'excellence de ce domaine continue pendant l'entre-deux-guerres et qui est abordé par un nombre constant et important de doctorants. Il n'en est pas de même pour le domaine des probabilités. De l'origine de cette discipline, au XVII<sup>ème</sup> siècle, avec Pascal et Fermat, aux XVIII<sup>ème</sup> et XIX<sup>ème</sup> siècles, avec Condorcet, Laplace, Poisson, Cournot, Poincaré. . . de nombreux mathématiciens français ont contribué à son développement. Pourtant, dans la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle, la théorie des probabilités n'est pas considérée en France comme une branche des mathématiques à part entière. La théorie moderne<sup>1</sup> des probabilités, fondée sur la théorie de

---

1. Pour reprendre notamment le terme de Van Plato dans VON PLATO 1994.

la mesure de Borel et l'intégrale de Lebesgue, n'a pas encore acquis une place affirmée dans le milieu de la recherche académique française.

La différence de statut entre les deux domaines mathématiques pourrait expliquer la différence entre les nombres de thèses soutenues dans chacun d'entre eux. Ainsi, avant 1937, une unique thèse est soutenue en calcul des probabilités : il s'agit du mémoire de Robert Deltheil en 1920, qui porte sur l'invariance de probabilités relativement à certains groupes finis et continus de transformations. Dans le même temps, sont soutenus dix-sept doctorats classés en théorie des fonctions de la variable complexe. En revanche, à la fin de la période de l'entre-deux-guerres, le calcul des probabilités constitue, en nombre de thèses soutenues, un domaine plus important des sciences mathématiques françaises. En effet, entre 1937 et 1945, sept doctorats sont présentés, autant qu'en théorie des fonctions de la variable complexe.

L'évolution du nombre de thèses classées en théorie des probabilités traduit une évolution du statut de ce domaine dans les sciences mathématiques. En outre, les sujets traités dans les sept mémoires de la fin de l'entre-deux-guerres diffèrent de celui de Robert Deltheil. Ni les problèmes abordés, ni les notions et théories utilisées ne sont les mêmes. Chronologiquement, deux premières thèses sont inspirées par les travaux anglais de Pearson, repris ensuite par Fisher : celle de Daniel Dugué porte sur les théories statistiques de l'estimation ; l'autre, de Gustave Malécot, sur les applications de théories statistiques à la modélisation de l'hérédité mendélienne. Jean Ville s'intéresse quant à lui à la question des fondements des probabilités et à la théorie des collectifs introduite par Von Mises. Les deux thèses de Wolfgang Doeblin et de Robert Fortet portent sur la théorie des probabilités en chaîne et utilisent les résultats de Markov ainsi que l'axiomatisation de Kolmogoroff. Enfin, Michel Loève s'intéresse à des questions de convergence en se fondant exclusivement sur les résultats et les méthodes de Paul Lévy. Un dernier doctorat illustre le rôle que peuvent jouer les probabilités en relation avec la physique : André Blanc-Lapierre utilise la théorie des fonctions aléatoires pour modéliser des chocs aléatoires en électricité.

Ces thèses classées en probabilités apparaissent comme un indicateur des changements profonds du domaine. Comprendre comment ces dernières s'inscrivent dans cette évolution en France est l'un des enjeux de cette partie. Dans quelle mesure retrouve-t-on dans les mémoires des théories, des théorèmes et des résultats qui ont fait l'objet de cours ou de publications (françaises comme étrangères) ? Pour répondre à de telles questions, il apparaît nécessaire de faire un bilan historiographique sur la recherche française et sur l'enseignement en probabilités pendant la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle, afin de contextualiser l'évolution du calcul des probabilités en France pendant l'entre-deux-guerres.

## 6.1 Le calcul des probabilités du début du XX<sup>ème</sup> siècle jusqu'à la fin des années 1930 : un bilan historiographique

Je ne m'intéresserai pas au développement du calcul des probabilités à l'échelle de la recherche internationale. De nombreux ouvrages ou articles ont déjà été publiés à ce sujet, parmi lesquels : VON PLATO 1994 sur la théorie moderne des probabilités, BARONE et NOVIKOFF 1978 sur l'axiomatisation de la théorie des probabilités, CRÉPEL 1984 sur la théorie des martingales, KAHANE 1998 sur le mouvement brownien, SENETA 1966 sur l'histoire des chaînes de Markov, SHEYNIN 1989 sur les travaux de Markov en probabilités ou encore BARBUT ET AL. 2004 sur la correspondance entre Paul Lévy et Maurice Fréchet <sup>2</sup>.

L'historiographie des probabilités en France du début du XX<sup>ème</sup> siècle provient, pour l'essentiel, des travaux de Bernard Bru <sup>3</sup>. On peut également mentionner certaines publications de Laurent Mazliak, Marc Barbut, Bernard Locker et Hélène Gispert, qui, pour la plupart, font fréquemment référence aux travaux de Bernard Bru <sup>4</sup>. Ces textes sont souvent centrés sur l'histoire d'une théorie ou sur les travaux et le parcours d'un ou de mathématicien(s) : tels l'histoire des chaînes de Markov, du battage des cartes, du principe ergodique dans BRU 2003, de la martingale de Saint-Petersbourg dans BRU ET AL. 1999, ou des articles sur Wolfgang Doeblin <sup>5</sup>, sur Paul Lévy par Bernard Locker, sur la correspondance entre Lévy et Fréchet. . . Ils rendent compte de faits relatifs à une (ou des) personne(s) ou dressent une suite de résultats participant du développement d'une théorie.

L'approche choisie par ces auteurs est donc différente de la mienne. Je me fonde en effet sur un corpus formé par un ensemble de textes. Je cherche à approfondir et à affiner les relations qu'entretiennent les mathématiciens français en probabilités, sans

---

2. L'introduction est consacrée à un panorama du développement des probabilités en rapport avec les travaux de Paul Lévy et Maurice Fréchet.

3. Sous forme d'articles ou interviews, tels que : BRU 1992, BRU 1999b, BRU ET AL. 1999, COLASSE et PAVÉ 2002 BRU 2003 . . .

4. Cf. respectivement, BRU 1999b, BRU 1992, COLASSE et PAVÉ 2002, BARBUT ET AL. 2004, Introduction, LELOUP et GISPERT prévu pour 2009, section « Borel et les probabilités », MEUSNIER 2004, LOCKER 2001, LELOUP 2004, etc. Je me réfère à tous ces ouvrages en même temps. Certains font référence à des événements identiques. Je ne citerai donc pas systématiquement à quel ouvrage j'emprunte les épisodes que je rapporte. Enfin j'ai également utilisé les notes de la conférence qu'a donnée Laurent Mazliak le 15 novembre 2008 à l'occasion du 80<sup>ème</sup> anniversaire de l'IHP, MAZLIAK 2008. Ces notes ont pu être écrites en partie à la suite d'un travail réalisé en collaboration avec Rémi Catellier qui a donné lieu à un rapport de stage de L3 de ce dernier, CATELLIER 2008, et qui sera rédigé dans un prochain article CATELLIER et MAZLIAK 2010.

Je tiens par ailleurs à remercier Laurent Mazliak pour ses remarques variées sur cette partie ainsi que pour l'aide qu'il m'a apportée.

5. Comme par exemple BRU 1992 ainsi que les autres articles écrits en collaboration avec Marc Yor.



me concentrer sur une seule personne. Je tente également de dégager certains aspects particuliers de ce domaine à travers l'étude des thèses.

L'historiographie existante met en évidence trois périodes distinctes du début du XX<sup>ème</sup> siècle jusqu'en 1945. Une première commence au début du XX<sup>ème</sup> siècle et s'arrête à la fin des années 1910 avec l'attribution de la chaire de calcul des probabilités et physique mathématique à Borel. Elle est marquée par la présence d'un unique mathématicien, Émile Borel, sur la scène des probabilités, après la mort de Poincaré en 1912. On distingue une deuxième période du début des années 1920 jusqu'à la création de l'Institut Henri Poincaré en 1928, pendant laquelle une nouvelle génération de mathématiciens commence peu à peu à investir le domaine des probabilités, dans la promotion duquel Borel reste actif. Pendant la dernière période, de 1928 à la fin des années 1930, les probabilités cherchent à s'affirmer comme un domaine des sciences mathématiques à part entière.

### 6.1.1 Du début du XX<sup>ème</sup> siècle jusqu'en 1920

Les probabilités françaises du début du XX<sup>ème</sup> siècle sont dominées par deux mathématiciens : Poincaré et Borel<sup>6</sup>. Poincaré a publié son célèbre cours à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, POINCARÉ 1896, republié en 1912 et destiné à ses étudiants en physique mathématique de la faculté des Sciences. L'intérêt de Borel pour ce domaine date des années 1905 et 1906, où il publie successivement deux articles mathématiques sur le calcul des probabilités, BOREL 1905, 1906b et un article dans la nouvelle revue qu'il vient de fonder, *La Revue du mois*, BOREL 1906a. À partir de ces publications, Borel devient l'animateur principal de la diffusion du calcul des probabilités en France et il le reste jusqu'à la fin des années 1920.

Les travaux de ces deux mathématiciens se rencontrent sur plusieurs points. Dans son article sur les probabilités géométriques de 1905, Borel montre que sa théorie récente de la mesure et l'intégration de Lebesgue sont des outils utiles dans le cadre des

---

6. D'après les différents travaux de Bernard Bru, Laurent Mazliak, Marc Barbut, Bernard Locker, et Hélène Gispert. Il faudrait également mentionner Louis Bachelier qui a soutenu une thèse en 1900 sur la *Théorie de la spéculation*. Ce dernier a continué à publier sur des sujets de probabilités pendant toute la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle notamment sur la théorie des probabilités continues. Cependant, il n'occupait pas de position institutionnelle forte et ses travaux n'étaient pas reconnus à l'époque par le reste de la communauté mathématique académique française. Ils sont ainsi restés très longtemps ignorés en France. D'après Bernard Bru, BRU 1999b, p. 39, son oeuvre a d'abord été reconnue à Moscou par Khinchin et Kolmogorov vers 1930, avant d'être redécouverte par Lévy (ce qu'écrit également Lévy dans LÉVY 1970) et par la communauté internationale dans les années 1960. Pour davantage de renseignements sur Louis Bachelier, on peut également se référer à BARBUT ET AL. 2004, où le mathématicien est évoqué dans l'introduction historique et également à l'interview de Bernard Bru par Murad S. Taqqu, TAQQU 2001, ou à KAHANE 1998, p. 142 ainsi qu'à l'article sur Louis Bachelier écrit par Pierre Crépel et L. Carraro dans HEYDE et SENETA 2001, p. 283-285.

probabilités géométriques<sup>7</sup>. Il y justifie le résultat intuitif d'un exemple développé par Poincaré sur la probabilité nulle d'un tirage « au hasard » d'un point rationnel de l'intervalle  $[0; 1]$ . Borel n'ira cependant pas plus loin dans la théorisation des probabilités géométriques. Certains travaux de Poincaré<sup>8</sup> sont également à l'origine de l'intérêt de Borel pour la théorie cinétique des gaz et la mécanique statistique qu'indique son article de 1906 où il traite de la loi de répartition des vitesses de Maxwell-Boltzmann<sup>9</sup>.

Poincaré répond à Borel dans ses articles suivants et reprend certaines des notions introduites par ce dernier<sup>10</sup>. L'article de Borel de 1906, BOREL 1906b, serait ainsi l'une des sources utilisée par Poincaré pour bâtir sa théorie des événements fortuits qu'il expose dans le « Hasard » publié en 1907 dans la revue de Borel, *La Revue du Mois*<sup>11</sup>. Ce « retentissant » article de Poincaré représente un changement radical pour le mathématicien, connu jusqu'alors pour son hostilité aux théories cinétiques et son scepticisme à l'égard du calcul des probabilités<sup>12</sup>. Il s'y livre à une analyse de la nature des phénomènes fortuits et de leurs lois : il admet que certains phénomènes physiques à une échelle convenable sont et ne sauraient être que « fortuits » et que seul un calcul de probabilités peut en rendre compte dès lors que ses résultats ne dépendent plus de la particularité des conditions initiales<sup>13</sup>. Dans cet article, Poincaré présente sa perception du calcul des probabilités et évoque sa méthode des fonctions arbitraires. Il traite également du problème du battage des cartes, déjà proposé par Hadamard : il y démontre dans le cas de deux cartes que, quelle que soit la distribution initiale des cartes, le grand nombre des battements rendra tous les rangements de cartes équiprobables<sup>14</sup>. En 1912, Poincaré reprend le problème général du battage des cartes dans la réédition de son cours. Borel y réagit dans une note aux *Comptes rendus* en donnant une démonstration rapide et élémentaire du cas « ordinaire » du battage des cartes<sup>15</sup>. D'après Bernard Bru, cette démonstration est la première utilisation de la

7. Ce que laissait déjà supposer un article de Poincaré de 1890, « Sur le problème des trois corps et les équations de la mécanique », *Acta Mathematica*, 13 (1890) 1-270. D'après BARBUT ET AL. 2004, p. 24, s'y dessinait un lien avec la future théorie de la mesure telle que la développeront après 1890 Borel et Lebesgue.

8. Comme le chapitre de son ouvrage POINCARÉ 1896 consacré à la question de la distribution uniforme des petites planètes sur le zodiaque. Cette question est reprise par Poincaré dans un article de 1899, « Réflexions sur le calcul des probabilités », *Revue générale des sciences*, 10 (1899) 262-269.

9. Cf. BRU 1999b, « Borel, Poincaré et les petites planètes ».

10. Cf. notamment BRU 1999b, p. 68.

11. Cf. BRU 1999b, p. 9. Bernard Bru identifie comme autre source l'ouvrage de Gibbs de 1902 *Elementary principles in statistical mechanics developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics*, New York : Charles Scribners Sons. London : Edward Arnold, et le compte-rendu qu'en fait Hadamard en 1906.

12. Cf. BRU ET AL. 1999, p. 192. Poincaré insère en outre cet article en introduction de la réédition de son *Calcul des probabilités* en 1912, POINCARÉ 1912.

13. Cf. BRU ET AL. 1999, p. 193.

14. Cf. BRU 1999b, p. 11 et BRU 2003, p. 141. Ce problème conduit à une démonstration « ergodique » probabiliste.

15. Cf. BRU 2003, p. 146.

« méthode de Markov », même si Borel ignore tout à cette époque des travaux de Markov<sup>16</sup>.

En 1909, Émile Borel publie un article, « les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques », BOREL 1909, considéré aujourd'hui comme un classique de la théorie mathématique des probabilités<sup>17</sup>. Il y énonce une première version de la loi forte des grands nombres<sup>18</sup>, et applique ses théories à une propriété arithmétique élémentaire (avec une probabilité égale à 1, chaque chiffre est présent avec une proportion de 1/10 dans les décimales d'un nombre tiré au hasard entre 0 et 1). D'après la *Notice sur travaux* qu'il écrit en 1912, Borel cherche par cette publication à « combler la lacune » entre les probabilités continues et les probabilités discontinues, grâce aux probabilités dénombrables<sup>19</sup>.

Ces différentes publications au début du XX<sup>ème</sup> siècle marquent un nouvel essor de la théorie des probabilités, porté, pour l'essentiel, par Émile Borel. En outre, ce dernier définit sa conception du domaine, un domaine essentiellement tourné vers les applications, dans ses différents articles de 1905, 1906, 1909, dans le *Hasard* en 1914, ainsi que dans ses cours et dans son activité éditoriale comme directeur fondateur de la *Revue du mois*<sup>20</sup>. Il insiste ainsi sur la « valeur pratique du calcul des probabilités » dès son article dans la *Revue du Mois* de 1906 et il l'expose également en introduction de son article de 1906, BOREL 1906b, p. 9-10<sup>21</sup>. Il s'agit donc de faire des mathématiques

16. Cf. BRU 2003, p. 146. et cf. BRU 1999b, p. 10-12.

17. L'ouvrage BARBUT ET AL. 2004 évoque p. 25 cet ouvrage comme le début d'une nouvelle ère, tout comme Barone et Novikov qui le qualifient de « landmark » dans leur étude historique, BARONE et NOVIKOFF 1978, p. 123-125. C'est à partir de cette publication que l'on parle de la théorie moderne du calcul des probabilités, dont le développement est dû à l'introduction de la théorie de la mesure et de la théorie de l'intégration de Lebesgue.

18. Celle stipulant la convergence presque sûre des moyennes arithmétiques d'une suite de variables aléatoires indépendantes.

19. La citation exacte de sa *Notice sur travaux* est la suivante : « La distinction entre probabilités continues et discontinues est classique ; elle correspond à la distinction entre groupes finis (de Galois) et groupes continus (de Lie) ; mais on n'avait pas envisagé l'échelon intermédiaire (qui correspond aux groupes discontinus tels que les groupes fuchsien). J'ai cherché à combler cette lacune en étudiant ce que j'ai appelé les probabilités dénombrables. ».

20. Cf. BRU ET AL. 1999.

21. La citation est la suivante :

« La théorie cinétique des gaz et ses applications et extensions diverses sont encore loin d'être acceptées sans difficulté par tous. En particulier, les applications du calcul des probabilités aux calculs statistiques concernant les molécules excitent beaucoup de défiance chez certains esprits. Bien peu sans doute en sont restés à la boutade de Joseph Bertrand, disant que ces problèmes de probabilité ressemblent au problème célèbre de l'âge du capitaine, qu'on propose de déterminer, connaissant la hauteur du grand mât. [...]

Aussi c'est à ceux qui jusqu'ici ont plus ou moins partagé sur la théorie cinétique des gaz l'opinion de Joseph Bertrand que je voudrais m'adresser. Leurs scrupules sont légitimes à certains égards : on ne peut reprocher à un mathématicien son amour de la rigueur ; mais il ne me paraît pas impossible de les satisfaire.

Tel est le but des pages qui suivent : elles ne font faire aucun progrès *réel* à la théorie, au point de vue du physicien ; mais elles auront peut-être pour résultat de convaincre

probabilistes qui peuvent être utiles à d'autres domaines, comme celui de la théorie cinétique des gaz. Toutes ces publications et toutes ces actions entreprises par Borel sont guidées par cette conviction. Ainsi, d'après Bru, BRU 1999b, p. 7, « Borel, seul en France sinon dans le monde, va considérer que l'enjeu est tel qu'il y va de son devoir d'homme et de mathématicien d'abandonner presque totalement « la théorie des fonctions », pour se dédier « de toutes ses forces » au développement et à la diffusion la plus large possible du calcul des probabilités et de ses applications ».

Borel n'insiste pas sur les possibilités d'axiomatisation de ses différentes théories<sup>22</sup>. Par exemple, il n'explicite pas le lien entre les probabilités qu'il considère (probabilités continues et probabilités dénombrables)<sup>23</sup>. De plus, dans son ouvrage *Le Hasard*, paru en 1914, il met en garde contre une utilisation excessive des probabilités<sup>24</sup>.

La conception du calcul des probabilités par Borel<sup>25</sup> ne modifie pas le manque de considération du milieu mathématique français de ce premier quart du XX<sup>ème</sup> siècle envers ce sujet. Sur cet aspect, Borel, Poincaré, puis, plus tard, Hadamard se rejoignent : les probabilités ne sont pas considérées comme un champ à part entière des mathématiques ni comme une branche des mathématiques pures. Cette opinion persistera ensuite pendant une bonne partie de l'entre-deux-guerres jusqu'à l'arrivée d'une nouvelle génération, dont les principaux représentants sont Paul Lévy, Maurice Fréchet et Georges Darmon, génération qui imposera une étude et une conception nouvelles de ce domaine.

Il est malaisé de connaître le rôle joué par la première guerre mondiale sur la conception des probabilités de Borel. Ce conflit représente un bouleversement pour toute une génération de mathématiciens et Borel en fut particulièrement marqué, comme en témoigne le livre de souvenirs de sa femme Camille Marbo, MARBO 1967. Le mathématicien continue après le conflit et pendant l'entre-deux-guerres à promouvoir les probabilités tournées vers les applications, tout en étant réticent à voir des mathématiques sophistiquées dans le champ probabiliste<sup>26</sup>.

---

quelques mathématiciens de son intérêt, et, en augmentant le nombre de chercheurs, contribueront peut-être indirectement à son développement. S'il en est ainsi, elles n'auront pas été inutiles, indépendamment de l'intérêt esthétique qui s'attache à toute construction logique. »

22. Comme l'indiquent Glenn Shafer et Vladimir Vovk.

23. Cf. par exemple SHAFER et VOVK 2006, p. 81. Glenn Shafer et Vladimir Vovk expliquent que dans sa démonstration Borel affirme que ses résultats peuvent être établis à l'aide de la théorie de la mesure, mais il ne l'utilise pas lui-même pour des « raisons philosophiques ».

24. Pour Borel, « on doit utiliser [les nombres], mais ne jamais oublier qu'ils ne créent pas la certitude », BOREL 1914b.

25. Un domaine utile par ses applications à d'autres domaines mais qu'il ne faut pas trop utiliser.

26. Par rapport à l'avant-guerre, il semble placer les applications encore plus au coeur de ce domaine, cf. CATELLIER et MAZLIAK 2010 qui étudie davantage le rôle joué par la guerre dans l'évolution de la conception du domaine de Borel.

Dans le même temps, du début du XX<sup>ème</sup> siècle jusqu'au début des années 1920, peu de cours de probabilités sont donnés dans les facultés françaises. Il y a toujours celui de l'École polytechnique, qui à partir de 1919 sera assuré par Paul Lévy, un « jeune » probabiliste à l'époque<sup>27</sup>. À la Sorbonne, Émile Borel a commencé à introduire quelques cours de probabilités, dès avant la première guerre mondiale. Son premier cours date de 1908-1909 l'année où il est nommé professeur titulaire de la chaire de théorie des fonctions<sup>28</sup>.

Du XX<sup>ème</sup> siècle jusqu'au milieu des années 1920, le domaine du calcul des probabilités apparaît donc à la marge des mathématiques. Il est développé par peu de mathématiciens et ces derniers ne le considèrent pas comme une branche à part entière des mathématiques pures. En outre, malgré la notoriété importante de Poincaré et Borel, leurs articles en probabilités sont peu lus en France. Ils ne sont pas repris dans le cadre de ce domaine mais appliqués à d'autres théories<sup>29</sup>.

### 6.1.2 Des années 1920 à 1928

La situation évolue à partir du début des années 1920, la fin des années 1920 étant marquée à la fois par le congrès international des mathématiciens de Bologne et par la création de l'Institut Henri Poincaré. De nouveaux mathématiciens investissent alors le domaine des probabilités.

En 1919, Paul Lévy est arrivé sur la scène probabiliste en assurant des conférences sur ce thème à l'École polytechnique<sup>30</sup>. Il commence alors également des recherches en probabilités et se démarque fortement de Borel par les questions qu'il étudie et les méthodes qu'il utilise<sup>31</sup>. Comme nous l'avons dit, il publie en 1925 son propre cours de Probabilités, considéré *a posteriori*, notamment par Cramer, comme le premier traité moderne des probabilités<sup>32</sup>. Dans l'introduction de ce cours, Lévy s'oppose explici-

27. D'après Bernard Locker dans LOCKER 2001, p. 8, la demande de Carvallo, directeur de l'École polytechnique, à Lévy de faire des conférences sur les éléments du calcul des probabilités et des erreurs, constitue le « grand choc » de la vie de Paul Lévy. Après ce moment là, « Lévy entre en Probabilité ».

28. Cf. BRU 1999b, p. 12 et BRU ET AL. 1999, p. 187. Paul Lévy va d'ailleurs en suivre quelques-uns, cf. LOCKER 2001, p. 8. D'après BRU ET AL. 1999, p. 187, lors de son premier cours au semestre 1908-1909, il évoque des paradoxes du calcul des probabilités tel le paradoxe de Saint-Petersbourg.

29. Cf. BRU 1999b, p. 12-13. Bernard Bru indique ainsi que la publication de Borel en 1909 sur les probabilités dénombrables a été lue par des mathématiciens en partie parce qu'elle contient des énoncés en théorie des nombres d'un intérêt mathématique immédiat.

30. Cf. LÉVY 1970; LOCKER 2001; BARBUT ET AL. 2004.

31. Ses premières recherches sont ainsi en lien étroit avec ses recherches en analyse fonctionnelle, qui, de fait, s'opposent à la théorie des fonctions, dont Borel est, à l'époque, considéré comme l'un des maîtres. D'après BRU 1999a, p. 52, Paul Lévy propose des démonstrations mathématiques fondées sur une nouvelle méthode des fonctions caractéristiques, rénovée par rapport à celle utilisée par Poincaré. Il donne notamment la première démonstration moderne du théorème limite central pour des variables indépendantes non distribuées.

32. BARBUT ET AL. 2004, p. 46. Cf. également la note 17, p. 354 pour l'utilisation du terme « moderne ».

tement à l'idée défendue par Borel et Robert Deltheil<sup>33</sup> dans leur ouvrage commun BOREL et DELTHEIL 1923 de ne pas utiliser de mathématiques élaborées. Lévy souligne au contraire la nécessité de théories mathématiques précises et de raisonnements rigoureux<sup>34</sup>. L'opposition est alors manifeste entre Lévy et Borel, car ce dernier estime dénué d'intérêt le déploiement par Lévy de ce qu'il considère quant à lui des raisonnements analytiques compliqués et superflus<sup>35</sup>. Au contraire de Borel, Paul Lévy n'a pas non plus en vue, dans les années 1920, exclusivement les applications physiques ou statistiques du calcul des probabilités<sup>36</sup>.

D'autres cours traitant de l'aléatoire sont également introduits à l'École polytechnique au début des années 1920. Un premier cours de « statistiques utilisant des méthodes probabilistes » est assuré par Jacques Chapelon en 1922<sup>37</sup>. Il présente un enseignement divisé en deux parties : la première est consacrée au calcul des probabilités<sup>38</sup>, la seconde à la statistique, sans qu'y soient présentés les travaux de statisticiens anglais comme Galton et Pearson<sup>39</sup>.

Dans le même temps, Maurice Fréchet est nommé en 1919 à l'université de Strasbourg, qui est redevenue française. C'est à cette occasion qu'il se tourne vers le calcul des probabilités<sup>40</sup> à travers un cours sur les applications des techniques statistiques aux phénomènes sociaux qu'il enseigne avec le sociologue Maurice Halbwachs à l'Institut d'études commerciales<sup>41</sup>. Il publie avec ce dernier en 1924 un livre, *Le Calcul des probabilités à la portée de tous*, dans lequel il présente les principes des probabilités et de

33. À cette époque, ce dernier est docteur après avoir soutenu une thèse classée en probabilités en 1920.

34. Paul Lévy mentionne ainsi que « pour souligner l'importance du rôle de la loi de Gauss dans la théorie des erreurs, il est possible de contourner une théorie mathématique précise et de se limiter à des raisonnements de sens commun. C'est ce qu'ont fait MM. Borel et Deltheil dans leur petit livre et il n'y a rien à ajouter à ce qu'ils ont écrit là. Mais pour le mathématicien, ceci ne peut être suffisant. Il est nécessaire de justifier les principes fondamentaux de la loi des erreurs par une précision judicieuse de la notion intuitive d'erreur accidentelle et en prouvant que cette erreur accidentelle suit la loi de Gauss par un raisonnement rigoureux. M. Borel pense que ce résultat ne justifie pas l'appareil mathématique requis pour cette démonstration. »

35. Cf. BARBUT ET AL. 2004; BRU 1999b,a.

36. Cf. BRU 1999a, p. 52. Je renvoie également à BRU 1999a, pour davantage de détails sur le conflit entre Borel et Lévy à cette époque.

37. Cf. CATELLIER et MAZLIAK 2010.

38. Il y expose les notions et les principes fondamentaux du calcul des probabilités ainsi que quelques applications à la théorie des jeux de hasard, cf. CHAPELON 1922, p. 1 et CATELLIER et MAZLIAK 2010.

39. Parmi les thèmes que présente Chapelon dans son cours figurent les séries statistiques linéaires, la loi de Gauss-Laplace, l'application de cette loi aux erreurs accidentelles, les séries statistiques à double entrée, la corrélation et la loi de Bravais, et l'application aux principes de la probabilité des tirs ainsi qu'un problème de mécanique statistique, cf. CHAPELON 1922, p. 1 et CATELLIER et MAZLIAK 2010. Rémi Catellier ne précise cependant pas combien de temps Chapelon assure ce cours à l'École polytechnique.

40. Il n'y vient pas par la physique théorique, les mathématiques ensemblistes ou l'actuariat, comme c'est le cas pour la quasi-totalité des théoriciens des probabilités de l'époque, d'après BARBUT ET AL. 2004, p. 45.

41. Selon Laurent Mazliak, Pavel Sisma et Veronika Havlova dans HAVLOVA ET AL. 2005, p. 12.

leurs applications avec des notions simples. Il correspond également avec le mathématicien tchèque Hostinský à partir de 1919<sup>42</sup>. Ce dernier vient alors de publier un article proposant une nouvelle résolution du problème de l'aiguille de Buffon<sup>43</sup>, où il utilise la méthode des fonctions arbitraires de Poincaré. Enfin, Maurice Fréchet est en relation avec Paul Lévy depuis la fin de la première guerre mondiale. Dès le milieu des années 1920, leur correspondance porte sur des questions de probabilités et notamment sur la théorie des erreurs qu'ils étudient alors tous les deux et qui les occupent au moins jusqu'au début des années 1930<sup>44</sup>.

Quant à Émile Borel, il continue à promouvoir l'implantation du calcul des probabilités dans les sciences mathématiques françaises. Tout d'abord, en 1920, il demande et il obtient du Conseil de la faculté des sciences de Paris son transfert de la chaire de théorie des fonctions, créée pour lui en 1909, à la chaire de calcul des probabilités et de physique mathématique, devenue libre à la suite du départ à la retraite de Boussinesq atteint par la limite d'âge des 70 ans<sup>45</sup>. Ce transfert institutionnalise l'évolution de l'enseignement et des intérêts de recherche de Borel. En outre, Borel se lance dans la publication d'un grand traité, annoncé dans le *Supplément* de 1921 de sa *Notice sur travaux* de 1912 : le *Traité du calcul des probabilités et de ses applications* constitué de dix-huit volumes écrits entre 1925 et 1937 avec la collaboration de plusieurs mathématiciens collègues ou élèves<sup>46</sup>. Robert Deltheil y participe, comme nous le verrons, de même que Fréchet, mais Lévy ne publie pas dans cette collection<sup>47</sup>.

En outre, Borel participe en 1922 à la création de l'ISUP, l'Institut de statistique de l'université de Paris. À partir de 1922-1923, différents cours y sont donnés sur des domaines liés au calcul des probabilités<sup>48</sup>. C'est dans le cadre de l'ISUP qu'intervient

42. Pour davantage de renseignements à ce sujet, je renvoie à HAVLOVA ET AL. 2005, ainsi qu'à BRU 2003.

43. Il s'agit de calculer la probabilité pour qu'une aiguille jetée sur un parquet coupe l'une des rainures, cf. HAVLOVA ET AL. 2005; BRU 2003.

44. Cf. BARBUT ET AL. 2004, p. 46. Il faudrait également rajouter les nombreuses correspondances de Fréchet avec d'autres mathématiciens, notamment sur le sujet des probabilités ou des statistiques : mathématiciens russes comme Kolmogorov et Bernstein ou anglais comme Fisher, cf. notamment ARBOLEDA 1981 et ARMATTE 2001.

45. Cf. LELOUP et GISPert prévu pour 2009, p. 23. Depuis l'écriture de cet article, Laurent Mazliak a dépouillé la correspondance entre Émile Borel et Vito Volterra. Borel a écrit le 2 février 1921 à Volterra qu'il ne l'a pas fait tout à fait de gaieté de coeur, ce qui peut surprendre. On peut sans doute interpréter ce fait comme un signe de plus de l'attitude déroutante de Borel vis-à-vis des probabilités. Cf. MAZLIAK 2008, p. 7, CATELLIER et MAZLIAK 2010 et MAZLIAK et TAZZIOLI 2009.

46. Cf. LELOUP et GISPert prévu pour 2009, p. 26-27 et BRU 2003.

47. Lévy publie cependant dans une autre collection créée par Émile Borel en 1937, les *Monographies de calcul des probabilités*. Le livre de Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, LÉVY 1937, constitue le premier fascicule de cette collection.

48. Norbert Meunier dans MEUSNIER 2004, p. 252-253 évoque parmi les domaines concernés la démographie et l'économie, l'actuariat, les techniques et recherches industrielles, la médecine, etc. Selon Norbert Meusnier, « l'Institut a pour but d'enseigner la méthode statistique et ses applications d'un point de vue théorique et pratique ».

Georges Darmois, alors professeur à l'université de Nancy<sup>49</sup>. Appelé par Émile Borel pour le remplacer à partir de l'année 1924<sup>50</sup>, il enseigne à l'ISUP les cours de statistique mathématique. Pendant les années 1920, Georges Darmois se met également au courant des différents travaux de statistique réalisés à l'échelle internationale. Il découvre les statistiques mathématiques anglaises avec les travaux de Galton, de Karl Pearson, de Yule, de Spearman et de R.A. Fisher qu'il continue à étudier dans les années 1930<sup>51</sup>. En 1928, il publie le premier cours de statistique mathématique français, *Statistique mathématique*, où il affirme l'importance des modèles probabilistes<sup>52</sup>. D'après Bernard Bru, rapportant des propos de Robert Fortet, Georges Darmois aurait envisagé, dès les années 1920, de fonder en France une école de statistiques théoriques et appliquées<sup>53</sup>.

En 1928, Borel occupe encore une place institutionnelle importante sur la scène probabiliste. Une nouvelle génération, incarnée par Paul Lévy, Maurice Fréchet et Georges Darmois, a fait son apparition, encouragée pour l'essentiel par Borel, et elle est en première ligne des recherches. La création de l'Institut Henri Poincaré en 1928 concrétise le développement de la théorie des probabilités et introduit physiquement le calcul des probabilités dans le paysage mathématique. Pourtant, le milieu mathématique académique français de la fin des années 1920 n'est toujours pas favorable au calcul des probabilités. Ce domaine est encore méprisé, voire rejeté, par la communauté des mathématiciens « purs », qui ne le considèrent toujours pas « digne de faire partie de l'horizon de leur recherche et plus encore de leur enseignement »<sup>54</sup>. La création de l'IHP n'est donc pas un événement sollicité par toute une communauté ; elle est le résultat de l'activisme d'Émile Borel, joint à une volonté de la fondation Rockefeller de promouvoir des mathématiques plus appliquées, parmi lesquelles la physique mathématique et le calcul des probabilités<sup>55</sup>. Avec ce nouvel institut, Émile Borel cherche à mettre en place une structure donnant la possibilité aux mathématiciens et aux physiciens de se rencontrer, d'échanger leurs problématiques et leurs savoirs et de travailler ensemble autour d'un noyau de culture probabiliste<sup>56</sup>. L'un des principes de départ de

49. D'après HEYDE et SENETA 2001, p. 382-385, Georges Darmois fut d'abord nommé chargé de cours en 1919 à l'université de Nancy. Entre 1921 et 1933, il y fut professeur avant d'être nommé professeur à l'université de Paris à la suite de Painlevé.

50. D'après Norbert Meusnier, MEUSNIER 2004, p. 253, Borel n'assure les cours que les deux premières années.

51. D'après Bernard Bru dans HEYDE et SENETA 2001, p. 382-385.

52. Selon Norbert Meusnier. Les trois premiers chapitres de cet ouvrage sont ainsi consacrés aux fondements de la théorie des probabilités. À partir du quatrième chapitre, Darmois évoque la description des observations et leur traitement statistique.

53. Cf. HEYDE et SENETA 2001, p. 383.

54. Cf. MEUSNIER 2004, p. 254 et COLASSE et PAVÉ 2002, p. 78.

55. Georges D. Birkhoff, mandaté par l'International Education Board, était ainsi venu dès 1926 en France rencontrer les scientifiques afin de promouvoir, entre autres choses, les progrès de la physique mathématique et de « contourner l'ignorance et le mépris pour les sciences appliquées », cf. MEUSNIER 2004, p. 252. Pour un historique détaillé de la création de l'IHP, je renvoie au livre SIEGMUND-SCHULTZE 2001.

56. Cf. notamment MEUSNIER 2004, p. 252.



l'IHP est ainsi de développer le calcul des probabilités et ses applications, aussi bien celles tournées vers la physique que vers d'autres domaines, comme l'économie<sup>57</sup>.

### 6.1.3 De 1928 à la fin des années 1930

Émile Borel est en 1928 le premier directeur de l'Institut Henri Poincaré. Deux chaires dépendant de la faculté de Paris sont rattachées à l'Institut : celle de calcul des probabilités et de physique mathématique, dont Émile Borel est titulaire, et celle de physique théorique, tenue par Léon Brillouin. Un poste de maître de conférences est également rattaché à la chaire de calcul des probabilités. Borel y appelle tout d'abord Maurice Fréchet alors en poste à l'université de Strasbourg. Fréchet obtient dès la fin de 1928 un poste de professeur sans chaire à la faculté des sciences de la Sorbonne et il enseigne à l'IHP<sup>58</sup>. Il est également chargé de cours à l'École normale supérieure et le restera au moins jusqu'en 1935<sup>59</sup>. En 1933, Borel fait officiellement venir Georges Darmois à la faculté des sciences, à la mort de Paul Painlevé. Cependant, dès la première année de cours à l'IHP, en 1928-1929, Darmois est invité à faire quatre leçons en statistiques et il semble qu'il participe aux cours même avant 1933<sup>60</sup>. Bernard Bru précise que le cours de Darmois permettait d'accéder aux carrières de statisticien et d'actuaire, perspectives professionnelles qui pouvaient intéresser particulièrement les étudiants étrangers auxquels l'enseignement d'État était interdit<sup>61</sup>. C'est cet aspect qui aurait poussé deux doctorants en probabilités, Michel Loève et Wolfgang Doeblin, à suivre ce cours. À cette occasion, ils auraient trouvé une orientation de recherche.

Les cours de probabilités et de statistiques donnés dans le cadre de la faculté des sciences de Paris sont donc assurés pendant les années 1930 par Borel, Fréchet et Darmois et chacun d'entre eux contribue à promouvoir le calcul des probabilités<sup>62</sup>. Fréchet est spécialisé dans le calcul des probabilités théoriques, Darmois dans les statistiques

57. Cf. COLASSE et PAVÉ 2002, p. 78.

58. En 1933, il obtient ensuite la chaire de mathématiques générales puis en 1935 celle de calcul différentiel et intégral avant de succéder en 1941 à Borel dans la chaire de calcul des probabilités et de physique mathématique.

59. Cf. HEYDE et SENETA 2001, p. 331-334.

60. En effet, Bernard Bru dans BRU 1992, p. 7, évoquant les cours suivis par Wolfgang Doeblin à la faculté de Paris pour les années 1933-1934 et 1934-1935, cite notamment le cours de 3<sup>ème</sup> cycle « Calcul des probabilités et physique mathématique ». Bernard Bru affirme alors que ce cours « avait été créé en 1930 par Georges Darmois, [...] qu'il comprenait un enseignement de probabilités très général fait par É. Borel et un cours de statistique fait par Darmois qui cette année-là enseignait également à la place de M. Fréchet les « probabilités en chaîne » ».

61. Cf. BRU 1992, p. 8.

62. Plusieurs articles, dont BRU 1992, p. 7 et MEUSNIER 2004, évoquent le rôle de promoteur qu'a pu jouer Darmois. Ce dernier est ainsi décrit par Bernard Bru comme « un homme enthousiaste, ouvert et accueillant pour les jeunes, son cours était d'une grande modernité ». Il le redit à nouveau dans COLASSE et PAVÉ 2002, p. 84, le décrivant comme « quelqu'un de très impressionnant, avec énormément de facilités dans les contacts humains, totalement dépourvu de cette raideur qu'avait Borel ».

mathématiques<sup>63</sup>. En parallèle de ces enseignements, de nombreuses conférences de mathématiciens, français comme étrangers, données à l'IHP en probabilités et en statistiques contribuent à rendre ce domaine plus visible dans les années 1930<sup>64</sup>. Paul Lévy, comme Pólya, y donnent dès 1929 des conférences<sup>65</sup>. On peut également citer d'autres conférences données dans les années 1930 par des mathématiciens étrangers travaillant sur les probabilités en chaîne avec Maurice Fréchet : Hostinský, Kolmogoroff, Onicescu, von Mises, etc<sup>66</sup>. Ces enseignements et ces conférences semblent s'être déroulés de la même manière pendant l'essentiel des années 1930. La seconde guerre mondiale vient interrompre leur fonctionnement, et les conférences cessent. Pendant le conflit, l'enseignement est essentiellement assuré par Fréchet, Darmon étant en Angleterre pendant presque toute la période de guerre<sup>67</sup>. Ce dernier est cependant suppléé par Robert Fortet<sup>68</sup>. Borel, un temps emprisonné par les Allemands en 1941<sup>69</sup>, quitte à cette date sa chaire de la faculté des sciences de la Sorbonne, rattrapé par l'âge de la retraite à cette époque, soixante-dix ans. Maurice Fréchet prend sa succession.

Pendant les années 1930, plusieurs thèmes de probabilités sont travaillés en France. L'un d'entre eux est notamment la théorie des chaînes de Markov. D'après Bernard Bru<sup>70</sup>, l'année 1928, avec le congrès international des mathématiciens de Bologne, est une date charnière pour le développement de cette théorie en France et au niveau international. Avant 1928, la « tradition française » semble avoir totalement ignoré les travaux de Markov. C'est à l'occasion du congrès de Bologne que les mathématiciens français s'y seraient intéressés. Plusieurs conférences lui sont consacrées, dont deux qui auront un rôle particulier<sup>71</sup> : la première est prononcée par Hadamard sur le battage des cartes<sup>72</sup>, la seconde par Bohuslav Hostinský. Celle d'Hadamard fait suite à une note qu'il a publiée en 1927 aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, HADAMARD 1927. Il publie à nouveau deux autres notes sur le sujet en 1928, HADAMARD 1928b,a, dans lesquelles il interprète le mouvement des cartes battues comme la trajectoire d'un système dynamique sans cesse perturbé. Bernard Bru désigne ces trois notes

63. Cf. COLASSE et PAVÉ 2002, p. 83.

64. Les *Annales de l'I.H.P.* créées à cette même époque sont composées par l'essentiel des exposés donnés à l'Institut. Son sommaire permet de rendre compte du nombre de conférences en calcul des probabilités.

65. Bernard Bru dans BRU 1999a, p. 55 écrit ainsi que « Lévy sera, avec Pólya, conférencier probabiliste "Rockefeller" à l'Institut Henri Poincaré dès 1929 ».

66. Cf. BRU 1992, p. 9. Certaines de leurs conférences sont reproduites dans le journal *Les Annales de l'Institut Henri Poincaré*, créé à partir de 1930. Je renvoie en annexe où j'ai créé un fichier contenant les articles de ce journal portant sur le calcul des probabilités. On y trouve notamment un article d'Hostinský datant de 1937 : « Sur les probabilités relatives aux variables aléatoires liées entre elles. Applications diverses », vol.7 (2), p. 69-119.

67. Cf. COLASSE et PAVÉ 2002 pour davantage de détails sur cette période.

68. Cf. BRU et NEVEU 1998, p. 80.

69. Cf. à ce sujet MAZLIAK et SHAFER 2008.

70. Cf. BRU 2003, p. 145.

71. D'après Bernard Bru dans BRU 2003.

72. Cf. BRU 2003, p. 140.

comme les « premières références françaises de la théorie probabiliste des « opérations itérées » dans laquelle s'inscrivent un grand nombre de travaux mathématiques des années trente, notamment ceux de l'École de Fréchet à l'IHP »<sup>73</sup>.

Pourtant les contributions personnelles d'Hadamard au calcul des probabilités sont peu nombreuses et marginales dans son oeuvre. À la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, Hadamard ne « semble pas avoir pris très au sérieux la théorie cinétique des gaz ni le calcul des probabilités »<sup>74</sup>, et il n'a ensuite eu ni le goût, ni le temps de suivre leurs développements des années 1930. Bru émet l'hypothèse que les nécessités d'un renouvellement de son enseignement à l'École polytechnique auraient amené Hadamard à reprendre cette théorie. Le *Cours d'analyse* qu'il rédige au milieu des années 1920 contient ainsi un chapitre consacré à la théorie des probabilités et à la statistique et notamment un paragraphe sur le battage des cartes<sup>75</sup>.

Quant à Maurice Fréchet, en 1928, il connaît la théorie des chaînes de Markov et il est au courant des travaux et recherches d'Hostinský sur le sujet grâce à la correspondance qu'il entretient avec le mathématicien depuis les années 1919<sup>76</sup>. Il continue à l'entretenir durant les années 1930 alors qu'Hostinský, à partir de sa conférence à Bologne, s'affirme comme l'un des promoteurs de la théorie markovienne et est en contact avec de nombreux mathématiciens. Ce dernier initie les uns, les fait discuter sur des points particuliers de la théorie, met au courant les autres des différents progrès qui sont faits sur la question<sup>77</sup>. Il aura d'ailleurs des échanges avec Wolfgang Doeblin dans la période précédant sa thèse<sup>78</sup>. Dans le même temps, Maurice Fréchet se consacre à cette théorie, publie de nombreux articles et, en 1938, le premier ouvrage mathématique de synthèse sur ce sujet<sup>79</sup>. Maurice Fréchet est en outre le premier mathématicien français

73. Cf. BRU 2003, p. 149. Il signale ainsi que c'est cette étude qu'affinera et généralisera sans la connaître Wolfgang Doeblin dix ans plus tard dans sa thèse, cf. BRU 2003, p. 149.

74. Cf. BRU 2003, p. 147. D'après Bernard Bru, la raison en serait que le contenu mathématique à cette période devait lui sembler assez mince. Pourtant Bru signale l'écriture en 1906 par Hadamard d'un compte rendu au livre de Gibbs sur la mécanique statique, respectivement HADAMARD 1906 sur GIBBS 1902.

75. Cf. BRU 2003, p. 147-148.

76. Cf. HAVLOVA ET AL. 2005.

77. Cf. BRU 2003, p. 166. Au sujet de la correspondance entre Fréchet et Hostinský, je renvoie à HAVLOVA ET AL. 2005.

78. Pour une étude de l'ensemble de cette correspondance (10 lettres de Doeblin envoyées à Bohuslav Hostinský), je renvoie à l'article de Laurent Mazliak, MAZLIAK 2007; DOEBLIN 2007. La correspondance envoyée par Doeblin est conservée dans les archives de Bohuslav Hostinský conservées à l'université Masaryk à Brno, que j'ai eu l'occasion d'aller consulter pendant ma thèse.

79. Cf. HEYDE et SENETA 2001, p. 332. Un relevé rapide dans le *Zentralblatt* donne la liste ci-dessous pour les travaux de Maurice Fréchet sur le sujet des probabilités en chaînes et des processus de Markov pendant les années 1930 :

- « Sur la convergence des probabilités en chaîne », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 194 (1932) 1542-1544.
- « Remarques sur les probabilités des événements en chaîne », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 194 (1932) 1785-1786.
- « Sur la solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités en chaîne », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 195 (1932) 639-641.

à introduire la théorie des chaînes de Markov dans son enseignement, à Strasbourg puis à l'Institut Poincaré<sup>80</sup>. Il est ainsi désigné par Bernard Bru comme « "le" spécialiste français et l'un de ceux qui connaissent le mieux au monde cette théorie »<sup>81</sup>.

Il étudie également d'autres sujets en probabilités comme, par exemple, les variables aléatoires dans les espaces les plus généraux, où il utilise certains de ses résultats sur les espaces généralisés<sup>82</sup>. Il est en outre très intéressé par les travaux de Kolmogorov sur l'axiomatisation<sup>83</sup>. Il s'intéresse aussi aux différents modes de convergence des variables aléatoires et il en fait même l'objet de son premier cours de probabilités à l'IHP en 1928-1929<sup>84</sup>. Cependant, il n'explicite pas d'axiomatique ensembliste. Celle-ci sera exposée en 1933 par Kolmogorov dans ses *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Par la suite, Maurice Fréchet reste intellectuellement intéressé par l'axiomatique

- 
- « Sur le comportement de certains noyaux de Fredholm itérés indéfiniment et sur les probabilités en chaîne », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 195 (1932) 590-592.
  - « Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités en chaîne », *Bulletin de la Société mathématique de France* 60 (1932) 242-277.
  - « Les probabilités continues en chaîne », *Commentarii Mathematici Helvetici* 5 (1933) 175-245.
  - « Compléments à la théorie des probabilités discontinues "en chaîne" », *Annales de l'École normale supérieure de Pise* (2) 2 (1933) 131-164.
  - Hadamard, Jacques ; Fréchet, Maurice, 1933, « Sur les probabilités discontinues des événements "en chaîne" », *Z. Angew. Math. Mech.* 13 92-97.
  - « Sur une expression générale des noyaux itérés », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 199 (1934) 1008-1010.
  - « Sur l'allure asymptotique de la suite des itérés d'un noyau de Fredholm », *Q. J. Math.*, Oxford 5 (1934) 106-144.
  - « Sur l'allure asymptotique des densités itérées dans le problème des probabilités en chaîne », *Bulletin de la Société mathématique de France* 62 (1934) 68-83.
  - « Sur l'équation fonctionnelle de S. Chapman et sur les problèmes des probabilités en chaîne », *Atti Accad. Naz. Lincei, Rend.* (6) 20 (1934) 95-99.
  - « Sur l'équation fonctionnelle de Chapman et sur le problème des probabilités en chaîne », *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) 39 (1935) 515-540.
  - « Solution générale de l'équation de Chapman », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 200 (1935) 369-370.
  - « Une expression générale du  $n^{\text{ième}}$  itéré d'un noyau de Fredholm en fonction de  $n$  », *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées* (9) 15 (1936) 251-270.
  - « Solution générale de l'équation de Chapman-Kolmogoroff », *Ann. sc. norm. super. Pisa* (2) 5 (1936) 143-158.
  - *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités. 2<sup>e</sup> livre : Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*, in *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*. Publié par Émile Borel. Tome 1. Les principes de la théorie des probabilités. Fasc. 3. Paris : Gauthier-Villars (1938).

Pour davantage de détails sur les travaux de Fréchet et son importance dans le développement des recherches sur la théorie des chaînes de Markov, on pourra consulter BRU 2002, p. 19-23.

80. D'après Laurent Mazliak.

81. Cf. BRU 2002, p. 19-20.

82. J'ai évoqué certaines des recherches de Maurice Fréchet sur ce sujet dans la partie sur la géométrie, cf. sous-partie 4.3.3, p. 214.

83. Cf. BARBUT ET AL. 2004, p. 50.

84. Cf. BARBUT ET AL. 2004, p. 50.

et par la question des fondements. Il interagit notamment avec Jean Ville sur la théorie des collectifs, réfutant l'axiomatisation de von Mises<sup>85</sup>.

De 1928 à la fin de la seconde guerre mondiale, Paul Lévy est relativement isolé à l'École polytechnique. Il entretient cependant une correspondance étroite avec Maurice Fréchet, assiste assidûment au séminaire Hadamard et se tient au courant des travaux de probabilistes russes. Il continue également à publier de nombreux travaux de recherche en probabilités. En même temps qu'il travaille, essentiellement pendant les années 1920, sur la loi de Gauss et sur le théorème central limite, il s'intéresse à la théorie des lois stables par rapport à l'addition des variables indépendantes<sup>86</sup>. À partir de 1934, ses travaux sont dominés par ses recherches sur les processus stochastiques et en particulier sur le mouvement brownien, dans la voie ouverte par Norbert Wiener et par lui-même<sup>87</sup>. Il étudie alors la théorie des processus additifs et il entame une reconstruction du mouvement brownien, qu'il commence à décrire dans son ouvrage de 1937, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, LÉVY 1937<sup>88</sup>. Il étudie également l'arithmétique des lois de probabilités parallèlement à l'école soviétique<sup>89</sup>. Pendant la seconde guerre mondiale, il s'intéresse aussi à la théorie des intégrales stochastiques<sup>90</sup>.

En ce qui concerne plus particulièrement le domaine des statistiques, Georges Darmais en est le principal acteur et promoteur ; il est l'un des seuls mathématiciens français à les étudier dans le cadre de la recherche mathématique<sup>91</sup>. C'était déjà le

85. Cf. SIEGMUND-SCHULTZE 2006. Pour plus de développements sur ce sujet, je renvoie à la dernière sous-partie de ce chapitre où j'évoque de façon plus approfondie la thèse soutenue par Jean Ville en 1938 sur l'étude critique de la notion de collectif.

86. Le début de ses travaux sur les lois stables datent de 1919, cf. BARBUT ET AL. 2004, paragraphe 5 de l'introduction.

87. Et non pas suivant l'approche de Francis Perrin dans sa thèse sur le mouvement brownien de rotation (cf. la partie suivante, p. 375). Signalons que le début de ses travaux sur les processus stochastiques date de la décennie précédente. D'après Laurent Mazliak dans MAZLIAK 2009b, c'est en retravaillant les papiers de Gateaux sur les intégrales généralisées sur des espaces fonctionnels qu'il prend conscience du cadre naturel probabiliste du calcul de ces intégrales et qu'il s'approche de la mesure de Wiener. Laurent Mazliak précise d'ailleurs que lorsque Wiener s'entretint avec Lévy en 1922, il put voir comment les considérations de Lévy pour définir une intégrale sur la sphère infinie-dimensionnelle sont précisément ce qu'il pouvait utiliser pour définir son espace différentiel et pour construire la mesure de Wiener du mouvement brownien.

88. Pour une histoire du mouvement brownien, je renvoie à l'article de Jean-Pierre Kahane, KAHANE 1998.

89. Cf. LELOUP 2004, p. 41-46, BARBUT ET AL. 2004.

90. Cf. la thèse de Bernard Locker LOCKER 2001 où ce dernier développe le sujet. Rémi Catellier et Laurent Mazliak évoquent également Paul Lévy dans leur article CATELLIER et MAZLIAK 2010.

91. D'après Michel Armatte dans ARMATTE 2001, Maurice Fréchet s'intéresse également aux statistiques mais de façon moins approfondie. Ainsi dans ARMATTE 2001, Michel Armatte présente la « facette Fréchet statisticien » en prenant comme fil conducteur la campagne qu'il a menée entre 1934 et 1936 à l'Institut international de statistique contre les usages abusifs du coefficient de corrélation. Dans l'article sur Maurice Fréchet écrit par Bernard Bru et S. Hertz, HEYDE et SENETA 2001, p. 331-334, ces derniers évoquent quelques résultats de Fréchet en statistiques sur l'inégalité unidimensionnelle de Cramer-Rao, en économétrie, etc., mais ils ne situent pas les statistiques au centre de l'œuvre mathématique de Fréchet.

cas dans les années 1920 et c'est encore le cas dans les années 1930<sup>92</sup>. Ainsi Georges Darmois apporte-t-il pendant les années 1930 et 1940 d'importantes contributions à l'inégalité générale de Cramér Rao, à la statistique stellaire et en analyse factorielle<sup>93</sup>. Bernard Bru dépeint Georges Darmois comme un mathématicien à la marge du milieu des probabilités en France : il cherche à promouvoir les statistiques et notamment les statistiques anglaises alors que les probabilistes français sont « tièdes » à leur égard<sup>94</sup>. De plus, si Georges Darmois est, dès la première année de l'IHP, invité à faire quatre leçons en statistique, il va rester, pendant quelque temps, l'un des seuls intervenants sur ce thème. Les premiers conférenciers étrangers invités sont en effet surtout des scientifiques en rapport direct avec les questions de physique. Dans les *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, fondées en 1930 pour recueillir les conférences et mémoires de calcul des probabilités et physique théorique, il faut attendre 1932 et le tome 3, numéro 2, pour voir le premier article de statistique. Il est écrit par Georges Darmois et porte sur *La méthode statistique dans les sciences d'observation*. Dans le tome 3, numéro 3, paru en 1933, se trouve un article du statisticien scandinave : Alf Guldberg, *Les fonctions de fréquence discontinues et les séries statistiques*. Les suivants apparaissent en 1935 et ils sont écrits par Gumbel et Guldberg. Jusqu'en 1939<sup>95</sup>, on trouve parmi les autres auteurs des mathématiciens qui publient sur des thèmes de statistiques des mathématiciens, comme von Mises (en 1936) ou Tricomi (en 1938)<sup>96</sup>.

Au cours des années 1930, l'Institut Henri Poincaré devient ainsi un pôle attracteur pour ceux qui veulent étudier les probabilités et il s'organise, dans ce domaine, autour des personnalités de Maurice Fréchet et de Georges Darmois. Dans le même temps, Paul Lévy continue à enseigner à l'École polytechnique.

C'est dans ce contexte que les futurs doctorants en calcul des probabilités de la fin des années 1930, dont les thèses font partie de mon corpus, suivent leur formation mathématique. Cinq d'entre eux sont normaliens (Dugué, Malécot, Ville, Fortet et Blanc-Lapierre). Ils ont donc la possibilité de suivre des cours auprès de Maurice Fréchet, également à l'École normale supérieure. Différents articles de l'historiographie

92. D'après Bernard Bru dans HEYDE et SENETA 2001, p. 383 et COLASSE et PAVÉ 2002.

93. Cf. HEYDE et SENETA 2001, p. 383. Daniel Dugué mentionne, en analyse factorielle, les contributions de Georges Darmois aux extensions de la théorie de Spearman sur les liaisons stochastiques entre variables aléatoires, DUGUÉ 1961.

94. Bernard Bru écrit ainsi, en se fondant sur des propos de Robert Fortet : « Thus Georges Darmois swam against the French probabilistic current between 1930 and 1950 ; the opinion of French probabilists on British researchers was lukewarm, and they sought “to take inspiration from physics rather than from economics or sociology” as Fortet puts it in his note of 1960 ». Pour d'autres renseignements sur Georges Darmois, je renvoie également à ROY 1961. Rémi Catellier et Laurent Mazliak ont également étudié les intérêts mathématiques de Darmois dans CATELLIER et MAZLIAK 2010.

95. Aucun article n'est publié dans les *Annales de l'Institut Henri Poincaré* pendant la seconde guerre mondiale.

96. Laurent Mazliak dans MAZLIAK 2008 mentionne également parmi les conférenciers le mathématicien scandinave Steffensen.

signalent que ces doctorants ont suivis certains cours de Fréchet ou de Darmois. J'ai déjà signalé la présence de Wolfgang Doeblin et de Michel Loève aux cours de Calcul des probabilités et physique mathématique de l'IHP et notamment aux cours de l'option statistique assuré par Darmois<sup>97</sup>. D'après l'article sur Georges Darmois, HEYDE et SENETA 2001, p. 383, Gustave Malécot aurait également assisté au cours de Darmois. Robert Fortet apprend également depuis l'année 1934-1935 et sa dernière année à l'École normale supérieure « le calcul des probabilités de Fréchet et Hostinský »<sup>98</sup>. Même si, à la fin des années 1930, d'après Bernard Bru, il est encore mal vu de soutenir une thèse de probabilités à la Sorbonne, le nombre des doctorats soutenus dans ce domaine traduit son émergence sur la scène mathématique, influencée par Fréchet et Darmois, dont les étudiants ont suivi les cours.

De plus, comme l'ont indiqué Norbert Meusnier et Bernard Bru<sup>99</sup>, les étudiants en probabilités et futurs doctorants participent au développement de ce domaine. Ainsi, à partir de 1936, Wolfgang Doeblin et Jean Ville créent et animent un groupe de travail très actif où sont exposés et débattus les résultats récents les plus marquants. Ce groupe de travail deviendrait ensuite très rapidement le « Séminaire Borel », séminaire de probabilités de la faculté des sciences de Paris<sup>100</sup>. Il réunit en plus des deux doctorants fondateurs « Darmois, Fréchet et Lévy sans doute, mais aussi tous les jeunes, Fortet, Loève, Malécot, les étrangers de passage », etc. Bernard Bru qualifie ce séminaire de très exceptionnel : il reconnaît qu'il est moins connu que le « Séminaire Julia-Bourbaki »<sup>101</sup> ou que le « Séminaire Hadamard », mais il le compare au « Séminaire de probabilités de Moscou fondé par Khinchin et Kolmogorov dans les années 1930 ». Parmi les premiers sujets traités figure la question des fondements du calcul des probabilités, qu'aborde Ville dans sa thèse. Bru précise qu'à l'occasion de cette séance les « jeunes du Séminaire Borel » décident d'opter de manière définitive pour le point de vue axiomatique avec l'axiomatique de Kolmogorov, s'opposant ainsi aux interprétations et aux points de vue de Borel et Lévy<sup>102</sup>. En 1938, d'après Bru, le Séminaire Borel discute notamment de la théorie des processus de Markov continus et de sa construction<sup>103</sup>.

Le calcul des probabilités est ainsi décrit dans l'historiographie comme un domaine qui se développe et émerge en France sur la scène mathématique au cours de la première

---

97. Plus précisément, Doeblin a suivi les enseignements de Darmois en statistique et son cours sur « les probabilités en chaîne », Darmois remplaçant Fréchet l'année où Doeblin le suit, cf. BRU 1992, p. 6-7.

98. Cf. BRU 2002, p. 20 et BLANC-LAPIERRE et FERRAND 1999.

99. Cf. respectivement MEUSNIER 2004, p. 256 et BRU 1992, p. 12.

100. D'après Bernard Bru dans BRU 2002, p. 24-26.

101. Cf. BRU 2002, p. 24. Le Séminaire Julia est créé en 1933 et animé par les premiers membres du groupe Bourbaki, promoteurs également des sujets de recherche nouveaux en algèbre, théorie des nombres, etc.

102. Cf. BRU 2002, p. 25. Bru fait d'ailleurs le rapprochement à cette occasion avec le choix de Bourbaki pour point de vue axiomatique en mathématiques.

103. Cf. BRU 2002, p. 26-27.

moitié du XX<sup>ème</sup> siècle. Borel en est tout d'abord le principal artisan. Il arrive peu à peu à rassembler autour de lui une nouvelle génération de mathématiciens, Fréchet et Darmon, auxquels il faut rajouter Paul Lévy en poste à l'École polytechnique. Ces derniers contribuent au développement théorique des probabilités et à la production mathématique de recherche internationale dans ce domaine. Ils arrivent également à attirer autour d'eux un nombre croissant d'étudiants au cours des années 1930, parmi lesquels les auteurs de mon corpus<sup>104</sup>.

## 6.2 Une unique thèse dans l'immédiate après-guerre : une vision « borélienne » des probabilités, la thèse de Robert Deltheil

D'après le bilan historiographique précédent, en 1920, le calcul des probabilités en France est entièrement dominé par Émile Borel, seul « patron mathématique »<sup>105</sup> de l'époque à investir le domaine. C'est dans ce contexte que Robert Deltheil présente sa thèse à la faculté des sciences de Paris, *Sur la théorie des probabilités géométriques*, 1920. Son doctorat s'inscrit dans la conception du domaine de Borel : il n'est pas uniquement consacré à une étude théorique sur les probabilités, à des questions de convergences de suites de variables aléatoires, ou à des questions sur les fondements. La première partie aborde d'un point de vue théorique la question des probabilités géométriques. Dans la seconde partie, comme l'écrit Borel dans le rapport de thèse, Robert Deltheil applique directement ses résultats théoriques à la résolution de « problèmes précis » que Borel qualifie également de « problèmes concrets ». Painlevé insiste sur ce point dans le rapport de soutenance.

Robert Deltheil aborde ainsi le même sujet de probabilités que Borel dans son article de 1905 « Remarques sur certaines questions de probabilités »<sup>106</sup>. Cependant, si Borel, en 1905, s'attache à démontrer l'utilité de sa théorie de la mesure et de la théorie de l'intégration de Lebesgue, ce n'est pas sur ce point que s'attarde Deltheil. À aucun moment dans son mémoire il ne mentionne explicitement ces deux théories. Il parle cependant de « mesures des ensembles les plus simples de droites et de plans

104. Outre dans les thèses d'État, cet essor se traduit également au niveau des doctorats d'Université. Plusieurs d'entre eux, sur des sujets de probabilités, sont ainsi soutenus à la fin des années 1930, parmi lesquels ceux de Geza Kunetz et d'Ervin Feldheim, cf. BRU 1992. Les deux thèses sont les suivantes : Kunetz, Geza, 1937, *Sur quelques propriétés des fonctions caractéristiques*, doctorat d'Université, Paris et Feldheim, Ervin, 1937, *Études de la stabilité des lois de probabilité*, doctorat d'Université, Paris. On peut également rajouter les mémoires d'Ali Afzalipour, 1936, *Contribution à l'étude de la théorie mathématique de la démographie*, doctorat d'Université, Paris et B. Chait, 1937, *Le mouvement cyclique ou le mouvement non cyclique et l'interdépendance des marchés*, doctorat d'Université, Paris, mais Bernard Bru n'évoque pas ces étudiants.

105. Cf. LELOUP et GISPERT prévu pour 2009.

106. Cf. BOREL 1905.



que l'on peut définir de façon géométrique »<sup>107</sup>. On peut penser qu'implicitement il utilise les résultats de ces deux théories. De plus, dans l'ouvrage qu'il écrit six ans plus tard, *Probabilités géométriques*, fondé sur sa thèse et sur les *Leçons* qu'il a professées au Collège de France, il y fait, à plusieurs reprises, référence et reconnaît que les probabilités géométriques se rattachent à la théorie de la mesure des ensembles<sup>108</sup>.

En 1920, d'après Robert Deltheil<sup>109</sup>, la théorie des probabilités géométriques est connue « par de curieuses propositions particulières plutôt que par des méthodes générales ». Le doctorant se propose d'en faire tout d'abord une étude systématique et théorique qui lui permet ensuite de résoudre les questions les plus générales. Le premier chapitre de son mémoire est ainsi consacré à l'énoncé du problème et à sa résolution dans un cadre général.

Deltheil considère  $E$  et  $E'$  deux « ensembles continus d'éléments géométriques de même espèce tels que chaque élément de  $E'$  appartienne à  $E$ . [Son] problème est le suivant : un élément étant pris au hasard, quelle est la probabilité pour qu'il appartienne à  $E'$  ? »

Deltheil, comme Borel dans BOREL 1905, affirme partir de remarques formulées par Henri Poincaré dans le chapitre de son cours consacré aux probabilités géométriques. La réponse au problème ci-dessous est ainsi le rapport des valeurs de l'intégrale :

$$J = \underbrace{\int \dots \int}_n F(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

étendue à  $E'$  et à  $E$  où  $x_1, x_2, \dots, x_n$  représentent les paramètres définissant un élément de l'ensemble. La fonction  $F$  contient les « conditions rendant possibles la définition de  $J$  » et elle est assujettie, d'après Poincaré, à être positive ou nulle. Deltheil considère plus précisément la « probabilité élémentaire »<sup>110</sup> :

$$dJ = F(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Il s'intéresse plus spécifiquement aux problèmes de probabilités géométriques dont le résultat n'est pas indépendant de la probabilité élémentaire et donc de la fonction  $F$  utilisée pour les résoudre<sup>111</sup>. Il regarde ainsi les problèmes de probabilités géométriques tels que l'aiguille de Buffon, et surtout ceux de Crofton, Barbier et Sylvester de la seconde moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle, auxquels il va faire explicitement référence<sup>112</sup>.

107. Cf. DELTHEIL 1920, p. 22.

108. Cf. DELTHEIL 1926, p. 13-14. Il y fait référence à d'autres reprises comme DELTHEIL 1926, p. 32, p. 81.

109. Cf. DELTHEIL 1920, p. 1.

110. Cf. DELTHEIL 1920, p. 2.

111. Ainsi, Deltheil ne se consacre pas aux problèmes comme celui de la position des petites planètes sur le zodiaque traitées par Poincaré dans POINCARÉ 1907, mais il les évoque cependant très brièvement, DELTHEIL 1920, p. 4-5.

112. Pour un historique des problèmes de probabilités géométriques, je renvoie à SENETA ET AL. 2001.

Pour ce type de problèmes, la probabilité élémentaire est imposée par la condition suivante<sup>113</sup> : « le résultat du calcul doit rester indépendant d'un déplacement arbitraire de la figure ». Deltheil considère donc ensuite un groupe  $G$  de transformations des  $n$  variables et recherche les fonctions  $F$  telles que l'intégrale de la probabilité élémentaire  $dJ$  sur deux domaines équivalents par  $G$  garde la même valeur<sup>114</sup>. L'adoption d'un tel élément différentiel  $dJ$  comme probabilité élémentaire lui permet de définir « par rapport au groupe  $G$  les problèmes de probabilités géométriques sur les éléments  $(x_1, \dots, x_n)$  »<sup>115</sup>. On peut en fait interpréter la démarche de Deltheil comme la détermination d'éléments infinitésimaux d'aires ou de volumes.

Toute la suite du premier chapitre de la thèse est consacrée à la recherche des fonctions  $F$  qui permettent à l'élément différentiel de rester inchangé sous l'action d'un groupe de transformations continu et fini<sup>116</sup>. Il ne s'agit plus alors d'un problème de probabilités, mais d'un problème de calcul différentiel et de géométrie<sup>117</sup>. Deltheil fait alors référence aux règles du calcul symbolique d'Élie Cartan, tout en mentionnant que les formules ont été établies par Poincaré par un calcul de jacobien<sup>118</sup>.

Dans un deuxième temps, il applique ses résultats théoriques à certains groupes de transformation de la géométrie euclidienne et de la géométrie cayleyenne en 2 ou 3 dimensions<sup>119</sup>. En appliquant les formules qu'il a énoncées dans son premier chapitre, il retrouve dans son deuxième chapitre les probabilités élémentaires relatives aux problèmes posés sur les droites dans le plan et sur les droites et les surfaces dans l'espace. De tels résultats ont déjà été énoncés notamment par Crofton dans la deuxième moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle<sup>120</sup>. Deltheil fait d'ailleurs explicitement référence à ce mathématicien<sup>121</sup>. Il applique ensuite ces premières formules à la résolution de problèmes déjà énoncés et étudiés au XIX<sup>ème</sup> siècle par Crofton, et aussi, par Barbier et par Sylvester. Il « reprend [ainsi] les probabilités élémentaires » dont il vient de donner la formule pour

113. Cf. DELTHEIL 1920, p. 5.

114. Robert Deltheil donne la définition suivante pour deux domaines équivalents, DELTHEIL 1920, p. 6 : « deux domaines de l'espace sont dits *équivalents* vis-à-vis du groupe  $G$  s'il existe au moins une transformation du groupe qui les amène à coïncider ».

115. Dans DELTHEIL 1926, p. 16, Robert Deltheil va plus loin : il considère  $dJ$  comme une « mesure définie vis-à-vis de  $G$  ».

116. Deltheil restreint d'ailleurs son étude au cas des groupes transitifs qui possède un invariant intégral unique. En effet, comme il le remarque, si l'élément différentiel  $dJ$  reste inchangé sous l'action du groupe différentiel, l'intégrale  $J = \underbrace{\int \dots \int}_n F(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$  est un invariant intégral

d'ordre  $n$  pour le groupe  $G$ , DELTHEIL 1920, p. 7.

117. Deltheil consacre en outre une partie de son chapitre à reformuler le problème en considérant les types de groupes à une variable donnés par Lie, DELTHEIL 1920, p. 13-16. Il mentionne alors l'ouvrage *Transformationengruppen*, tome 3, de Lie et Engel.

118. Cf. DELTHEIL 1920, p. 7-8.

119. Comme il l'annonce dès son introduction, DELTHEIL 1920, p. 2 et p. 17.

120. Par exemple dans CROFTON 1885, d'après SENETA ET AL. 2001.

121. Cf. DELTHEIL 1920, p. 19.

les « appliquer à la mesure des ensembles les plus simples de droites et de plans que l'on peut définir de façon géométrique »<sup>122</sup> : par exemple, les ensembles de droites du plan ou des plans de l'espace qui coupent un segment, l'ensemble des plans de l'espace qui coupent une surface. Il les applique encore au problème de l'aiguille de Buffon<sup>123</sup> et à la solution de Barbier<sup>124</sup>.

Ces premiers problèmes annoncent les « problèmes précis »<sup>125</sup> que Deltheil étudie dans la suite de son travail. Le premier d'entre eux concerne la « probabilité pour que la distance de deux points pris au hasard à l'intérieur d'une sphère de rayon  $R$  de l'espace à  $m$  dimensions soit moindre que  $a$  »<sup>126</sup>. Deltheil approfondit ici une question déjà abordée par Émile Borel dans BOREL 1918. Borel y affirmait<sup>127</sup> que « pour une aire (un volume) de forme quelconque, le calcul du nombre moyen des segments intérieurs de dimensions inférieures à  $l$  est un problème de calcul intégral qui peut être assez compliqué ». Borel ne donne d'ailleurs que les « résultats qui [lui] ont paru les plus simples et les plus intéressants parmi ceux [qu'il a] calculés », c'est-à-dire la probabilité pour que la distance de deux points intérieurs à un cercle ou à une sphère ou à un carré de côté  $l$  soit inférieur à  $a$ <sup>128</sup>.

Deltheil utilise pour résoudre ces « problèmes précis » une méthode différente de celles qu'il a employée dans les parties précédentes de son mémoire<sup>129</sup>. Elle est fondée sur une approche différentielle qui permet à Deltheil de retrouver des formules déjà établies par Crofton dans CROFTON 1885. Cette méthode a pour but d'éviter des « calculs d'intégrales multiples, souvent inextricables, auxquels on se trouve directement conduit dès que le problème est posé »<sup>130</sup>. Deltheil se place, dans le cas général, dans un espace pour lequel « un système de variables équiprobables a été déterminé »<sup>131</sup>. Il considère une figure  $F$ <sup>132</sup> formée de  $n$  points pris au hasard indépendamment les uns des autres

122. Cf. DELTHEIL 1920, p. 22.

123. Pour un rappel historique du problème de l'aiguille du Buffon, je renvoie à SENETA ET AL. 2001 et aussi à BRU 2003.

124. En ce qui concerne le chapitre sur la géométrie cayleyienne, Deltheil ne propose aucune application de ses résultats théoriques. Il considère du point de vue de la probabilité élémentaire plusieurs groupes de transformations tels que le groupe projectif à trois paramètres d'une conique non dégénérée ou, en géométrie réglée, le groupe projectif à dix paramètres d'un complexe linéaire.

125. que Borel qualifie également de « problèmes concrets » dans le rapport.

126. Cf. DELTHEIL 1920, p. 42.

127. Cf. BOREL 1918, p. 119.

128. Cf. BOREL 1918, p. 119.

129. Cette méthode n'est d'ailleurs pas celle qu'utilise Borel dans BOREL 1918. Même s'il n'explicite pas cette dernière, elle est fondée sur le calcul d'intégrales.

130. D'après Deltheil, cf. DELTHEIL 1926, p. 38.

131. Cf. DELTHEIL 1920, p. 42. Autrement dit, il se place dans un espace muni d'un groupe de transformations pour lequel il a déterminé une probabilité élémentaire invariante sous l'action du groupe.

132. Je reprends ici les notations utilisées par Deltheil même si elles peuvent prêter à confusion avec la fonction  $F$  relative à la probabilité élémentaire  $dJ$ .

dans un certain domaine ( $D$ ) dont il suppose le volume  $V$  fini. Il exprime la probabilité que la figure ( $F$ ) satisfasse à certaines conditions sous la forme :

$$P = \frac{U}{V^n}$$

où  $U$  exprime les cas favorables. Il fait ensuite subir une variation infiniment petite aux données du problème : aux conditions imposées (ce qui fait varier uniquement  $U$ ) ou/et au domaine ( $D$ ) ce qui fait varier  $U$  et  $V$ .

Pour le premier problème<sup>133</sup>, il propose tout d'abord une solution où il fait varier  $U$  et  $V$  suite à un accroissement  $dR$  du rayon de la sphère<sup>134</sup>.

Dans un deuxième temps, il propose une solution plus générale où il se « place du point de vue du Calcul fonctionnel ». Il considère «  $P$  comme une fonction de l'hypersurface qui limite le domaine ( $D$ ) » et regarde les problèmes où les conditions imposées à la figure  $F$  sont indépendantes du domaine  $D$ <sup>135</sup>. Il fait ensuite varier le domaine  $D$  en un domaine  $D'$  qui le contient et dont le volume devient  $V + \Delta V$ . Il obtient alors la formule donnant la partie principale de la variation  $\Delta P$  qui en résulte dans le développement de  $\Delta P$  suivant les puissances de  $\Delta V$  :

$$\delta P = n(P - P_1) \frac{\delta V}{V}$$

où  $P_1$  désigne la probabilité de réalisation des conditions du problème par une figure  $F$  formée de  $n - 1$  points pris au hasard dans  $D$  et de 1 point pris au hasard dans  $D'' = D' \setminus D$  de volume  $\delta V$ .

Deltheil mentionne que cette formule est déjà « indiquée » dans CROFTON 1885. Il énonce alors la catégorie de problèmes où elle peut être appliquée utilement : les problèmes où on peut construire un domaine  $D'$  sans que  $P$  soit changé, ce qui implique que  $P = P_1$  et le problème est ramené au calcul de  $P_1$ .

Il applique ensuite cette formule au deuxième problème particulier qu'il regarde, et que Deltheil désigne comme le problème du quadrilatère convexe de Sylvester, « historiquement, le premier problème de probabilités géométriques qui ait été posé sous une forme générale depuis le problème de l'aiguille »<sup>136</sup>. Son énoncé est le suivant : « étant donné un domaine convexe dans le plan, quelle est la probabilité pour que quatre points pris au hasard dans ce domaine forment un quadrilatère convexe ? » Deltheil se propose de donner des solutions nouvelles à ce problème, déjà étudié par Sylvester et Crofton dans la deuxième moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle, notamment en discutant du résultat suivant

133. Sur la probabilité pour que la distance de deux points pris au hasard à l'intérieur d'une sphère de rayon  $R$  de l'espace à  $m$  dimensions soit moindre que  $a$ .

134. Cf. DELTHEIL 1920, p. 43.

135. Il appelle de telles conditions les conditions « intrinsèques », Cf. DELTHEIL 1920, p. 47.

136. Cf. DELTHEIL 1920, p. 48. Signalons que Borel le mentionne également dans le rapport. Étant donnée la brièveté du rapport, la mention de ce problème indique son importance parmi les problèmes de probabilités.

la forme du quadrilatère considéré<sup>137</sup>. Il utilise alors la formule précédente et il se sert de considérations géométriques pour le calcul d'aires moyennes de triangles.

Dans le dernier temps de son travail, Deltheil approfondit la considération de la probabilité  $P$  d'un point de vue du calcul fonctionnel : il se borne au cas où le domaine  $D$  a deux dimensions et comprend les points intérieurs à une courbe  $\mathcal{C}$ <sup>138</sup>. La probabilité  $P$  peut alors être interprétée comme une fonction de ligne au sens de Volterra<sup>139</sup>. Deltheil en déduit alors des résultats sur la notion de *dérivée* de  $P$  au sens de Volterra, de dérivée seconde de  $P$  au sens du calcul fonctionnel<sup>140</sup> et il trouve des conditions d'extremum pour la probabilité  $P$  en fonction des domaines  $D$  considérés.

Tout au long de sa thèse, Deltheil étudie ainsi des déplacements géométriques, des transformations géométriques, sur lesquels il a déjà travaillé avec Émile Borel. Le doctorant fait en effet référence, à plusieurs reprises, à la monographie *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, BOREL 1914a<sup>141</sup>. Toutes ces références portent plus précisément sur la première partie de ce livre, qu'il a lui-même rédigée d'après quelques leçons faites par Borel à la Sorbonne en décembre 1912 et janvier 1913<sup>142</sup>, et dans laquelle il traite notamment des déplacements élémentaires en géométrie euclidienne. La thèse de Deltheil s'inscrit ainsi dans une direction de recherche influencée par Borel, elle est directement liée aux travaux de ce dernier. Il apparaît également probable que ce soit Borel qui ait initié Deltheil aux probabilités géométriques. Borel admire les méthodes de Barbier et il les a reprises dans ses livres en probabilités, notamment dans ses *Éléments de probabilités*, BOREL 1909<sup>143</sup>. Et, comme je l'ai montré précédemment, Deltheil reprend la méthode de Barbier dans la solution du problème de l'aiguille de Buffon. Le doctorant se fonde ainsi sur des recherches de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, comme celles de Crofton et Sylvester, qui n'ont fait l'objet d'aucun développement. La présentation qu'il en fait est la même que celle proposée par Poincaré et Borel avant la première guerre mondiale, ce qui correspond d'ailleurs au moment où Deltheil commence à élaborer sa thèse, d'après André Fontaine<sup>144</sup>.

En outre, Deltheil accorde une grande importance dans son doctorat à la résolution de problèmes précis : plus de la moitié de son mémoire y est ainsi consacrée. L'influence de Borel est ici encore plus directe que dans le choix des méthodes. Même si les domaines d'applications de ses résultats ne sont pas clairement explicités, Deltheil

137. Cf. DELTHEIL 1920, p. 51.

138. Cf. DELTHEIL 1920, p. 56.

139. Cf. DELTHEIL 1920, p. 56.

140. Cf. DELTHEIL 1920, p. 63.

141. Cf. par exemple DELTHEIL 1920, p. 27, p.45.

142. Cf. BOREL 1914a, préface p.VII.

143. Cf. SENETA ET AL. 2001, p. 507. En France, les méthodes de Barbier ont d'abord été enseignées à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle dans le cours de Poincaré à la Sorbonne, puis exposées dans le *Calcul des probabilités* de Poincaré de 1896 et dans sa réédition en 1912. Deltheil cite d'ailleurs cet ouvrage.

144. Cf. FONTAINE 1974, p. 68. Deltheil aurait ainsi commencé à préparer sa thèse dès l'année 1913-1914.

mentionne à plusieurs reprises le rôle qu'ils peuvent jouer dans les théories moléculaires<sup>145</sup>. Les références au livre de Borel *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, BOREL 1914a, donnent une indication de l'application qui peut être faite de ces résultats. En effet, le but de cet ouvrage est de développer les interprétations physiques de ces théories géométriques<sup>146</sup>. D'ailleurs Painlevé le souligne dans le rapport de soutenance du doctorat. Il y écrit que « la thèse de M. Deltheil soulève des questions d'une haute portée philosophique et qui trouvent en même temps de remarquables applications dans la physique statistique moderne ». Ce lien que fait Painlevé entre la thèse de Deltheil et les problèmes de physique statistique intègre encore davantage le travail du doctorant dans un travail formaté par la conception de Borel du domaine des probabilités. Depuis son article de 1906 sur l'application des probabilités à la physique statistique, BOREL 1906b, Borel a cherché à développer les applications entre ces deux domaines<sup>147</sup>.

La thèse de Deltheil illustre, d'une certaine façon, la place des probabilités du début des années 1920 : un domaine qui n'est pas autonome dans les sciences mathématiques. Le doctorant étudie des problèmes de probabilités géométriques en utilisant des notions et des résultats d'autres domaines des mathématiques comme la géométrie ou le calcul fonctionnel. On peut en voir une illustration dans le jugement formulé sur la thèse de Deltheil par Jean-Baptiste Hiriart-Urruty et Henri Caussinus<sup>148</sup> :

« Les travaux de R. Deltheil sur les probabilités géométriques sont extrêmement intéressants à bien des égards. Au plan scientifique et épistémologique, ils mettent une large culture mathématique au service d'une thématique (les probabilités continues) qui cherche sa voie, et surtout, juste avant l'axiomatisation de Kolmogorov, ils sont typiques d'une démarche dans laquelle l'élaboration mathématique vaut par les résultats concrets qu'elle donne ; en d'autres termes, Robert Deltheil fait du calcul des probabilités et pas seulement des probabilités. Utilisant essentiellement des arguments d'invariance par des groupes de transformation, il résout plusieurs problèmes, soit de géométrie pure, soit très liés à des questions de physique quantique. »

Les liens entre les travaux de Deltheil et Borel que la thèse de Deltheil met en évidence existent également au-delà des travaux mathématiques. Deltheil est ainsi décrit comme un « élève direct d'Émile Borel », et comme l'un des seuls, par Bernard Bru et Jean-Baptiste Hiriart-Urruty et Henri Caussinus<sup>149</sup>. En outre les relations entre

145. Cf. par exemple DELTHEIL 1920, p. 45.

146. D'après Borel dans BOREL 1914a, préface p.VII.

147. Cf. BRU 1999b. Certaines de ses publications, comme BOREL 1914a, en témoigne également.

148. Cf. HIRIART-URRUTY et CAUSSINUS 2005, p. 95.

149. Cf. respectivement BRU 1999b, p. 15 et HIRIART-URRUTY et CAUSSINUS 2005, p. 94. Ils citent pour étayer leur propos la préface de l'ouvrage écrit en 1931 par les deux mathématiciens BOREL et

les deux mathématiciens se prolongent après la soutenance de thèse. Ils collaborent pour deux ouvrages, *Probabilités Erreurs*, BOREL et DELTHEIL 1923, et *La géométrie et les imaginaires*, BOREL et DELTHEIL 1931. Deltheil écrira également deux fascicules pour le *Traité du calcul des probabilités et de ses applications* d'Émile Borel chez Gauthier-Villars : *Probabilités géométriques*, DELTHEIL 1926<sup>150</sup> et *Erreurs et moindres carrés*, DELTHEIL 1930. Mis à part ces publications, Deltheil n'a que peu travaillé sur le sujet des probabilités. Nommé maître de conférences puis professeur à la faculté de Toulouse dans les années 1920, il s'oriente dans les années 1930 vers une carrière administrative<sup>151</sup>.

Excepté Robert Deltheil, un seul autre étudiant est désigné par Bernard Bru et par Jean-Baptiste Hiriart-Urruty et Henri Caussinus comme un élève de Borel. Il s'agit de l'étudiant normalien Francis Perrin, fils de Jean Perrin. Il soutient, en 1928, une thèse de sciences mathématiques<sup>152</sup>, classée en « physique mathématique ». Celle-ci ne fait donc pas partie du corpus des thèses de probabilités étudiées en principe dans ce chapitre, mais je la mentionne brièvement car elle éclaire le devenir du point de vue de Borel. Francis Perrin y fait une étude mathématique rigoureuse du mouvement brownien de rotation d'une sphère avant d'en déduire des généralisations<sup>153</sup>. Il propose deux méthodes différentes pour étudier ce mouvement brownien. La première consiste à généraliser l'équivalence entre les lois du mouvement brownien de rotation et les lois de la diffusion ou de la conductibilité thermique, puis à intégrer les équations différentielles obtenues par des développements en séries de fonctions fondamentales (par exemple en série de polynômes de Legendre)<sup>154</sup>. La seconde repose sur la résolution de l'équation fonctionnelle intégrale exprimant l'indépendance et l'équivalence des déplacements ou des rotations successifs, les distributions de probabilités initiales étant supposées « ra-

---

DELTHEIL 1931, où Borel parle de « M. Deltheil [...] l'un de [ses] plus brillants élèves à l'École normale supérieure » ainsi que les remerciements qu'adresse Deltheil à Borel à la fin de son introduction, DELTHEIL 1920, p. 3. Il y remercie son « maître, M. Borel qui [lui] a indiqué le sujet de ces recherches et n'a cessé de s'intéresser à leurs progrès ».

150. Ce fascicule que j'ai déjà cité à plusieurs reprises reprend et complète les travaux présentés dans sa thèse, que Deltheil avait déjà retravaillés pour son cours Peccot donné au Collège de France en 1922-1923 (cf. la préface de DELTHEIL 1926 et HIRIART-URRUTY et CAUSSINUS 2005, p. 94).

151. Cf. HIRIART-URRUTY et CAUSSINUS 2005; FONTAINE 1974. Deltheil est nommé maître de conférences à Toulouse à la faculté des sciences de Toulouse dès 1919, il y devient titulaire de la chaire de mathématiques générales en 1921, avant d'en devenir le doyen en 1930. En 1936 puis en 1937, il devient successivement recteur de l'Académie de Caen, puis de l'Académie de Toulouse.

152. *Étude mathématique du mouvement brownien de rotation d'une sphère*.

153. D'après Borel dans le rapport.

154. Cf. PERRIN 1928a, p. 1-2 et PERRIN 1928a, p. 10. Par exemple, le « mouvement brownien d'ensemble de la sphère autour de son centre est représentable par une diffusion sur une hypersphère à trois dimensions ». De plus l'équivalence avec les lois de diffusion implique que la fonction de probabilité  $f(\omega, t)$  (telle qu'un rayon déterminé de la sphère a la probabilité  $f(\omega, t)d\Omega$  de se trouver au bout du temps  $t$  dans un angle solide  $d\Omega$  faisant avec sa direction initiale un angle  $\omega$ ) satisfait à l'équation de la diffusion sur la sphère  $\Sigma$ , cf. PERRIN 1928b, p. 7.

massées autour de l'origine »<sup>155</sup>. Francis Perrin applique ensuite ses résultats, pour l'essentiel, à des « problèmes qui se posaient naturellement aux physiciens »<sup>156</sup>, tout en ne négligeant pas certaines applications en mathématiques<sup>157</sup>. Il étudie notamment des questions sur « la dépolarisation plus ou moins grande des lumières de fluorescence et la détermination correspondante des durées d'émission lumineuse »<sup>158</sup>, c'est-à-dire des questions qui interviennent dans le cadre de sa thèse de sciences physiques qu'il soutient en 1929 à la faculté des sciences de Paris<sup>159</sup>.

Sa thèse prolonge en fait des travaux d'Einstein de 1906, qui donnaient les lois élémentaires de la théorie du mouvement brownien de rotation. Ces travaux ont ensuite donné lieu à des recherches de Jean Perrin sur le mouvement brownien et les atomes en 1909, qui lui valurent le prix Nobel en 1926<sup>160</sup>.

La thèse de Perrin se situe à l'interface des mathématiques et de la physique. De même, Francis Perrin est lui-même parfois décrit comme un probabiliste<sup>161</sup>, mais il est surtout un physicien. C'est d'ailleurs ainsi que le présente Borel, disant de lui qu'il est un « physicien qui sait utiliser les ressources les plus variées de l'analyse mathématique »<sup>162</sup>. De plus, après sa thèse, Francis Perrin est nommé maître de conférences non pas en mathématique mais en théories physiques<sup>163</sup>.

Ce doctorat, soutenu huit ans après celui de Deltheil, correspond en fait entièrement à la conception du domaine des probabilités mise en place par Borel : un domaine à développer pour les applications qu'il permet de faire avec d'autres théories et non pas un domaine à considérer en tant que tel. L'influence de ce mathématicien est d'ailleurs clairement revendiquée par Francis Perrin dans son introduction<sup>164</sup>. Il affirme avoir développé son dernier chapitre<sup>165</sup> à la suite de questions posées par le mathématicien. Cette attitude semble traduire une domination de Borel sur le milieu des probabilités,

155. Cf. PERRIN 1928a, p. 2-3. C'est-à-dire qu'on impose à la distribution de probabilité d'être nulle ou infiniment petite du second ordre en dehors d'un domaine infiniment petit entourant l'origine.

156. Cf. le rapport de thèse.

157. Francis Perrin affirme ainsi, PERRIN 1928b, p. 4, que « du point de vue mathématique, l'étude statistique des rotations irrégulières [...] conduit notamment à l'obtention de fonction de type Gauss sur des multiplicités fermées (sphères et hypersphères).

158. Cf. PERRIN 1928a, p. 1 et p.4.

159. *La fluorescence des solutions. Polarisation. Vie moyenne des molécules dans l'état excité.*

160. Cf. KAHANE 1998, p. 126. Jean Perrin avait procédé à des mesures directes du phénomène du mouvement brownien de rotation et en avait déduit des grandeurs moléculaires comme le nombre d'Avogadro. L'article de Jean Perrin de 1909, intitulé « Mouvement brownien et réalité moléculaire » paraît dans les *Annales de Chimie et de Physique*. Jean Perrin publie sur le sujet un ouvrage *les atomes* en 1912, auquel se réfère explicitement son fils, PERRIN 1928b, p. 3 pour présenter son travail.

161. Cf. par exemple BRU 1999b.

162. Jean-Pierre Kahane dans KAHANE 1998, p. 134 parle également du travail du doctorant comme d'un travail de « physique théorique ».

163. Il obtient ce poste à la Sorbonne en 1933, cf. le site du Collège de France, [http://www.college-de-france.fr/default/EN/all/ins\\_dis/francis\\_perrin.htm](http://www.college-de-france.fr/default/EN/all/ins_dis/francis_perrin.htm).

Evry Schatzman dans SCHATZMAN 1994 ne décrit d'ailleurs Francis Perrin que comme un physicien.

164. Cf. PERRIN 1928a, p. 4.

165. sur le produit et l'itération des répartitions sphériques.



même si à la fin des années 1920, d'autres mathématiciens participent à la recherche de ce domaine et commencent à investir les institutions parisiennes.

### 6.3 Les autres thèses (1937-1945)

À la fin des années 1930, six thèses classées en calcul des probabilités sont soutenues à la faculté des sciences de Paris en l'espace de quatre ans, entre 1937 et 1941 : Daniel Dugué en 1937, Wolfgang Doeblin en 1938, Jean Ville, Robert Fortet et Gustave Malécot en 1939 et Michel Loève en 1941. Quatre ans après, en 1945, une dernière est présentée : celle d'André Blanc-Lapierre. Comme l'a suggéré le bilan historiographique, ces étudiants ont, pour la plupart, suivi les enseignements de Fréchet et de Darmais à la faculté des sciences. Ils soutiennent leur doctorat dans un contexte totalement différent de celui de la précédente décennie en France et également à l'étranger. Les mathématiciens qui occupent les postes institutionnels de la faculté des sciences de la Sorbonne sont alors Borel (mais il n'a plus autant d'influence) et surtout Fréchet et Darmais. Il n'est pas étonnant alors de les retrouver dans les jurys de ces 7 thèses<sup>166</sup>. Paul Lévy est toujours professeur à l'École polytechnique et ses nombreuses publications en probabilités ont fait de lui un mathématicien reconnu internationalement, mais il n'est pas présent dans les jurys de thèses de probabilités<sup>167</sup>.

En outre, en octobre 1937, la première manifestation internationale consacrée au calcul des probabilités et ses applications vient de se dérouler à Genève, présidée par Maurice Fréchet. Les sujets abordés par les sept doctorants couvrent un large spectre des thèmes présentés en conférence à l'occasion de ce colloque<sup>168</sup> : les statistiques, les fondements des probabilités, la théorie des probabilités en chaîne et des questions de convergence de suites de variables aléatoires. Quelques absences peuvent être toutefois relevées, celles du mouvement brownien et des intégrales stochastiques. Elle font l'objet de plusieurs travaux de Paul Lévy, réalisés essentiellement pendant la seconde guerre, ce qui pourrait expliquer qu'elles ne sont pas abordées dans les doctorats<sup>169</sup>.

---

166. Borel est ainsi le président du jury des trois premières thèses, celles de Dugué, Doeblin et Jean Ville. Fréchet est président de trois autres jurys, ceux de Malécot, Loève et Blanc-Lapierre, le jury de la thèse de Fortet étant présidé par Henri Villat. Fréchet est également le rapporteur de 4 thèses (Doeblin, Ville, Fortet et Loève), Darmais des trois autres (Dugué, Malécot et Blanc-Lapierre).

167. Rappelons que traditionnellement, est membre de jury le personnel enseignant de la faculté des sciences de Paris.

168. Ces thèmes figurent dans le *Compte rendu critique* que propose Bruno de Finetti dans DE FINETTI 1939.

169. Je renvoie à la thèse de Bernard Locker LOCKER 2001 pour une étude approfondie du développement de ces théories. On peut également consulter l'introduction de BARBUT ET AL. 2004 qui évoque la contribution de Paul Lévy à ces domaines.

### 6.3.1 La thèse de Daniel Dugué

Premier doctorat en calcul des probabilités à être soutenu à la fin des années 1930, le travail de Daniel Dugué, *Application des propriétés de la limite au sens du calcul des probabilités à l'étude des diverses questions d'estimation*, se situe à la frontière entre les statistiques et les probabilités. Daniel Dugué s'intéresse au problème de l'estimation d'un point de vue théorique pour « éclaircir les questions mathématiques » soulevées par le problème physique de la connaissance d'une grandeur  $M$  par les résultats d'une série de mesures de cette grandeur<sup>170</sup>. Plus généralement, il s'agit du problème de l'estimation d'une loi de probabilité d'expression analytique connue, mais dépendant de certains paramètres qu'on cherche à atteindre.

Les travaux sur lesquels se fonde Daniel Dugué pour débiter son étude sont essentiellement ceux du statisticien Ronald Aylmer Fisher, dont le doctorant évoque les « nombreux mémoires »<sup>171</sup>, même s'il ne se réfère explicitement qu'à FISHER 1925. Il en reprend les notations ainsi que le vocabulaire, tel que celui de « statistiques » pour les fonctions des résultats d'expériences qu'il considère<sup>172</sup> et celui de statistiques « consistent », que Dugué appelle également « estimations correctes »<sup>173</sup>.

La première partie de son travail est consacrée à la recherche des estimations correctes dans le cas d'un, de deux ou d'une infinité dénombrable de paramètres<sup>174</sup>. Ses démonstrations sont fondées sur un théorème démontré par Khintchine dans KHINTCHINE 1929, qui énonce la loi des grands nombres pour une variable aléatoire  $x$  en supposant seulement que la « valeur moyenne [de cette variable aléatoire] a une existence bien déterminée »<sup>175</sup>. Daniel Dugué en redonne d'ailleurs une démonstration<sup>176</sup>.

170. Cf. DUGUÉ 1937, p. 1.

171. Cf. DUGUÉ 1937, p. 2.

172. D'après DUGUÉ 1937, p. 2, Daniel Dugué forment les fonctions  $f_1(x_1), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  des résultats des expériences  $x_1, \dots, x_n$ . Ce sont ces fonctions qu'il nomme comme Fisher « statistiques ».

173. Cf. FISHER 1925, p. 702 et DUGUÉ 1937, p. 2-3. D'après Dugué, chaque fonction  $f_i$  (cf. note précédente) a une loi de probabilité. Il note alors  $P_{\alpha, \beta}^i$  la mesure de l'ensemble des points de l'espace à  $i$  dimensions tel que  $\alpha \leq f_i(x_1, \dots, x_i) < \beta$ . Les statistiques « consistent » sont celles qui convergent en probabilité vers la grandeur qu'on cherche à estimer,  $m$ , c'est-à-dire, telles qu'on puisse trouver un rang  $i$  à partir duquel  $P_{m-\epsilon, m+\epsilon}^i$  est aussi voisin de 1 qu'on le désire,  $\epsilon$  étant choisi arbitrairement.

174. Cf. DUGUÉ 1937, p. 3.

175. Cf. DUGUÉ 1937, p. 6. Khinchine dans KHINTCHINE 1929, p. 477 énonce ce théorème ainsi :

« Soit  $x$  une variable aléatoire,  $a$  la valeur probable de  $x$  et  $x_1, x_2, \dots$  les valeurs successives de  $x$  se réalisant dans une suite indéfinie d'expériences. La loi des grands nombres affirme que la probabilité de l'inégalité

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - a \right| > \epsilon$$

tend, quelque petit que soit  $\epsilon \neq 0$ , vers zéro pour  $n$  infini. On démontre d'habitude cette assertion sous la condition que la valeur probable de  $x^2$  soit finie. Elle constitue cependant un théorème absolument général, valable dans tous les cas où  $x$  a une valeur probable déterminée. »

176. fondée sur l'une de celles proposée par Khintchine dans KHINTCHINE 1929. Pour démontrer la convergence en probabilité, il utilise la fonction caractéristique de la variable aléatoire.

L'application de ce théorème lui permet ensuite de trouver des estimations correctes. Il considère tout d'abord une loi de probabilité élémentaire  $f(x, m)$  avec

$$\int f(x, m) dx = 1$$

où  $x$  est une variable aléatoire et  $m$  le paramètre qu'on cherche à estimer. Il suppose que la fonction  $f(x, m)$  a une dérivée par rapport à  $m$  dans tout l'intervalle de variation de  $x$  sauf pour un ensemble de probabilité nulle. Dans le cas où  $x$  ne reste pas compris entre deux valeurs bornées, il suppose en outre que l'intégrale  $\int_0^C \frac{\partial f(x, m)}{\partial m} dx$  converge uniformément vers sa limite quand  $|C|$  croît indéfiniment, cela dans tout l'intervalle où varie  $m$ , et que  $\frac{1}{f(x, m)} \frac{\partial f(x, m)}{\partial m}$  est uniformément continue par rapport à  $m$  pour toutes les valeurs de  $x$  à l'exception d'un ensemble de probabilité nulle. Sous ces conditions, l'application du théorème de Khintchine permet d'affirmer que la solution de l'équation en  $T$  suivante (où  $T$  dépend de  $n$ ) :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{f(x_i, T)} \frac{\partial f(x_i, T)}{\partial m} = 0$$

converge en probabilité vers  $m$ . Dugué utilise pour sa démonstration le théorème de Khinchine, des arguments d'uniforme continuité et de dérivation sous le signe  $\int$ <sup>177</sup>. Il retrouve alors l'estimateur du « maximum of likelihood » donné par la méthode de Fisher, solution de l'équation<sup>178</sup> :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln(f(x_i, m))}{\partial m} = 0.$$

Dans la suite de son travail, Daniel Dugué présente les résultats relatifs à la méthode de Fisher comme des conséquences particulières de ses propres résultats, qu'il obtient dans son mémoire au moyen d'une méthode permettant de trouver de nouvelles estimations correctes dans un cadre plus général<sup>179</sup>. Pour cela, il généralise le théorème de Khintchine au cas où les variables aléatoires considérées ne suivent pas toutes la même loi mais vérifient certaines conditions<sup>180</sup>. Il propose également diverses généralisations de ses résultats en formulant des conditions moins restrictives que l'existence de la valeur moyenne de la variable aléatoire par exemple.

177. Cf. DUGUÉ 1937, p. 9-10. Dugué rajoute également la condition suivante sur l'équation  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{f(x_i, m)} \frac{\partial f(x_i, m)}{\partial m} = 0$  : elle ne doit avoir qu'une racine en  $m$  dans l'intervalle de recherche du paramètre.

178. Fisher expose sa méthode dans FISHER 1925, p. 708. Dugué n'y fait cependant pas explicitement référence.

179. Méthode qu'il expose dans le premier chapitre de sa thèse.

180. Il impose ainsi aux valeurs moyennes de ces variables aléatoires de « converger également » vers leurs limites respectives. Autrement formulé, si on note  $x_i$  les variables aléatoires,  $F_i$  la fonction de répartition de la loi de  $x_i$ , on peut trouver  $N$  tel que pour  $n > N$ ,  $\int_{-\infty}^n x_i dF_i(x_i)$  soit inférieur à un certain  $\alpha$  quel que soit  $i$  (de même au voisinage de  $+\infty$ ). Si on note  $a_i = E(x_i)$  où  $E(.)$  représente l'espérance mathématique (ou valeur moyenne) de la variable aléatoire et si  $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$  converge vers  $A$ , alors la moyenne arithmétique de  $x_i$  converge en probabilité vers  $A$ . Cf. DUGUÉ 1937, p. 11-12.

Dans une seconde partie de sa thèse, Daniel Dugué recherche et étudie les lois-limites suivies par les estimations « correctes » qu'il a trouvées précédemment et il en calcule les caractéristiques, comme par exemple l'écart-type<sup>181</sup>. Il examine notamment le cas de l'estimation obtenue par la méthode du « maximum of likelihood ». Il explicite le comportement de ce qu'il appelle « l'infiniment petit aléatoire »<sup>182</sup> :  $f_n - m$  où  $f_n$  est l'estimation du paramètre  $m$ . Sous la condition que  $\sigma^2 = E\left(\left(\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial m}\right)^2\right)$  existe, Dugué démontre pour l'estimation du « maximum of likelihood » que la variable aléatoire  $\sqrt{n}(T_n - m)$  converge en probabilité vers la loi de Gauss de moyenne nulle et d'écart-type  $\sigma$ <sup>183</sup>. Il retrouve alors un résultat qu'a déjà énoncé et brièvement démontré Joseph Leo Doob dans DOOB 1934, p. 774. Dugué le reconnaît explicitement dans son introduction<sup>184</sup>. Il propose une démonstration plus développée que celle de Doob, fondée toutefois sur des idées semblables à celles du mathématicien : raisonner en faisant des développements limités.

Dugué étudie ensuite la précision de diverses statistiques : il regarde la partie principale de la quantité  $T_n - m$ , où  $T_n$  est une statistique. Reprenant le concept d'espace « statistique de Fisher », il retrouve un résultat déjà énoncé par le statisticien affirmant l'optimalité de la méthode du « maximum of likelihood » : « toutes les estimations dont la loi-limite est de Gauss et telles que leur écart-type converge vers l'écart-type limite, ont une précision bornée supérieurement par celle de la méthode du « maximum of likelihood » »<sup>185</sup>. Il étend cette étude notamment au cas de plusieurs paramètres et au cas de la limite non gaussienne. Il examine également le lien entre les diverses estimations d'un même paramètre.

Dans un dernier temps, il s'intéresse au cas des statistiques exhaustives ou encore « suffisient » que présente Fisher dans FISHER 1925 et sur lesquelles Darmois a déjà publié dans DARMOIS 1935. Il s'agit de déterminer les distributions sur lesquelles on peut formuler des théorèmes en ne disposant que d'un nombre fini d'expériences<sup>186</sup>. Dugué approfondit les études de Fisher et Darmois étudie les estimations dans les différents cas, vérifiant qu'elles fournissent le maximum de précision.

Au cours de son mémoire, Daniel Dugué retrouve donc un certain nombre de résultats déjà énoncés par le mathématicien Fisher : il en propose de nouvelles démonstrations ou il en fournit pour des théorèmes qui n'en avaient pas et il récapitule tous les résultats connus sur la statistique du maximum de vraisemblance. Il approfondit et précise certaines études de convergence en utilisant des théorèmes et des outils

---

181. Cf. DUGUÉ 1937, p. 24.

182. Cf. DUGUÉ 1937, p. 3.

183. Cf. DUGUÉ 1937, p. 27. Il généralise ce résultat aux autres statistiques qu'il a explicité dans la première partie de son travail.

184. Cf. DUGUÉ 1937, p. 3.

185. Cf. DUGUÉ 1937, p. 4 et p.44.

186. Les « finite samples » dans FISHER 1918, p. 712.

de calcul des probabilités, tels que ceux de Khintchine ou de Joseph Leo Doob<sup>187</sup>. Dugué fait le point sur les différents outils de la théorie de l'estimation par sa comparaison d'estimations, par son étude approfondie de la méthode du « maximum of likelihood ». Il complète son étude des statistiques « consistant » par celle des statistiques exhaustives, reprenant les résultats de Fisher et de Georges Darmais sur les diverses questions. Le thème étudié par Daniel Dugué ainsi que les références qu'il cite traduisent une influence de Georges Darmais. Dans les années 1930, Georges Darmais est l'un des seuls mathématiciens français à enseigner et à travailler des thèmes de statistiques, et notamment ceux qui sont abordés en Angleterre par Ronald Fisher<sup>188</sup>. Daniel Dugué a d'ailleurs suivi certains de ses cours à l'IHP<sup>189</sup>. L'influence de Darmais sur le travail de Dugué se perçoit également dans la référence explicite du doctorant à l'une de ses publications, ainsi que dans les remerciements que lui adresse le doctorant à la fin de son introduction : il lui exprime sa reconnaissance pour lui avoir « indiqué le sujet de ce mémoire et si aimablement dirigé [son] travail »<sup>190</sup>. Une filiation entre les deux mathématiciens apparaît *a posteriori* dans leurs carrières respectives. Daniel Dugué succédera en effet à Georges Darmais à la direction de l'ISUP en 1958<sup>191</sup> et occupera à partir de cette date la chaire de statistique mathématique.

La thèse de Daniel Dugué étudie la théorie de l'estimation essentiellement dans le cas où les expériences considérées sont indépendantes les unes des autres. Il réussit cependant à étendre certains de ces énoncés au cas où les résultats de ces expériences sont liés en chaînes simples ou multiples. C'est notamment le cas de celui qui affirme que la méthode du « maximum of likelihood » fournit l'estimation dont la précision borne supérieurement celles de toutes les autres estimations dont la loi-limite est de Gauss et telles que leur écart-type converge vers l'écart-type limite<sup>192</sup>. Daniel Dugué se fonde alors sur les travaux de Markov de 1907 et d'Hostinský de 1929<sup>193</sup>. Ces extensions de résultats au cas où les variables sont liées en chaîne témoignent de la place occupée par la théorie des probabilités en chaîne dans le domaine du calcul des probabilités en France, à la fin des années 1930. Le mémoire de Dugué n'est pas *a priori* un mémoire

187. Il signale également parfois des résultats récents de la théorie des probabilités comme par exemple DUGUÉ 1937, p. 23 où il évoque la démonstration par Kolmogorov de la loi forte des grands nombres, selon la terminologie actuelle : la moyenne arithmétique de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées converge presque sûrement vers leur espérance commune.

188. Comme indiqué lors du bilan historiographique.

189. Cf. COLASSE et PAVÉ 2002, p. 89 et BENZECRI 1988. Lors de cet entretien, Bernard Bru affirme également que Daniel Dugué a étudié la statistique avec Fisher. Je n'ai cependant trouvé aucune autre source confirmant cette dernière information.

190. Cf. DUGUÉ 1937, p. 5.

191. Cf. COLASSE et PAVÉ 2002, p. 89.

192. Cf. DUGUÉ 1937, p. 52-55.

193. Cf. MARKOV 1907; HOSTINSKY 1929. Il utilise notamment leur résultat sur l'existence de la limite de l'espérance  $E(\Psi(x_{n-1}, x_n))$ , limite indépendante de  $x_1$ , ainsi que sur la convergence en loi de  $\sqrt{n}(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - a)$  vers une loi de Gauss centrée ( $a$  étant la valeur moyenne commune aux variables) dans les cas où les variables  $(x_i)$  sont liées en chaîne.

sur cette théorie et Fisher dans FISHER 1925 ne les évoque pas. Pourtant le doctorant insiste sur les extensions qu'il propose. En 1938 et 1939, deux doctorats consacrés à cette théorie seront successivement soutenus : celui de Wolfgang Doeblin et celui de Robert Fortet.

### 6.3.2 Deux thèses sur la théorie des probabilités en chaîne : celles de Wolfgang Doeblin et Robert Fortet

Les thèses de ces deux doctorants portent principalement sur la théorie des probabilités en chaîne, développée par Markov au début du XX<sup>ème</sup> siècle et qui pendant les années 1930 a connu un fort développement, comme l'a montré le bilan historiographique<sup>194</sup>. Pour rappel, d'après MARKOV 1907<sup>195</sup>, une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 0}$  telle que la connaissance au temps  $n + 1$  de la variable aléatoire dépend seulement de la connaissance de la variable au temps  $n$ . Autrement dit, si la suite  $X_n$  prend ses valeurs dans un ensemble discret  $I$ , on a :

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i = p_{i,j})$$

Les travaux de Robert Fortet et surtout ceux de Wolfgang Doeblin, ainsi que leurs biographies, ont été déjà étudiés, essentiellement par Bernard Bru<sup>196</sup>. La thèse de Doeblin, en particulier, a déjà été analysée en grand détail par Bernard Bru et par Laurent Mazliak. J'en résumerai ici l'essentiel et renvoie à leurs travaux<sup>197</sup>. Auparavant, quelques mots sur les trajectoires de ces doctorants permettent de contextualiser leurs doctorat<sup>198</sup>.

En 1938, cinq après son arrivée sur Paris, Wolfgang Doeblin soutient son mémoire *Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types de chaînes simples*. Dès 1935, il a « commenc[é] très certainement à travailler seul sur la théorie des chaînes de Markov dont on sait qu'elle n'était alors complète que sous des hypothèses particulières<sup>199</sup> ; on entrevoyait seulement les généralisations possibles, les méthodes utilisées étaient peu susceptibles d'extensions significatives »<sup>200</sup>. Il travaille de façon autonome et très rapidement, il obtient de premiers résultats qu'il soumet à Fréchet au retour de ce dernier de son séjour en Europe de l'Est en octobre et novembre 1935. Il

194. Pour un développement approfondi des travaux de Markov en théorie des chaînes, on peut se référer à l'article d'Eugène Seneta, SENETA 1966. On pourra également regarder SHEYNIN 1989.

195. et MAZLIAK 2007.

196. Pour Wolfgang Doeblin, cf. BRU 1992, 1993; BRU et YOR 2002 et également un article de Laurent Mazliak MAZLIAK 2007, pour Robert Fortet, BRU 2002; BRU et NEVEU 1998.

197. Cf. BRU (1992, 1993); MAZLIAK (2007).

198. Ce résumé provient des articles de Bernard Bru.

199. Les chaînes devaient être à nombre fini d'états, cf. BRU et NEVEU 1998, p. 85. D'après Bernard Bru et Jacques Neveu, cette théorie reposait sur des méthodes d'algèbre linéaire.

200. Cf. BRU 1992, p. 10 et BRU 1993, p. 6.

travaille de façon intense, à tel point que, dès juin 1936, il possède les résultats d'une partie de sa thèse tels qu'ils sont présentés dans son doctorat, DOEBLIN 1938b, publiée dans le *Bulletin mathématique de la société roumaine des sciences* dès 1937<sup>201</sup>.

Comme Wolfgang Doeblin, Robert Fortet commence rapidement à travailler sur les probabilités en chaîne. Dès 1935, il cherche à élucider le comportement asymptotique des chaînes de Markov homogènes dans le temps à ensemble dénombrable d'états. En 1935 et 1936, Fortet publie deux notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*<sup>202</sup>. La première d'entre elles est consacrée « à l'étude du cas « régulier » des chaînes dénombrables par la méthode de Markov », méthode qui sera simplement rappelée dans la thèse de Fortet. La seconde contient une partie importante des résultats de la thèse de Fortet sous forme condensée et sans démonstration. Le doctorant y précise qu'il utilise des « propriétés relatives à l'itération de certaines substitutions algébriques portant sur une infinité de variables »<sup>203</sup>; Fortet emploie, dès cette période, la théorie spectrale des opérateurs quasi-compacts<sup>204</sup>. Fortet publie aussi avec Doeblin deux articles sur des sujets qu'il reprendra dans sa thèse.

Les deux doctorants collaborent en effet et pas seulement dans le cadre du « Séminaire Borel ». Fortet et Doeblin travaillent en commun sur la théorie des chaînes à liaisons complètes, initiée par Onicescu et Mihoc à Bucarest, et ils publient ensemble en 1937 l'article « Sur des chaînes à liaisons complètes », DOEBLIN et FORTET 1937a<sup>205</sup>. Ils étudient également des questions relatives à l'équation de Smoluchowsky en réaction à des travaux de Nicolas Kryloff et Nicolas Bogoliouboff, KRYLOFF et BOGOLIUBOFF 1937b,a. Ils publient ensemble une note aux CRAS à ce sujet, DOEBLIN et FORTET 1937b. Les relations entre les deux doctorants se traduisent également par leurs citations communes dans leur mémoire de doctorat<sup>206</sup>.

201. Cf. DOEBLIN 1937. En 1936, Doeblin a en fait obtenu les résultats relatifs à un espace d'états discrets. Il lui manque encore ses résultats sur l'équation de Smoluchowsky.

202. Cf. FORTET 1935, 1936. Bernard Bru en résume le contenu dans BRU 2002, p. 21.

203. Comme je l'expliquerai ci-dessous, Fortet précise dans sa thèse quelles sont ces propriétés et comment il les utilise.

204. Théorie dont Bernard Bru reprend la terminologie actuelle.

205. D'après DOEBLIN 2007, dans la lettre 7 qu'adresse Doeblin à Hostinský le 11 mars 1937, celui-ci évoque le problème de la dépendance des probabilités de passage d'un état à un autre et notamment le problème de la dépendance avec les états éloignés. Ni Onicescu ni Mihoc ne sont cités dans la lettre. D'après Laurent Mazliak, on peut supposer que c'est dans la réponse à cette lettre que Hostinský a indiqué les travaux des mathématiciens roumains à Doeblin et l'on peut penser que Doeblin n'en avait pas connaissance auparavant.

206. Fortet cite la thèse de Doeblin et ses travaux sur les chaînes de Markov simples ou multiples pour une infinité dénombrable d'états possibles, FORTET 1939, p. 20, même si elle ne figure pas dans la bibliographie de la thèse, FORTET 1939, p. 248-250. Doeblin mentionne dans sa bibliographie deux notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* publiées par Fortet et intitulées « Sur les probabilités en chaîne », FORTET 1935, 1936, cf. DOEBLIN 1938b, p. 122.

Enfin, un dernier fait relie les deux doctorants entre eux et les rattache aux travaux de Fréchet. Dans FRÉCHET 1938<sup>207</sup>, ce dernier cite parmi les travaux qui généralisent son étude de la théorie des probabilités en chaîne<sup>208</sup> « les Thèses en cours d'impression de M. Doeblin et M. Fortet », ainsi qu'« un opuscule rédigé par M. Doeblin pour précéder sa thèse »<sup>209</sup>. Doeblin et Fortet apparaissent alors comme des « élèves » de Fréchet, travaillant sur une théorie commune animée par le professeur de la Sorbonne<sup>210</sup>.

### La thèse de Wolfgang Doeblin

Dans son doctorat, Wolfgang Doeblin étudie la théorie des chaînes de Markov. Son travail (et notamment la première partie) est fondé sur certains résultats de la théorie des chaînes simples à un nombre fini d'états, qu'il n'approfondit pas dans sa thèse. Ces résultats font l'objet d'une publication à part de Doeblin, l'« opuscule » évoqué par Fréchet dans la préface de FRÉCHET 1938 : « Exposé de la théorie des Chaînes simples constantes de Markov à un nombre fini d'états », DOEBLIN 1938a. Doeblin en rappelle toutefois les points principaux dans l'introduction de son mémoire<sup>211</sup>.

Dans ce cas simple, un système matériel ne peut prendre qu'un nombre fini d'états  $E_1, E_2, \dots, E_r$  (ou encore un point mobile ne peut occuper qu'un nombre fini de positions). Doeblin étudie une suite dénombrée d'épreuves et il suppose qu'il existe une probabilité  $p_{ik}$  bien définie pour que le système passe en une épreuve de l'état  $E_i$  à l'état  $E_k$  et il note  $P_{ik}^{(n)}$ , la probabilité de passer de  $E_i$  à  $E_k$  en  $n$  épreuves<sup>212</sup>. Cette première partie de la recherche de Doeblin, exposée dans DOEBLIN 1938a, est résumée

207. Plus précisément dans la préface de ce livre, *Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*.

208. Dans FRÉCHET 1938, Fréchet expose le cas le plus achevé de cette théorie, celui où les états possibles sont en nombre fini et les événements en chaîne « simple et constante », ce qui dans la terminologie actuelle correspond aux chaînes homogènes et irréductibles. Fréchet cite les travaux qui généralisent son étude au cas des états possibles en nombre infini et des chaînes multiples et variables.

209. Cf. FRÉCHET 1938, Préface - p.VIII. En ce qui concerne l'opuscule rédigé par M.Doeblin, il s'agit de l'article paru en 1938 : « Exposé de la théorie des Chaînes simples constantes de Markov à un nombre fini d'états », *Rev. Math. Union Interbalkan* 2 (1938) 77-105.

210. Une dernière preuve allant dans ce sens se trouve dans les remerciements qu'adresse chacun des deux doctorants à Maurice Fréchet. Doeblin lui exprime « toute [sa] respectueuse gratitude pour l'intérêt avec lequel il a suivi le développement de ces travaux et pour les conseils qui ne [lui] ont jamais fait défaut et qui [lui] ont été aussi précieux pour [ses] recherches proprement dites que pour le travail de rédaction », cf. DOEBLIN 1938b, p. 5. Une partie de la correspondance de Fréchet conservée aux Archives Nationales, celle qui contient les lettres envoyées par Doeblin, a été étudiée par Bernard Bru, notamment dans BRU 1992, 1993, et témoigne des échanges fournis entre le doctorant et le professeur. Quant à Fortet il écrit, FORTET 1939, p. 19-20 : « Nous ne terminerons pas cette Introduction sans adresser l'expression de nos remerciements et de notre reconnaissance à M. le Professeur M. Fréchet, notre maître, sans qui ce travail n'aurait jamais abouti : car non seulement nous lui devons le sujet et les idées directrices, mais il a bien voulu suivre en quelque sorte pas à pas nos progrès et nous maintenir dans la bonne route ».

211. Cf. DOEBLIN 1938b, p. 5-14.

212. Doeblin étudie ainsi une chaîne markovienne et stationnaire : la probabilité de passage en une opération de  $E_i$  à  $E_k$  ne dépend ni des états antérieurs du système ni du rang de l'opération. On a alors comme le rappelle Doeblin DOEBLIN 1938b, p. 5, les propriétés suivantes pour  $P_{ik}^n$  :



par Laurent Mazliak<sup>213</sup>. Les principaux résultats du doctorant concernent la classification complète des chaînes simples à un nombre fini d'états, également réalisée au même moment, en 1936, et de façon indépendante par Kolmogorov. Doeblin distingue dans l'ensemble des états plusieurs groupes d'états disjoints qu'il sépare en deux catégories. Il y a les « groupes finaux »<sup>214</sup> qu'un système ne peut quitter une fois qu'il y est entré et les « groupes de passage ». Doeblin distingue également les « groupes cycliques » des « groupes acycliques » suivant la périodicité de passage dans les états de ce groupe. Il aboutit alors au résultat suivant : « du fait que la répartition des expériences finit presque sûrement par réaliser n'importe quelle éventualité à probabilité positive résulte [...], dans le cas fini, que le système aboutit presque sûrement à un groupe final dont tous les états sont réalisés une infinité de fois avec des fréquences tendant vers des limites bien déterminées »<sup>215</sup>.

Dans la première partie de sa thèse, Doeblin adopte le même cadre d'étude (les chaînes simples constantes de Markov selon le vocabulaire qu'il emploie, cf. DOEBLIN 1938b, p. 3), en attribuant à chaque état  $E_i$  un nombre  $x_i$ . Il regarde la variable aléatoire  $X_i^{(n)}$  qui prend la valeur  $x_k$  si le résultat de la  $n$ -ième épreuve est  $E_k$  l'état initial étant  $E_i$ . Il étudie alors les sommes  $S_i^{(n)} = X_i^{(1)} + \dots + X_i^{(n)}$  en se fondant sur les travaux de Markov de 1907, de Serge Bernstein de 1926, ainsi que sur ceux de Fréchet et Potoček en 1931<sup>216</sup>. En se fondant sur les méthodes de Fréchet et de Serge Bernstein (celle du groupement des termes), il calcule les lois limites de probabilités des  $S_i^{(n)}$  et les parties principales des moments de  $S_i^{(n)}$ . Il montre notamment que  $\frac{S_i^{(n)}}{n}$  tend presque sûrement vers  $\sum x_k P_k$  où  $P_k$  est la limite presque sûre de la fréquence de l'état  $E_k$ <sup>217</sup>. Il établit également la validité du passage à la loi de Gauss de la loi de la variable  $\frac{S_i^{(n)} - nM}{\sqrt{n}}$ , et montre que le théorème du logarithme itéré est généralement vérifié pour une somme de variables dépendantes<sup>218</sup>.

---


$$P_{ik}^{(n+m)} = \sum_{j=1}^r P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)}, \quad \sum_{k=1}^r P_{ik}^{(n)} = 1, \quad P_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

213. Dans MAZLIAK 2007.

214. Cf. DOEBLIN 1938b, p. 5.

215. Cf. également LÉVY 1955, p. 105. C'est par ce travail que Wolfgang Doeblin, sans la connaître, étend au cas des chaînes simples à états discrets, la méthode directe proposée par Hadamard dans ses articles sur le battage des cartes de 1927/1928, cf. BRU 1992.

216. Cf. DOEBLIN 1938b, p. 15-16.

217. autrement dit la limite de  $P(X_i^{(n)} = x_k)$ , dont Doeblin a montré dans DOEBLIN 1938a qu'elle converge et est indépendante de l'état initial  $E_i$ . Cf. également DOEBLIN 1938b, p. 6.

218. Dans la formulation initiale du théorème dû à Khinchine, les variables sont indépendantes, cf. le rapport qu'écrivait Fréchet sur la thèse. Il démontre ainsi le théorème suivant (avec les notations précédentes) DOEBLIN 1938b, p. 44 que lui-même appelle le théorème du logarithme itéré :

$$\begin{aligned} &\text{À l'intérieur d'un groupe final, si } \sigma \neq 0, \text{ la probabilité pour qu'on ait pour au moins un } n > N \\ &|S_i^{(n)} - nM| > \sqrt{2\sigma^2 n (\ln \ln n + c \ln \ln \ln n)} \\ &\text{sera } = 1 \text{ si } c < \frac{1}{2}, \text{ tendra vers } 0 \text{ si } c > \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dans les deuxième et troisième chapitres de sa thèse, Doeblin change de cadre et étudie les chaînes simples de Markov dont l'espace des états est continu (et non plus discret)<sup>219</sup>. Il prend comme espace des états un ensemble  $W$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  à  $n$  dimensions, mesurable au sens de Borel et de mesure  $> 0$ <sup>220</sup>. À chaque point  $E$  de cet ensemble et à chaque sous-ensemble  $\mathcal{E}$  mesurable (B) de  $W$ , il fait correspondre une probabilité  $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$ , mesurable (B) en fonction de  $E$ , qui représente la probabilité de passer en une épreuve de  $E$  en  $\mathcal{E}$ . Il considère également  $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ , la probabilité de passer en  $n$  épreuves de  $E$  en  $\mathcal{E}$  et l'exprime en fonction de l'intégrale de Lebesgue-Stieljes-Radon, intégrale qu'il utilise dans toute la suite de son mémoire<sup>221</sup> :

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}) = \int_W P^{(n-1)}(F, \mathcal{E}) P^{(1)}(E, d\mathcal{A}_F)$$

Il suppose que la densité de la distribution des masses  $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$  en un point  $F$ , notée  $p^{(n)}(E, F)$ , existe presque partout et est mesurable au sens de Lebesgue en fonction du couple  $E, F$ , et que la mesure de  $W$  est bornée<sup>222</sup>. Il suppose de plus qu'à partir d'une certaine valeur de  $n$  on peut rendre à la fois la mesure de  $\mathcal{E}$  et  $1 - P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ , arbitrairement petit, uniformément par rapport à  $E$ . Doeblin souligne que cette hypothèse est moins restrictive que d'autres hypothèses formulées précédemment sur le sujet par Maurice Fréchet<sup>223</sup>. En effet, Doeblin part des résultats de convergence et de périodicité obtenus par Fréchet dans FRÉCHET 1933a et il les étend dans le cadre du modèle d'Hostinský dans HOSTINSKY 1932<sup>224</sup>. Cependant, si Doeblin fait référence à ces résultats, il n'utilise pas les mêmes méthodes que Fréchet (méthode des équations intégrales et des noyaux principaux), comme le reconnaît explicitement ce dernier dans le rapport de thèse<sup>225</sup>. À l'aide de la théorie de la mesure, Doeblin adopte une méthode directe obtenant un « parallélisme presque parfait avec le cas d'un nombre fini d'états »<sup>226</sup>. Il définit à nouveau la notion d'ensembles « finals » tels que le point mobile passe presque sûrement par ces ensembles. Il ne peut quitter l'ensemble final dans lequel il est amené que dans des cas de probabilité nulle. Il décompose ensuite chaque ensemble final en un certain nombre de sous-ensembles cycliques et il

219. Les chaînes de Markov alors étudiées sont, elles, encore à temps discret.

220. Cf. DOEBLIN 1938b, p. 63. Il utilise la notation « mesurable (B) » pour « mesurable au sens de Borel » et je la réutilise dans la suite du texte.

221. Cf. DOEBLIN 1938b, p. 63.

222. Cf. DOEBLIN 1938b, p. 64.

223. Voir aussi là-dessus LÉVY 1955, p. 110.

224. C'est ce qu'explique Doeblin DOEBLIN 1938b, p. 64-65 et que rappelle Laurent Mazliak dans MAZLIAK 2007, p. 167.

225. En ce qui concerne le rapport de la thèse on peut remarquer que Fréchet y fait référence à ses travaux, mais qu'à aucun moment il ne mentionne ceux d'Hostinský, qu'il connaît pourtant et dont il sait que Doeblin les connaît. D'après Laurent Mazliak dans MAZLIAK 2007, c'est d'ailleurs Fréchet qui a incité Doeblin à rentrer en contact avec le mathématicien tchécoslovaque notamment pour les opportunités de publication qu'il pouvait lui offrir plus que pour une collaboration intellectuelle.

226. Cf. DOEBLIN 1938b, p. 4.

étudie le mouvement circulaire du mobile dans ces sous-ensembles<sup>227</sup>. De là, il retrouve et généralise différents résultats, certains formulés par Fréchet dans FRÉCHET 1933a et d'autres exposés plus récemment par Fortet dans des notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* sur les chaînes à espace d'états dénombrable<sup>228</sup>. Doeblin montre également que les résultats qu'il a obtenus sur les sommes de variables aléatoires dans le cas d'un espace à nombre fini d'états restent valables dans le cas continu.

Enfin, dans un dernier chapitre de son mémoire, Doeblin s'intéresse au cas des chaînes de Markov à mouvement continu et à espace d'états continu (processus de Markov) : il ne s'agit plus de repérer la position d'un point mobile périodiquement après des intervalles de temps constants mais de contrôler constamment son mouvement. Doeblin étudie alors les équations vérifiées par la probabilité  $P(E, \mathcal{E}, t)$ , probabilité que le point mobile parti à l'instant initial de  $E$  se trouve après un intervalle de temps  $t$  dans  $\mathcal{E}$ , et notamment l'équation de Smoluchowsky (\*)<sup>229</sup> :

$$\begin{aligned} 0 &\leq P(E, \mathcal{E}, t) \leq 1 \\ P(E, W, t) &= 1 \\ (*) \quad P(E, \mathcal{E}, t + \tau) &= \int_W P(F, \mathcal{E}, t) P(E, d\mathcal{A}_F, \tau) \end{aligned}$$

Doeblin retrouve et généralise alors des travaux d'Hostinský et surtout de Kryloff et Bogoliouboff dans KRYLOFF et BOGOLIUBOFF 1936, où ces derniers, reprenant des théorèmes de Fréchet, ont étudié sous certaines hypothèses les propriétés asymptotiques des solutions de l'équation de Smoluchowsky<sup>230</sup>. Il remplace les sommes de variables aléatoires qu'il considérait précédemment, dans le cadre d'une suite discrète d'épreuves, par des intégrales attachées au mouvement aléatoire du mobile. Il montre qu'elles ont un sens et que leurs propriétés asymptotiques pour  $t \rightarrow \infty$  sont les mêmes que celles des sommes qu'il a étudiées précédemment<sup>231</sup>.

227. Plus précisément, Doeblin étudie le comportement asymptotique de  $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$  et calcule les parties principales de ces probabilités ainsi que d'autres grandeurs telles que les moyennes de Cesaro DOEBLIN 1938b, p. 75.

228. Fortet reconnaît d'ailleurs dans sa thèse que les résultats de Doeblin généralise les siens dans le cas des chaînes simples de Markov à espace d'états continus. Cf. la note écrite par Fortet FORTET 1939, p. 20. Les notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* de Fortet sont celles citées dans la note 206, il s'agit de celles qui sont reprises dans sa propre thèse.

229. Doeblin formule l'hypothèse que cette probabilité est indépendante de l'instant initial et de « tout ce que nous savons ou ne savons pas du mouvement du point mobile antérieur à cet instant initial », DOEBLIN 1938b, p. 105 (processus markoviens stationnaires d'après Lévy dans LÉVY 1955. L'équation de Smoluchowsky est encore appelé équation de Chapman-Kolmogorov, cf. par exemple MAZLIAK 2007, p. 167.

230. Les hypothèses formulées (cf. DOEBLIN 1938b, p. 105-106 par Doeblin le placent dans un cas plus général. Il suppose ainsi que la mesure de  $W$  est bornée, qu'il existe trois nombres positifs  $T_1, a, \alpha$  tels qu'on ait quel que soit  $E$ ,  $P(E, \mathcal{E}; T_1) < 1 - a$  si  $\text{mes}(\mathcal{E}) < \alpha$ , que  $P(E, \mathcal{E}, t)$  est continue si  $t > T_1$  par rapport à  $t$ . Cf. DOEBLIN 1938b, p. 105.

231. Avec des formulations équivalentes, il retrouve des convergences vers la loi de Gauss et que certaines variables vérifient asymptotiquement le théorème du logarithme itéré, DOEBLIN 1938b, p. 4 et p.106-121.

Le rapport de Fréchet sur la thèse de Doeblin souligne à quel point le mémoire est riche en résultats. Doeblin prolongera d'ailleurs encore son étude complète des chaînes de Markov à espaces d'états discrets et continu dans des publications ultérieures<sup>232</sup>. Fréchet souligne également l'importance de la méthode utilisée par Doeblin : elle se distingue des méthodes anciennes par un mode de raisonnement direct qui reste dans le domaine du calcul des probabilités et qui ne « fait pas appel à des théories algébriques ou analytiques ».

### La thèse de Fortet

Le mémoire de Fortet porte également en partie sur la théorie des probabilités en chaîne, mais le sujet est abordé d'un autre point de vue, celui de la théorie des opérations linéaires et de leurs itérations. Il n'adopte par les méthodes probabilistes utilisées par Doeblin. L'une des théories qu'il emploie fréquemment au cours de son mémoire est la théorie des noyaux de Fredholm, dont Fréchet a démontré les analogies avec la théorie des substitutions<sup>233</sup>.

Fortet part ainsi de la théorie des opérations linéaires « complètement continues »<sup>234</sup> étudiées par Riesz et en étudie certains points<sup>235</sup>. Par exemple<sup>236</sup>, Fortet résout un problème, énoncé par Fréchet dans FRÉCHET 1934a et FRÉCHET 1936, sur l'expression exacte de la  $n$ -ième itérée  $U^{(n)}$  d'une opération continue  $U$ . Il part alors des résultats de Fréchet<sup>237</sup> établissant une expression asymptotique de  $U^{(n)}$  en fonction de  $n$ <sup>238</sup>.

La théorie des opérations linéaires et celle des opérations linéaires non « complètement continues », apparaissent naturellement dans la théorie des probabilités en chaîne selon l'approche choisie par Fréchet. La thèse de ce dernier consiste alors à étu-

232. Cf. par exemple DOEBLIN 1940. Sur le devenir de Doeblin après 1938, de nombreux articles et ouvrages ont été écrits à son sujet, notamment à l'occasion de l'ouverture du pli cacheté de ce mathématicien en 2000, cf. COHN 1993; PETIT 2005; BRU et YOR 2002; DOEBLIN 2000.

233. Cf. par exemple FRÉCHET 1936, ouvrage auquel fait référence Fortet, FORTET 1939, p. 204. D'après Bernard Bru et Jacques Neveu, c'est d'ailleurs Fréchet qui aurait proposé une telle approche à Fortet, cf. BRU et NEVEU 1998, p. 85.

234. autrement dit compacts dans la terminologie actuelle.

235. Cf. FORTET 1939, p. 15. Dans BRU et NEVEU 1998, Bernard Bru et Jacques Neveu, utilisant la terminologie actuelle, désigne cette théorie comme la théorie spectrale des opérateurs compacts de Riesz.

236. Cf. la quatrième section de sa thèse, FORTET 1939, p. 203-229.

237. Dans FRÉCHET 1934a.

238. Plus précisément il regarde dans ce quatrième chapitre, le cas particulier suivant du problème, cf. FORTET 1939, p. 203 : « Étant donnée dans l'espace de Hilbert ou espace  $L^{(2)}$  une substitution algébrique linéaire  $A$  dont les coefficients  $A_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, \infty$ ) réels ou complexes satisfont à la condition :  $\sum_{i,k} |a_{ik}|^2 = M < \infty$ , déterminer une expression en fonction de  $n$  de la  $n$ ième itérée  $A^n$

de  $A(= A^1)$  ». En outre, une partie de la cinquième section du mémoire (quatre des cinq notes qui y sont exposées) est également consacrée à l'étude de problèmes de la théorie des substitutions et de leurs analogues dans la théorie des noyaux de Fredholm. Fortet s'intéresse alors en particulier aux substitutions de Dixon, cf. FORTET 1939, p. 230.

dier les applications de la première de ces théories sur la seconde et à résoudre certains problèmes de probabilités au moyen de la théorie générale de ces substitutions.

Dès l'introduction de sa thèse, Fortet expose ainsi les deux problèmes distincts de la théorie des probabilités en chaînes qu'il va examiner. Le premier porte sur les chaînes de Markov simples où il y a une infinité dénombrable d'états possibles. Fortet introduit la suite des probabilités de la même façon que Doeblin, dans le cas fini. La différence est ici sur les indices de sommations qui vont jusqu'à l'infini. Les états sont notés :  $E_1, \dots, E_i, \dots$  ( $i = 1, 2, \dots, \infty$ ) ;  $p_{ik}$  désigne la probabilité de passer de l'état  $E_i$  à l'état  $E_k$  en une épreuve et cette probabilité est supposée indépendante du moment où l'expérience correspondante est réalisée. D'après Fortet, on a alors, en notant  $P_{ik}^n$  la probabilité pour que le système passe de  $E_i$  à  $E_k$  à la suite de  $n$  expériences consécutives, les relations suivantes :  $P_{ik}^1 = p_{ik}$ ,  $P_{ik}^n \geq 0$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}^n = 1$ ,  $P_{ik}^{m+n} = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}^m \cdot P_{jk}^n$ , pour  $m$  et  $n$  entiers positifs et aussi pour  $m = 1$ . Le problème consiste à étudier le comportement asymptotique des  $P_{ik}^n$ .

Le second problème énoncé par Fortet est relatif au cas où un état possible d'un système aléatoire  $S$  est représenté par un point  $E$  d'un espace à un nombre fini de dimensions. Fortet suppose alors que l'ensemble des points  $E$  est un ensemble  $V$  mesurable et qu'il existe une densité de probabilité  $p(E, F)$  relativement à cet ensemble. Il s'agit donc de chaînes de Markov simples, constantes, à une infinité non dénombrable d'états possibles, sous l'hypothèse de l'existence d'une densité de probabilité convenable. Fortet poursuit alors certaines recherches de Fréchet<sup>239</sup> et étudie le comportement asymptotique des fonctions  $P^n(E, F)$  satisfaisant aux conditions suivantes, pour  $n$  et  $m$  des entiers strictement positifs<sup>240</sup> :  $P^1(E, F) = p(E, F)$ ,  $P^n(E, F) \geq 0$ ,  $\int_V P^n(E, F) dF = 1$ ,  $P^{m+n}(E, F) = \int_V P^m(E, G) P^n(G, F) dG$ ,  $P^{n+1}(E, F) = \int_V p(E, G) P^n(G, F) dG$ .

Dans le premier chapitre de son mémoire, Fortet examine ces deux problèmes et étudie les comportements asymptotiques de  $P_{ik}^n$  et de  $P^n(E, \omega)$  par une méthode qu'il appelle « méthode de Markov », « applicable seulement aux problèmes de probabilités »<sup>241</sup>, et qui ne fait pas encore intervenir la théorie des opérateurs linéaires. Dans le cas d'une infinité dénombrable d'états possibles (problème 1), cette méthode repose sur des considérations relatives à la convergence de séries et à la limite de séries convergentes, elle dépend d'une certaine condition que doit vérifier  $P_{ik}^n$ <sup>242</sup>. Dans le cas

239. Fortet renvoie notamment à FRÉCHET 1933b, p. 179. Dans cet article, Fréchet reprend une partie du cours sur les probabilités en chaîne qu'il a donnée à la faculté des sciences de la Sorbonne pendant l'année 1931-1932, cf. FRÉCHET 1933b, p. 176. Fortet signale à plusieurs reprises que cette étude est une suite des travaux de Fréchet, FORTET 1939, p. 18, p. 47, p. 62.

240. Cf. FORTET 1939, p. 18. L'intégrale utilisée est ici l'intégrale de Lebesgue, cf. FORTET 1939, p. 44. Comme il le précise alors, cela entraîne des conditions de mesurabilité de  $P^n(E, F)$  sur  $V$  quels que soient  $n$  et  $E$  fixés, de  $P^m(E, G) P^n(G, F)$  en  $G$ .

241. Cf. FORTET 1939, p. 19.

242. Cf. FORTET 1939, p. 29-30 : Fortet suppose qu'il existe un indice  $j_0$  et un indice  $\nu$  tels que  $P_{ij_0}^\nu > \eta > 0$ . Il renvoie à l'ouvrage d'Hostinský, HOSTINSKY 1931, p. 14, et généralise la méthode de Markov dans le cas d'un nombre fini d'états possibles, méthode que rappelle Hostinský.

d'une infinité non dénombrable, la méthode utilise des outils analogues et son application dépend d'une condition, que Fortet appelle « condition de Markov », que doit vérifier  $P^n(E, \omega)$ <sup>243</sup>. Fortet y généralise les travaux de Fréchet sur le comportement asymptotique des fonctions de points  $P^n(E, F)$  et sur le comportement des fonctions d'ensembles  $P^n(E, \omega)$ , où  $\omega$  est une partie mesurable quelconque de  $V$ <sup>244</sup>.

La suite de la thèse repose sur la théorie des opérateurs linéaires et son application à la résolution du premier problème énoncé par Fortet. En effet, pour étudier le comportement asymptotique de  $P_{ik}^n$ , Fortet considère l'itération de l'opération linéaire  $P$  définie par la formule<sup>245</sup> :

$$y_i = \sum_k p_{ik} x_k$$

Comme le montre Fortet après avoir introduit la théorie des opérations linéaires, cette opération  $P$  est une substitution linéaire dans l'espace  $D_\omega$  de Fréchet<sup>246</sup> qui n'est qu'exceptionnellement « complètement continue »<sup>247</sup>.

Fortet étudie ensuite les substitutions linéaires dans  $D_\omega$  et leurs itérations et il généralise ses résultats au cas des opérations linéaires quelconques<sup>248</sup>. Les substitutions ne sont plus supposées « complètement continues »<sup>249</sup>. Il introduit des notions généralisant la théorie des noyaux de Fredholm<sup>250</sup> telles que la « résolvante » d'une substitution, qu'il emprunte à Riesz, et il en donne certaines propriétés, comme par exemple l'holomorphie sur le domaine de définition<sup>251</sup>. Fortet introduit également le « rayon polaire » de la substitution<sup>252</sup>. Il applique ensuite directement les résultats obtenus dans la théorie du rayon polaire au premier problème dans le cas où le rayon

243. Cf. FORTET 1939, p. 47-48 : « il faut qu'il existe une partie  $\Omega$  de  $V$ , mesurable et de mesure positive, un rang  $\nu$  et un nombre positif  $\eta$ , tels que l'on ait en tout point de  $F$  de  $\Omega$ ,  $\min_{E \in V} p^\nu(E, F) \geq \eta$  ».

244. Cette généralisation est d'ailleurs reconnue explicitement par Fréchet dans le rapport qu'il écrit sur la thèse, cf. également FORTET 1939, p. 62.

245. Cf. FORTET 1939, p. 17.

246. Fortet renvoie à l'ouvrage de Fréchet *Les espaces abstraits*, FRÉCHET 1928. L'espace  $D_\omega$  est l'espace des points  $x$  dont les coordonnées  $x_1, \dots, x_k, \dots$  ( $k = 1, 2, \dots, \infty$ ) sont telles que  $|x_k|$  reste borné quand  $k$  varie. Cet espace est muni d'une distance entre deux points  $x$  et  $x'$ , notée  $|x - x'|$  qui est égale à la borne supérieure de  $|x_k - x'_k|$  lorsque  $k$  varie, cf. FORTET 1939, p. 63-64.

247. Cf. FORTET 1939, p. 17.

248. Selon la définition donnée par Fortet, FORTET 1939, p. 64, une « substitution linéaire » est une transformation ponctuelle, univoque, distributive et continue.

249. Selon la définition donnée par Fortet, FORTET 1939, p. 66, une substitution est dite « complètement continue » si elle transforme tout ensemble borné de points de  $D_\omega$  en un ensemble compact.

250. D'après Fréchet dans le rapport sur la thèse. Ce dernier insiste particulièrement dans son rapport sur les deux notions ci-dessous.

251. Si  $A$  est une substitution linéaire et si  $\lambda \in \mathbb{C}$  telle que  $E - \lambda A$  admette une réciproque (où  $E$  est la transformation identité), la résolvante est la fonction de  $\lambda$  définie par :  $A(0) = A$  si  $\lambda = 0$  et par  $A(\lambda) = \frac{1}{\lambda}[(E - \lambda A)^{-1} - E]$  si  $\lambda \neq 0$ , cf. FORTET 1939, p. 71.

252. Cf. FORTET 1939, p. 79. Fortet appelle « rayon polaire  $P$  de  $A(\lambda)$  ou de  $A$  le plus grand des nombres positifs  $\rho$  tels que, dans tout domaine complémentaire intérieur au cercle  $|\lambda| \leq \rho$ ,  $A(\lambda)$  n'ait pour points singuliers qu'un nombre fini de pôles de rang fini ». La généralisation de la théorie de Fredholm évoquée précédemment se trouve notamment illustrée dans le théorème suivant énoncé par

polaire est  $> 1$ . Il en déduit alors dans certains cas le comportement asymptotique de  $P_{ik}^n$ , en s'inspirant explicitement de certaines méthodes de Fréchet<sup>253</sup>. Il examine également un autre cas particulier où le rayon polaire de la substitution correspondante n'est pas strictement supérieur à 1 et il applique les résultats trouvés à l'étude du comportement asymptotique de  $P_{ik}^n$ <sup>254</sup>.

En plus de ces deux problèmes, Fortet étudie également un problème plus général de la théorie des probabilités en chaîne : celui des chaînes à liaisons complètes déjà abordées par Onicescu et Mihoc dans ONICESCU et MIHOC 1935. Ce problème conduit à des opérations linéaires d'un type plus complexe que ceux étudiés pour aborder le premier problème. Fortet se propose d'apporter quelques compléments aux résultats déjà énoncés par les deux mathématiciens roumains. Il décrit ainsi le problème des chaînes à liaison complète d'Onicescu et Mihoc, nommées encore « chaînes (O.M) »<sup>255</sup> : on considère un système aléatoire  $S$  qui peut prendre l'un ou l'autre des états  $E_1, \dots, E_m, E_{m+1}$  à la suite d'expériences successives numérotées  $1, 2, \dots, n, \dots$ . Fortet suppose que les probabilités effectives (et non a priori) des états  $E_j$  à la  $n-1$ <sup>ème</sup> expérience ont été respectivement  $x_1(n-1), \dots, x_j(n-1), \dots, x_{m+1}(n-1)$ . Si la  $n-1$ <sup>ème</sup> expérience a réalisé d'autre part l'état  $E_i$ , alors les probabilités  $x_k(n)$  des états  $E_k$  à la  $n$ <sup>ème</sup> expérience sont des fonctions déterminées des  $x_j(n-1)$  et de  $i$  et  $x_k(n) = \phi_{ik}[x_1(n-1), \dots, x_j(n-1), \dots, x_m(n-1)]$  où  $(k = 1, \dots, m), (i = 1, \dots, m+1)$ . La chaîne est alors déterminée par la donnée des  $\phi_{ik}$  et des probabilités  $x_j(1) = x_j$  relatives à la première expérience. Fortet étudie le comportement asymptotique de la probabilité  $P_s^{(n)}(x_1, \dots, x_m)$  pour que la  $n$ <sup>ème</sup> épreuve réalise l'état  $E_s$ .

Fortet reprend la méthode utilisée par Onicescu et Mihoc dans ONICESCU et MIHOC 1935. Il utilise ainsi des résultats sur les points d'attraction de certaines transformations pour montrer la convergence d'itérées de fonctions définies par une relation de récurrence. Il compare d'ailleurs cette méthode avec la sienne fondée sur la théorie des opérations linéaires et de leurs itérations dans un cas particulier et il complète ainsi certains résultats établis par les mathématiciens roumains.

---

Fortet, FORTET 1939, p. 79 : « Étant donnée la substitution  $A$  de rayon polaire  $P$ , tant que  $|\lambda| < P$ , on peut appliquer à l'équation :

$$x - \lambda A(x) = y$$

les théorèmes classiques de Fredholm. »

253. Cf. FORTET 1939, p. 99 et FRÉCHET 1934b. Le cas est celui où la substitution considérée relative à  $p_{ik}$  a un rayon polaire  $> 1$ , que Fortet caractérise non seulement du point de vue de l'analyse spectrale qu'au point de vue du calcul des probabilités, cf. FORTET 1939, p. 98. Pour l'énoncé de certaines propriétés, cf. par exemple FORTET 1939, p. 110-111.

254. Il s'agit du cas des substitutions homogènes finies qu'il étudie FORTET 1939, p. 115-172.

255. FORTET 1939, p. 173-174.

C'est sur ce sujet que Doeblin et Fortet ont collaboré dans DOEBLIN et FORTET 1937a<sup>256</sup>. Les deux doctorants y étudiaient des cas particuliers de chaînes à liaison complètes en reprenant certaines des notions exposées par Doeblin dans sa propre thèse (comme celle des groupes finaux). La méthode utilisée n'est pas la même que celle employée Fortet dans sa thèse pour les chaînes (O.M) et c'est sans doute la raison pour laquelle le doctorant ne fait pas référence à cette publication antérieure<sup>257</sup>.

Le lien intellectuel entre Maurice Fréchet et Robert Fortet apparaît de façon explicite tout au long de sa thèse<sup>258</sup>. Fortet reprend son approche fondée sur les opérateurs linéaires, il étudie certains problèmes énoncés par le mathématicien. Si certaines questions qu'il étudie sont communes à la thèse de Doeblin, les approches et les méthodes des deux doctorants diffèrent fortement. Fortet insiste surtout sur sa méthode et non pas sur les résultats qu'il obtient sur les deux problèmes qu'il examine. Il affirme d'ailleurs dès l'introduction de son mémoire que ses résultats sont dépassés par ceux trouvés par Doeblin dans sa thèse ainsi que par ceux de Kolmogorov établis en parallèle et en simultané de Doeblin<sup>259</sup>. Sa méthode fondée sur la théorie des opérateurs<sup>260</sup> paraît donc moins bien adaptée à l'étude des chaînes que la méthode probabiliste de Doeblin. Elle lui permet cependant d'énoncer dans le cas des chaînes dénombrables une condition simple de régularité, qui est généralisée par Doeblin dans le cas des chaînes à espace d'états continu<sup>261</sup>. La méthode utilisée par Fortet, dont Fréchet est l'un des initiateurs, est qualifiée par ce dernier de méthode « plus générale »<sup>262</sup> car « elle peut s'appliquer à des problèmes, non seulement sans rapport avec la théorie des probabilités, mais *de nature mathématique plus générale* ». Cette description que donne Fréchet et l'avantage qu'il accorde à la méthode reprise par Fortet renforcent alors la filiation entre les travaux du doctorant et ceux du mathématicien. Bernard Bru et Jacques Neveu insistent sur le domaine étendu d'applications de cette méthode lorsqu'ils parlent des travaux réalisés par Fortet lors de l'élaboration de son doctorat. Ils montrent les liens que fait Fortet entre diverses théories, telles que le calcul des probabilités, les équations intégrales, les substitutions à une infinité de variables, ce que confirme d'ailleurs Fréchet dans le rapport de thèse. Ils écrivent ainsi que le cas des chaînes dénombrables

---

256. Comme je l'ai déjà mentionné au début de cette sous-partie.

257. À la fin de l'article se trouve cependant une note sur la résolution d'une équation fonctionnelle avec la théorie des opérations linéaires de Riesz, cf. DOEBLIN et FORTET 1937a, p. 142-148. On peut y voir l'annonce de la méthode employée par Fortet dans sa thèse.

258. Ce qui confirme l'historiographie écrite par Bernard Bru sur les relations intellectuelles entre les deux mathématiciens dans BRU 2002.

259. Cf. FORTET 1939, p. 20.

260. Cf. aussi BRU 2003, p. 171.

261. Cf. DOEBLIN 1938b.

262. Cf. FRÉCHET 1934a, p. 69.



d'abord étudié par Fortet introduit ensuite naturellement aux processus à valeurs dans des domaines non bornés dont Fortet est l'un des précurseurs<sup>263</sup>.

### 6.3.3 Michel Loève : une thèse influencée par les travaux de Paul Lévy

Comme je l'ai déjà indiqué précédemment, Michel Loève a suivi différents cours à la faculté des sciences de la Sorbonne au début des années 1930 et notamment ceux de probabilités et de statistiques. Le doctorant s'est d'abord orienté vers la physique théorique et l'actuariat (sujet sur lequel il a travaillé avec Darmois) avant de faire une thèse de probabilités, orienté par Maurice Fréchet<sup>264</sup>.

Son doctorat, *Étude asymptotique des sommes de variables aléatoires liées*, est le dernier des six premiers doctorats soutenus entre 1937 et 1941 et apparaît ainsi comme la fin d'une première vague de recherche en probabilités<sup>265</sup>. Michel Loève y fait une généralisation et une mise au point des différents résultats, élaborés pendant la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle, sur la convergence de sommes de variables aléatoires. C'est en tout cas l'une des approches explicitée par le doctorant dans l'introduction de son mémoire : il y rappelle « les résultats les plus importants du Calcul des Probabilités concernant les propriétés asymptotiques des suites d'événements aléatoires indépendants et des sommes de variables aléatoires indépendantes »<sup>266</sup>. Michel Loève se situe dans un cadre plus général que celui des événements et variables aléatoires

---

263. Cf. BRU et NEVEU 1998, p. 85-86 : « Il s'agit d'étudier le comportement des itérés d'un opérateur défini sur un espace de Banach convenable qui n'est généralement pas compact. On peut alors envisager une généralisation adéquate de la théorie spectrale des opérateurs compacts de Riesz, ce que réalise Fortet dans sa thèse. Il étend ainsi la théorie classique des opérateurs quasi-compacts de Kryloff et Bogoliouboff. »

Sur l'impact de la thèse de Fortet, voir l'analyse qu'en fait Bernard Bru dans BRU 2002. Les auteurs de traités ne semblent pas dans un premier temps associer le nom de Fortet à ces résultats. Quant aux recherches connectées aux résultats de Kryloff et Bogoliouboff, Bru indique qu'on retient davantage les noms des mathématiciens russes ainsi que ceux des mathématiciens japonais Yosida et Kakutani qui ne publie sa théorie qu'en 1941. Bru précise que toute la théorie de Yosida Kakutani est connue de Fortet et de Doeblin dès 1937, cf. BRU 2002, p. 22, mais ces derniers n'y font pas référence dans leurs doctorats respectifs.

264. Cf. BRU 1992, p. 43. La nécrologie de Loève, UNIVERSITY OF CALIFORNIA (SYSTEM) ACADEMIC SENATE 1980 confirme ce propos. Une autre information y figure : Michel Loève a obtenu le titre d'actuaire de l'université de Lyon en 1936.

On peut également voir un signe de ses thèmes de recherche antérieurs à sa thèse dans les notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* de Loève qu'il mentionne dans la bibliographie de sa thèse, LOEVE 1941a, p. 69 : deux notes datent de 1934 : « Sur l'intégration des équations de Dirac », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 198 (1934) 799-801 et « Sur les moyennes de la théorie de Dirac », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 198 (1934) 1303-1305.

265. Une dernière thèse, celle d'André Blanc-Lapierre sera soutenue en 1945.

266. Cf. LOEVE 1941a, p. 1. C'est-à-dire pour les deux sujets la « loi des grands nombres », la « loi forte des grands nombres » et la « tendance centrale », le dernier point correspondant au théorème appelé actuellement « théorème limite-centrale » dans les ouvrages de probabilités.

indépendants, puisqu'il étudie comment ces propriétés évoluent lorsque qu'on suppose les événements et les variables dépendants.

Sur l'étude de la dépendance, Loève signale les travaux qui ont déjà été réalisés sur les chaînes simples de Markov et il mentionne les contributions de Maurice Fréchet et « de ses élèves (Doebelin, Fortet) »<sup>267</sup>. Mais il ne situe pas son travail dans leur continuité. Il ne considère à aucun moment de sa thèse les chaînes de Markov et ne cite ni les thèses de Doebelin et Fortet ni les publications de Fréchet sur ce sujet. Il situe son travail dans une direction de recherche évoquée par Fréchet à l'occasion d'une conférence d'introduction au colloque international de Genève en 1937. Ce dernier, s'exprimant au sujet de l'évolution récente des sujets de ce domaine, y affirme : « C'est d'abord un effort [...] pour se libérer de la condition d'indépendance dans laquelle ont été obtenues les propriétés fondamentales classiques »<sup>268</sup>. C'est à cet effort que se consacre Loève. Il fait référence tout au long de son travail aux travaux classiques de probabilités, comme ceux de Poincaré, de Borel, de Cantelli, de Tchebycheff, de Bienaymé de Kolmogorov, etc., qu'il interprète comme des cas particuliers de ses propres résultats<sup>269</sup>. Sa volonté de généraliser les propositions classiques s'étend également au cas de l'indépendance<sup>270</sup>.

Michel Loève prend comme point de départ de ses recherches les travaux de Serge Bernstein et de Paul Lévy sur l'étude de la dépendance et il s'y réfère fréquemment. Il signale en outre dès l'introduction de son mémoire l'extension par Bernstein en 1922 « du théorème de Liapounoff à des variables qu'il appelle presque indépendantes »<sup>271</sup>, ainsi que l'étude par Paul Lévy en 1935-1936 des variables enchaînées<sup>272</sup>. C'est ce type de résultats qu'il cherche à obtenir.

L'une des principales idées de Michel Loève est d'imposer aux variables aléatoires des hypothèses asymptotiques pour étudier le comportement asymptotique de leur somme. À cette fin, il introduit dans un premier temps de nouvelles notions inspirées par le travail de Kolmogoroff, telles que les notions d'ordre de grandeur, d'ordre infinitésimal d'une variable aléatoire en probabilité ou presque certainement, de stabilité d'une

---

267. Cf. LOEVE 1941a, p. 1.

268. Cf. FRÉCHET 1939.

269. C'est d'ailleurs ce que reconnaît explicitement Fréchet dans le rapport qu'il écrit sur la thèse où il affirme que Loève a réussi « à englober dans plusieurs théorèmes plusieurs groupes des résultats les plus généraux obtenus avant lui, ces résultats devenant ainsi de simples cas particuliers de ses propres critères ».

270. Loève écrit ainsi en introduction de son mémoire : « Nous avons cherché de plus à obtenir des propositions qui même dans le cas de l'indépendance, seraient plus générales que certaines propositions classiques », LOEVE 1941a, p. 2.

271. Le théorème de Liapounoff est l'équivalent de ce qui aujourd'hui s'appelle le théorème centrale limite, cf. LOEVE 1941a, p. 1.

272. Dans le cours de la thèse, Loève fera ainsi référence à LÉVY 1935, 1936. Cf. également MAZLIAK 2009a où Laurent Mazliak analyse certains travaux de Lévy sur les variables enchaînés.

suite de variable aléatoire, de fluctuation résiduelle<sup>273</sup>. Avec ces nouveaux concepts, Loève reformule, retrouve et apporte des compléments à plusieurs théorèmes dont les théorèmes de Bernoulli et de Poisson. Ces théorèmes apparaissent alors comme des cas particuliers d'un énoncé plus général de Loève sur la condition nécessaire et suffisante de stabilité d'une suite d'événements<sup>274</sup>. Michel Loève définit également les notions d'indépendance en moyenne des variables aléatoires et d'indépendance en moyenne asymptotique et il établit des critères de réalisation d'une infinité d'événements. Il fait alors apparaître les théorèmes de Borel et de Cantelli comme des cas particuliers de ces critères<sup>275</sup>.

Michel Loève utilise ensuite une démarche similaire pour généraliser la loi des grands nombres et la loi de la « tendance centrale ». Il étudie les différentes démonstrations de ces théorèmes et examine les conditions existantes sur les variables aléatoires. Il formule alors des hypothèses plus générales où ne figure plus la condition d'indépendance des variables et montre que les conclusions des théorèmes restent encore valables.

Pour la loi des grands nombres, Loève explique ainsi qu'un des points de la démonstration classique utilisant la méthode de Tchebycheff<sup>276</sup> repose sur l'« égalité de Bienaymé » :

$$\sigma^2(S_n) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)$$

où  $\sigma$  représente l'écart quadratique moyen d'une variable et  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  avec les  $X_i$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Loève signale alors les généralisations déjà effectuées par Kolmogoroff dans KOLMOGOROFF 1933 et par Paul Lévy dans LÉVY 1935, 1936, où ils remplacent l'hypothèse d'indépendance des variables par celle de non-corrélation des variables aléatoires<sup>277</sup>. Lévy considère également la moyenne  $\mathcal{M}_{i-1}(X_i)$ , qui représente la moyenne de la va-

273. Cf. LOEVE 1941a, p. 4-6. Il reprend notamment la définition de suites stables de Kolmogoroff dans KOLMOGOROFF 1933 qu'il mentionne explicitement.

274. Cf. LOEVE 1941a, p. 9. Le théorème de Bernoulli que cite Loève, p.5, est le suivant : « une suite d'événements indépendants, de probabilité  $p$  constante est stable ». Poisson formule le même énoncé en supposant seulement que les événements n'ont pas la même probabilité. Une suite d'événements  $(A_i)$  est dite stable selon Loève si pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $P\left(\left|\frac{R_n}{n} - \frac{E(R_n)}{n}\right| > \epsilon\right) \rightarrow 0$  avec  $\frac{1}{n}$ , où  $R_n$  représente le nombre des  $n$  premiers événements de la suite qui se réalisent (autrement écrit :  $R_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$ ), cf. LOEVE 1941a, p. 4-5.

275. Ces théorèmes de Borel énoncent des résultats quant à la réalisation d'une infinité d'événements en formulant des hypothèses d'indépendances sur la suite d'événements et sur la convergence de la série  $\sum P(A_i)$ . Dans le cas où cette série est convergente Cantelli a étendu le résultat de Borel sur la probabilité nulle de réalisation d'une infinité d'événements au cas où ces événements ne sont pas indépendants, cf. LOEVE 1941a, p. 13-17.

276. Cf. LOEVE 1941a, p. 20.

277. C'est-à-dire :  $\mathcal{M}(X_i - \overline{X}_i)(X_k - \overline{X}_k) = 0$  ( $1 \leq i < k \leq n$ ) où  $\mathcal{M}(X)$  et  $\overline{X}$  sont deux notations pour la moyenne de la variable aléatoire  $X$ .

riable  $X_i$  évaluée lorsqu'on connaît les valeurs réalisées de  $X_1, \dots, X_{i-1}$ ; son hypothèse s'écrit alors  $\mathcal{M}_{i-1}(X_i) = 0$  pour  $i = 1, 2, \dots$  quelles que soient les valeurs réalisées.

Loève généralise ce problème en considérant<sup>278</sup> tout d'abord des suites de variables à double indice  $(X_{n,i})_{n \geq 1, 1 \leq i \leq n}$  et des sommes à double indice  $S_{n,\nu} = X_{n,1} + X_{n,2} + \dots + X_{n,\nu}$  et en supposant que toutes les variables sont de moyennes nulles. Il désigne également par  $\mathcal{M}'(X_{n,i})$  la moyenne de  $X_{n,i}$  évaluée lorsqu'on connaît la valeur réalisée de  $S_{n,i-1}$  et par  $\sup \mathcal{M}'(X_{n,i})$  la borne supérieure de cette quantité lorsque la valeur réalisée de  $S_{n,i-1}$  varie. Les deux théorèmes suivants sont typiques<sup>279</sup> :

**Théorème D** Lorsque pour  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\sum_{i=1}^n \sup |\mathcal{M}'(X_{n,i})| \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \sup \mathcal{M}(X_{n,i}^2) \rightarrow 0,$$

la suite  $\{S_{n,n}\}$  est stable.

**Théorème H** Lorsqu'on choisit les  $a_n$  de manière que

$$0 < a_n < a_{n+1}$$

et qu'il existe une suite  $a_{n_i}$  telle que  $\frac{a_{n_i}}{a_{n_i+1}} \rightarrow \alpha > 0$  fixe lorsque  $i \rightarrow \infty$ ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^n \sup |\mathcal{M}'(X_i)| \rightarrow 0, \quad \text{avec } \frac{1}{n}, \text{ (les } (X_i) \text{ étant tels que } \mathcal{M}(X_i) = 0 \text{ pour} \\ i = 1, 2, \dots), \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{a_i^2} < \infty, \quad \text{en posant } \sigma_i^2 = \mathcal{M}(X_i^2), \end{aligned}$$

alors  $\frac{S_n}{a_n} \rightarrow 0$  avec  $\frac{1}{n}$  presque certainement.

Les lois « faible » (convergence en probabilité) et « forte » des grands nombres (convergence presque certaine) apparaissent alors respectivement comme des cas particuliers de ces deux différents théorèmes<sup>280</sup>.

Michel Loève procède de la même manière pour démontrer une version généralisée du théorème sur la convergence des lois des sommes de variables aléatoires vers la loi de Moivre-Laplace ou loi de Gauss, selon les deux noms qu'il utilise. Il modifie les deux méthodes de démonstration du théorème dans le cas de l'indépendance des variables aléatoires : la première due à Liapounoff et généralisée par Lindeberg, appelée encore « méthode des moments » par Loève<sup>281</sup>, la seconde qui utilise les fonctions caractéristiques des variables et que Paul Lévy et Feller ont contribué à améliorer. Loève

278. Cf. LOEVE 1941a, p. 21.

279. respectivement p.25 et p.35 de la thèse de Loève.

280. De même que le théorème de Glivenko-Cantelli relatif aux fonctions de répartitions des variables aléatoires, cf. LOEVE 1941a, p. 34.

281. Fréchet la désigne de la même façon dans le rapport de thèse.

fait également apparaître comme cas particuliers de ces résultats ceux obtenus par Bernstein dans le cas de variables aléatoires que la mathématicien appelle « presque indépendantes »<sup>282</sup>, et par Lévy en 1935-1936. Il obtient ainsi un « théorème fondamental »<sup>283</sup>, qui inclut le théorème centrale limite pour des hypothèses aussi larges que possibles. C'est d'ailleurs le seul théorème que cite explicitement Fréchet dans le rapport de thèse et il insiste fortement sur son importance<sup>284</sup>.

**Théorème fondamental** *La loi de  $S_{n,n}$  tend vers la loi de Moivre-Laplace à moyenne 0 et à fluctuation  $\sigma^2$  quand, pour  $n \rightarrow \infty$ , et pour tout  $\epsilon > 0$ ,*

$$\sum_{i=1}^n \sup \int_{|\xi| \leq \epsilon} dF'_{n,i}(\xi) \rightarrow 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \sup \left| \int_{|\xi| \leq \epsilon} \xi dF'_{n,i}(\xi) \right| \rightarrow 0,$$

*et, pour chaque valeur de  $\epsilon$ , s'il existe des quantités  $\sigma_{n,i}^2$  telles que*

$$\sum_{i=1}^n \sup \left| \int_{|\xi| \leq \epsilon} \xi^2 dF'_{n,i}(\xi) - \sigma_{n,i}^2 \right| \rightarrow 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{n,i}^2 \rightarrow \sigma^2 \text{ fixe. } (0 < \sigma < \infty).$$

La thèse de Michel Loève apporte donc en 1941 une contribution à l'étude asymptotique des variables liées dans la suite des travaux de Bernstein et de Paul Lévy sur le sujet. Les différentes notions qu'il introduit lui permettent également de généraliser les théorèmes obtenus dans le cas de l'indépendance et il reprend dans ce cadre les trois résultats qu'il qualifiait en introduction de son mémoire comme « les résultats les plus importants du Calcul des probabilités »<sup>285</sup> : la loi des grands nombres pour des événements ou des variables aléatoires liés, la loi forte des grands nombres pour des variables aléatoires liées, la « tendance centrale » pour les variables aléatoires liées<sup>286</sup>. Loève établit également quelques propositions relatives aux moments des sommes de variables aléatoires liées. Il en applique certaines à l'étude d'une notion introduite par Serge Bernstein : la notion de rayon d'activité de la liaison entre variables aléatoires<sup>287</sup>.

282. Bernstein suppose également l'existence des trois premiers moments de ces variables aléatoires, cf. LOEVE 1941a, p. 37.

283. Qualifié ainsi par Loève et Fréchet.

284. Le théorème fondamental de Loève et ses différentes formes sont énoncés p.42 avec les mêmes notations que précédemment en désignant en outre par  $F'_{n,i}(x)$  la probabilité  $P'(X_{n,i} < x)$  pour que l'on ait  $X_{n,i} < x$ , évaluée sur la catégorie d'épreuves où l'on connaît la valeur réalisée de  $S_{n,i-1}$ .

285. Cf. LOEVE 1941a, p. 1.

286. Ces trois résultats font d'ailleurs l'objet de trois notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, présentées l'année de la soutenance de thèse, que mentionne Loève dans la bibliographie de son mémoire et auxquelles fait référence Fréchet dans le rapport de thèse : LOEVE 1941b,c,d.

287. Cette notion est introduite par Loève LOEVE 1941a, p. 60-61 : elle désigne l'écart entre les variables à partir duquel l'influence entre les variables correspondantes s'affaiblit : autrement dit il suppose un affaiblissement de la liaison entre les variables  $X_i$  et  $X_h$ , pour  $1 \leq i, h \leq n$ , dès lors que  $|i - h| > d_n$ , où  $d_n$  est le « rayon d'activité ou d'intensité de la liaison ».

Dans sa bibliographie, Loève ne mentionne aucune publication de Serge Bernstein datant des années 1930. On peut alors supposer que les résultats de ce dernier lui ont été communiqués par Maurice Fréchet, qui, malgré la situation politique en Russie, continue à entretenir une correspondance avec certains mathématiciens russes. Il semble ainsi avoir joué un rôle de diffuseur de certains de leurs résultats mathématiques<sup>288</sup>.

La démarche de Michel Loève peut être rapprochée de celle de Jacques Dufresnoy qui, en 1941 également, soutient une thèse, classée en théorie des fonctions<sup>289</sup>. Dufresnoy, avec une nouvelle méthode fondée sur une approche topologique de la théorie des fonctions de la variable complexe, introduite par Lars Ahlfors en 1935, y redémontre les théorèmes classiques de la théorie datant de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle et du début du XX<sup>ème</sup> siècle, comme le troisième théorème de Picard sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes ou les théorèmes de Landau et Schottky de 1904, des énoncés de Montel et de Valiron, etc. Dufresnoy comme Loève utilisent ainsi de nouvelles notions et de nouveaux concepts pour retrouver d'anciens résultats considérés comme classiques au moment de leur soutenance.

Si Bernard Bru décrit Michel Loève comme « orienté » par Maurice Fréchet, il semble que l'influence de ce mathématicien sur les travaux du doctorant est faible et relève davantage d'un rôle de conseil<sup>290</sup>. Les travaux de ce dernier cités par Loève sont essentiellement des livres récapitulatifs sur des sujets de probabilités, tels FRÉCHET 1937, 1938, où se trouvent rappelés d'autres résultats de mathématiciens<sup>291</sup>. En revanche, l'influence intellectuelle de Paul Lévy est plus importante en nombre de références que fait Loève de ses travaux. D'après Bernard Locker<sup>292</sup>, Lévy se plut à l'appeler « Mon élève et mon ami », sans doute après la guerre car, comme le souligne Bernard Locker, Loève n'a pas été son élève au sens académique du terme. D'ailleurs la correspondance entre Lévy et Fréchet montre qu'en 1941 Lévy ne connaissait pas encore les travaux du doctorant. Dans la lettre 45 datant du 6 août 1943, Lévy écrit ainsi à Fréchet qu'il a « enfin reçu la thèse de Loève » et que sa « première impression est très favorable »<sup>293</sup>. Dans la lettre 46 du 27 août 1943<sup>294</sup>, Lévy réagit aux cinquante premières pages qu'il a lues et il y discute de la nouveauté et de l'importance des théorèmes présentés par Loève, notamment celui sur la « tendance centrale », au regard de ses propres travaux. Paul Lévy n'a donc pas connaissance des recherches du docto-

---

288. Par exemple p.20, Loève évoque un résultat de Bernstein explicité par Fréchet dans FRÉCHET 1937.

289. Cf. le chapitre 5 précédent, p. 312.

290. En témoignent également les remerciements qu'adresse Loève à la fin de son introduction à Fréchet : il le remercie pour « l'intérêt qu'il a porté à [sa] thèse, [...], pour ses observations et conseils qui [lui] ont été aussi utiles pour les recherches que pour la rédaction et pour les nombreuses et instructives conversations dont [il a] tiré le plus grand profit », cf. LOEVE 1941a, p. 3.

291. Cf. par exemple LOEVE 1941a, p. 11, p. 20.

292. Cf. LOCKER 2001, p. 12.

293. Cf. BARBUT ET AL. 2004, p. 188.

294. Cf. BARBUT ET AL. 2004, p. 191.

rant pendant la période d'élaboration de la recherche et l'influence du mathématicien passe par ses écrits<sup>295</sup>. L'importance de cette influence dans la thèse de Michel Loève est unique dans le corpus des thèses de probabilités même si d'autres doctorants font référence à certains de ses travaux, comme nous le verrons.

### 6.3.4 Le calcul des probabilités pour modéliser des phénomènes biologiques et physiques

#### Le calcul des probabilités et la statistique appliqués à la modélisation de la théorie de l'hérédité. La thèse de Gustave Malécot

Gustave Malécot est de la promotion 1932 à l'École normale supérieure. D'après Maxime Lamotte<sup>296</sup>, il fut immédiatement remarqué par Georges Darmois pendant sa scolarité entre 1932 et 1935. Thomas Nagayaki affirme qu'il a ensuite bénéficié d'une bourse de recherche de quatre ans à l'Institut Henri Poincaré, où il a travaillé avec Darmois<sup>297</sup>. À l'issue de ces quatre ans, il soutient en 1939 une thèse, *Théorie mathématique de l'hérédité mendélienne généralisée*, à la frontière des statistiques, des probabilités et de la génétique, où une influence de Darmois se perçoit, comme nous le verrons.

Son sujet porte sur la théorie de l'hérédité, dont l'étude à la fin du XIX<sup>ème</sup> est traitée par deux méthodes distinctes : celle de Mendel et celle de Francis Galton et Karl Pearson. D'après Gustave Malécot<sup>298</sup>, les lois de Mendel supposent une hérédité « particulière » et font dépendre les enfants seulement des parents. Au contraire, les résultats de l'école biométrique anglaise<sup>299</sup> « traduisent une hérédité mélangée et continue, une dépendance en moyenne des enfants à l'égard des parents et aussi des divers ancêtres ». Pearson et Fisher ont déjà étudié la divergence apparente de ces deux théories. Gustave Malécot reprend ce sujet en se fondant sur la publication de R.A. Fisher de 1918<sup>300</sup>, « The correlation between relatives on the supposition of Mendelian

---

295. On en trouve également une trace dans le manuscrit de la thèse consultable à la bibliothèque Mathématiques-Recherches de l'Institut Mathématique de Jussieu. Une dédicace manuscrite écrite par Michel Loève y figure sur la couverture : « À M. le Professeur Paul Lévy "magicien ès-probas" dont la magnifique oeuvre fut et demeure à la base des travaux de l'auteur ».

296. Cf. LAMOTTE 1999a.

297. Cf. NAGYLAKEI 1989, p. 254. Nagayaki affirme en fait que Darmois fut le directeur de recherche de Malécot. Dans la mesure où cette fonction n'existe pas statutairement à cette époque, comme je l'ai déjà rappelé, je ne reprends pas exactement les propos de Nagayaki. Maxime Lamotte dans LAMOTTE 1999b, p. 59 affirme que Malécot pendant ces quatre années avait été recruté comme assistant de recherche par Darmois.

298. Cf. MALÉCOT 1939, p. 1.

299. L'utilisation du terme « école biométrique anglaise » n'est pas seulement utilisée par Darmois. On la retrouve employée non seulement dans le rapport qu'écrit Darmois sur le mémoire, mais également dans NAGYLAKEI 1989; EPPERSON 1999; GILLOIS 1999.

300. Il le reconnaît explicitement dans l'introduction de sa thèse, cf. MALÉCOT 1939, p. 2.

inheritance », FISHER 1918, qu'il qualifie de « fondamentale »<sup>301</sup>. Il s'agit donc d'une partie de la recherche de Fisher distincte de celle qui est étudiée par Daniel Dugué dans sa thèse. D'ailleurs Malécot ne fait à aucun moment référence au doctorat de ce dernier.

Le but de Malécot est en fait d'élucider l'ensemble de l'article de Fisher, de rendre rigoureux et de généraliser le rapprochement effectué par ce dernier entre les résultats de l'école biométrique anglaise et l'héritage de Mendel<sup>302</sup>. Il cherche ainsi à « développer systématiquement les hypothèses et les méthodes qui permettent d'étendre les lois de Mendel à l'explication des modes d'hérédité « mélangées » »<sup>303</sup>.

Dès la présentation de son sujet de thèse, on perçoit ainsi dans le travail de Malécot une certaine influence de Darmois, liée au thème du doctorat<sup>304</sup>. Ce dernier est également rapporteur de la thèse. De plus, Gustave Malécot fait référence, dès son introduction<sup>305</sup>, à une publication du mathématicien exposant les résultats de l'école biométrique anglaise<sup>306</sup>. Enfin, d'après Maxime Lamotte<sup>307</sup>, c'est Darmois qui a dirigé Malécot vers les travaux de Ronald Fisher.

Pour étudier la théorie de l'hérédité, Gustave Malécot considère les caractères mesurables d'un individu, qu'il confond en général avec l'action sur ces caractères des facteurs « mendéliens » héréditaires<sup>308</sup>, notée  $x$ . L'hypothèse formulée par Malécot pour décrire cette action des facteurs héréditaires dans le cadre général est celle de l'additivité des contributions des différents couples de gènes qui constitue la formule héréditaire de l'individu. Malécot associe à chaque facteur une contribution qu'il interprète en tant que variable aléatoire pouvant prendre un nombre fini de valeurs suivant l'état du couple de gènes associé<sup>309</sup>. Par exemple, si on considère  $H$  la contribution associée à un certain couple de gènes, les individus se répartissent en trois catégories suivant qu'ils portent le couple  $AA$ , le couple  $Aa$  ou le couple  $aa$ ,  $H$  prend alors les trois valeurs respectives  $i$ ,  $j$  et  $k$ . Malécot désigne par  $P$ ,  $2Q$ ,  $R$ , la fréquence dans la population de ces 3

301. Dans EPPERSON 1999, p. 477, Bryan K. Epperson affirme que Malécot lui a raconté avoir passé deux ans à lire et maîtriser cet article de Fisher, avec un soin mathématique rigoureux n'en doute pas Epperson.

302. Cf. NAGYLAKI 1989, p. 254.

303. Cf. MALÉCOT 1939.

304. Comme je l'ai rappelé précédemment, ce dernier est dans les années 1930 l'un des seuls mathématiciens français, professeur à la faculté des sciences de la Sorbonne, à enseigner et à travailler sur des sujets de statistique. Il apparaît comme celui qui connaît le mieux les travaux anglais de Pearson et Fisher.

305. Cf. MALÉCOT 1939, p. 1.

306. Gustave Malécot cite la publication suivante : Darmois G., 1932, « La méthode statistique dans les sciences d'observation », *Annales de l'Institut Henri Poincaré* 3 191-228. Dans cette introduction, Gustave Malécot remercie également Henri Eyraud, qui à la fin des années 1930 se trouve à l'université de Lyon et s'est tourné vers les mathématiques financières, cf. RITTER à paraître en 2009, et avec qui il est lié familialement.

307. Cf. LAMOTTE 1999b, p. 59.

308. Cf. MALÉCOT 1939, p. 3.

309. Cf. MALÉCOT 1939, p. 4.



catégories. Il les interprète alors comme des probabilités et décrit la contribution  $H$  comme une variable aléatoire « qui peut prendre les valeurs  $i, j, k$  avec les probabilités  $P, 2Q, R$  ».

Sous ces hypothèses, pour un individu au hasard, l'action des facteurs mendéliens  $x$  est une variable aléatoire somme de variables aléatoires que Malécot qualifie « du 3<sup>e</sup> ordre »<sup>310</sup>. Le doctorant distingue deux cas pour « la liaison stochastique des divers facteurs »<sup>311</sup>, autrement dit la corrélation entre les différentes variables aléatoires. Le premier est celui de l'accouplement au hasard (« random mating »). Il y a alors indépendance stochastique entre les caractères des deux couples. La probabilité d'un descendant déterminé est donc le produit des probabilités des deux gamètes qui le constituent ou la somme de tels produits s'il peut être constitué de plusieurs façons différentes<sup>312</sup>. Le second cas est celui où on tient compte du phénomène de l'« homogamie »<sup>313</sup> : les conjoints des individus ayant un caractère de valeur déterminée leur ressemblent en moyenne plus que s'ils étaient choisis au hasard parmi la population. Pour modéliser ce deuxième cas, Malécot reprend l'hypothèse formulée par Fisher sur l'expression des probabilités d'association des divers états possibles (probabilités d'association des facteurs) : il introduit des coefficients d'association  $f_{lm} > -1$  qui varient avec le couple de facteurs considérés et qui sont nuls dans le cas de l'indépendance<sup>314</sup>. Dans les deux cas, Malécot examine également à l'intérieur d'une population donnée la fréquence d'association des gènes<sup>315</sup>.

Tout au long de son mémoire, Gustave Malécot étudie ensuite, sous les deux hypothèses formulées (« random mating » ou homogamie), la variation de la composition génétique au cours du temps, de génération en génération, pour voir si elles tendent vers une répartition d'équilibre. Si la constitution génétique d'une génération est donnée, il déduit la constitution de la génération suivante des lois de Mendel dans les deux hypothèses considérées sur la composition des couples. En utilisant sa modélisation des facteurs comme des variables aléatoires, Malécot entend ainsi approfondir le rapprochement déjà effectué par Fisher entre les théories mendéliennes de l'hérédité et les théories de l'école biométrique anglaise. Par exemple, sous l'hypothèse du « random mating », Malécot retrouve la répartition des caractères à hérédité mêlée, dont la taille

---

310. Cf. MALÉCOT 1939, p. 4 : c'est-à-dire qu'elles peuvent prendre 3 valeurs.

311. Cf. MALÉCOT 1939, p. 5.

312. Cf. MALÉCOT 1939, p. 11.

313. Cf. MALÉCOT 1939, p. 6.

314. Cf. MALÉCOT 1939, p. 6-7. Malécot considère les divers états possibles pour l'ensemble  $HK$  où  $H$  prend les valeurs  $i, j, k$  avec les probabilités  $P, 2Q, R$  et  $K$  les valeurs  $i', j', k'$  avec les probabilités  $P', 2Q', R'$ . Alors la probabilité des états simultanés  $i, i'$  que Malécot note (11) s'exprime (11) =  $PP'(1 + f_{11})$ .  $f_{(11)}$  est le coefficient d'association des états  $(i, i')$ . Malécot les précisera au cours de son travail, cf. MALÉCOT 1939, p. 21-23.

315. Un facteur correspond à un couple de gènes, les résultats obtenus sont donc différents mais ils dépendent l'un de l'autre, la probabilité d'association des gènes dépendant de la probabilité d'association des facteurs, cf. MALÉCOT 1939, p. 8-9.

est le type. Galton avait montré que la répartition de ces caractères obéit à une loi de Gauss. Malécot retrouve ce résultat en admettant que ces caractères résultent de l'addition des effets d'un grand nombre  $n$  de facteurs mendéliens indépendants<sup>316</sup>.

Malécot détermine également les corrélations entre apparentés<sup>317</sup> en distinguant non seulement le cas du « random mating » de celui de l'homogamie mais en formulant aussi des hypothèses sur les gènes constituant le couple et sur la dominance d'une forme de ce gène sur une autre. En cas de non dominance, la contribution du facteur correspondant à un couple de gènes s'obtient comme somme des effets des deux gènes qui le constituent<sup>318</sup>. En revanche, dans le cas de la dominance, ils ne s'additionnent plus. La formule donnant la contribution de ces deux gènes s'obtient en additionnant à l'effet de ces deux gènes un résidu. Dans le modèle de Malécot, qui reprend celui de Fisher, les valeurs prises par ce résidu s'obtiennent par la méthode des moindres carrés<sup>319</sup>.

Dans son doctorat, Gustave Malécot propose donc une modélisation probabiliste de la théorie de l'hérédité. D'après Bryan K. Epperson<sup>320</sup>, cette modélisation « annonce [une] approche fondée sur les processus stochastiques », que Malécot adoptera pour d'autres problèmes<sup>321</sup>. D'après Epperson, Malécot considère en effet dans des oeuvres ultérieures à sa thèse l'évolution génétique comme un processus markovien : il en déduit la loi de distribution des fréquences géniques dans les petites populations et invente les notions de gènes identiques et de gènes mutants nouveaux<sup>322</sup>. Sa thèse est ainsi le début d'une direction de recherche qu'il poursuivra ensuite.

---

316. Cf. MALÉCOT 1939, p. 16-17. Il utilise dans sa démonstration le théorème de Liapounoff et renvoie au livre de Lévy, LÉVY 1937, où ce dernier en propose plusieurs démonstrations. Malécot utilise ici la formule suivante due à Lindeberg, cf. LÉVY 1937, p. 241. Il note  $\sigma_x$  l'écart type de la somme des contributions des facteurs mendéliens indépendants. Il suppose que la valeur maximale prise par chacune de ces contributions est strictement inférieure à  $\sigma_x \epsilon$ . De la formule établie par Lindeberg dans la démonstration du théorème de Liapounov il en déduit l'inégalité suivante :

$$\left| P\left(\frac{x}{\sigma_x} < \nu\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\nu} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \right| < 6\epsilon^{1/4}$$

La loi de répartition de  $x$  diffère donc peu de la loi de Gauss.

317. En ne se restreignant pas à la seule étude de la corrélation entre parent et enfant mais en considérant également les corrélations plus ancestrales : petits enfants, etc. ou les corrélations entre frères.

318. Cf. MALÉCOT 1939, p. 4.

319. Il s'agit de minimiser la valeur de l'espérance du carré de ce résidu. cf. MALÉCOT 1939, chapitre III et IV. Malécot reprenant Fisher généralise ensuite ce modèle pour ajuster les contributions additives d'un nombre quelconque de couples à l'effet global : le résidu est alors considéré globalement pour l'ensemble des couples, cf. MALÉCOT 1939, p. 61-64.

320. Cf. EPPERSON 1999.

321. Cf. EPPERSON 1999, p. 477.

322. D'après Michel Gillois, il réinterprète alors certains coefficients comme les coefficients de parenté et de consanguinité comme des probabilités associées aux issues de tirages aléatoires de gènes, cf. GILLOIS 1999, p. 2. Pour davantage d'informations sur les développements probabilistes de Gustave Malécot dans sa théorie génétique des populations, je renvoie à NAGYLAKI 1989; EPPERSON 1999; GILLOIS 1999.

Malécot expose des théories de statisticiens anglais qui jusqu'alors n'avaient fait l'objet d'aucun autre travail de thèse. D'après l'historiographie existante sur la période, dans le cadre de la recherche académique, seul Darmois avait publié sur ce sujet. La soutenance d'un tel doctorat montre que de nouveaux mathématiciens s'intéressent en France à ces théories. Les étudier permet ainsi à la fin des années 1930 d'obtenir le grade de docteur ès sciences académiques. On pourrait y voir un signe du poids institutionnel occupé alors par Darmois sur une scène mathématique où Borel depuis les années 1920 promeut le rôle du calcul des probabilités comme domaine d'interconnexion avec d'autres domaines scientifiques. Darmois réussit à faire soutenir un doctorant sur un sujet dont il semble difficile qu'il aurait pu faire l'objet d'une thèse de sciences mathématiques dix ans plus tôt.

### Les probabilités pour modéliser des phénomènes physiques. La thèse d'André Blanc-Lapierre

André Blanc-Lapierre se distingue des autres doctorants en calcul des probabilités : il est en effet physicien<sup>323</sup>. De plus, le sujet de sa thèse en sciences mathématiques provient de questions qui ont émergé lors de sa thèse de physique, soutenue un an auparavant en 1944 : *Étude expérimentale de l'effet de grenaille pur. Application à l'amplification des courants photoélectriques très faibles*. D'après Bernard Picinbono<sup>324</sup>, insatisfait par les méthodes qualitatives qu'il avait dû utiliser pour ses travaux en sciences physiques, André Blanc-Lapierre s'est rendu compte que ce qu'il avait étudié dans sa thèse ne pouvait être correctement décrit sans des outils du calcul des probabilités et sans le concept de fonction aléatoire. Pour donner un cadre rigoureux aux phénomènes observés en tant que physicien, il a alors entrepris une thèse en probabilités sur ce sujet. Il revendique d'ailleurs explicitement cette démarche dès les premiers mots de sa thèse<sup>325</sup>.

323. Il est agrégé de physique depuis 1938 et la suite de sa carrière sera en sciences physiques, cf. PICINBONO 2002; BERNARD et TORTRAT 2003; BLANC-LAPIERRE ET AL. 1997.

324. Cf. PICINBONO 2002, p. 1-2.

325. Il y affirme que « son travail a son origine dans des problèmes posés par la physique », cf. BLANC-LAPIERRE 1945, p. 1. Il explique également sa démarche dans l'interview accordée à Jérôme Ségal et Pierre-Éric Mounier-Kuhn, BLANC-LAPIERRE ET AL. 1997, p. 1 :

« J'ai fait une thèse de physique à l'École normale supérieure sous la direction de Georges Bruhat. Il s'occupait d'optique cristalline et utilisait des analyseurs avec cellule photoélectrique et amplificateurs. Et le sujet de ma thèse de physique, c'était le problème de l'amplification des courants photoélectriques faibles. Ceci m'a conduit en particulier à étudier des problèmes de sensibilité d'amplificateurs. J'ai réalisé des photocompteurs et divers amplificateurs. En ce qui concerne les amplificateurs, je me suis trouvé confronté au problème du bruit de fond. Dans le cas de cellules photoélectriques, de photomultiplicateurs, le bruit de fond est lié au courant d'obscurité de la photocathode, c'est-à-dire aux électrons qui en sortent d'eux-mêmes sous l'influence de l'agitation thermique et en l'absence de flux lumineux. Finalement, il a été possible de détecter des courants qui étaient de l'ordre de  $10^{-15}$  à  $10^{-16}$  Ampères. J'étais obsédé par les fluctuations de l'aiguille

Le but du mémoire est ainsi de modéliser un effet de grenaille pur observé dans des amplificateurs électriques. Alors qu'aucun signal n'y est appliqué, la tension mesurée à la sortie de ce dernier subit des fluctuations et ce sont ces fluctuations qu'étudie André Blanc-Lapierre. Il modélise le courant continu comme une suite d'électrons agissant de façon désordonnée et indépendamment les uns des autres<sup>326</sup>. L'action de ce courant sur un circuit quelconque résulte de la somme des impulsions respectivement dues à chaque électron. Blanc-Lapierre formule alors des hypothèses sur la suite des chocs électroniques ainsi que sur la réponse de l'amplificateur à un signal d'entrée.

Il considère  $\rho$  la densité des chocs électriques dans le temps. Il définit une « épreuve »  $\mathcal{E}$  par la suite indéfinie des instants où interviennent les différents électrons :  $\dots s_j, s_{j+1}, s_{j+2}, \dots$  depuis  $t = -\infty$  jusqu'à  $t = +\infty$ <sup>327</sup>. Sur l'ensemble des épreuves, il définit une probabilité. Il caractérise la répartition désordonnée de densité  $\rho$  par les propriétés de la répartition de Poisson. Il a alors les deux axiomes suivants :

- a. La probabilité pour qu'un intervalle quelconque  $\Delta t$  contienne  $n$  impulsions est donnée par<sup>328</sup> :

$$P(n, \Delta t) = \frac{(\rho \Delta t)^n e^{-\rho \Delta t}}{n!}$$

- b. Deux intervalles disjoints sont indépendants du point de vue des probabilités.

Il formule plusieurs hypothèses sur la réponse de l'amplificateur à une impulsion brève, parmi lesquelles la nullité de la réponse avant un choc et l'écriture de la réponse sous la forme  $R_1(t) = \sum_{\alpha} A_{\alpha} e^{\phi_{\alpha} t}$  pour  $t > 0$ , si on considère que le choc a lieu à l'instant 0, avec un nombre fini de termes,  $A_{\alpha}$  et  $\phi_{\alpha}$  des complexes et la partie réelle de  $\phi_{\alpha}$  strictement négative<sup>329</sup>. Enfin, il suppose une discontinuité finie de la réponse de l'oscillateur au moment du choc.

Ces différentes hypothèses posées, Blanc-Lapierre étudie alors  $x(t, \mathcal{E})$ , la réponse fournie par l'amplificateur dont l'entrée est soumise à l'effet de grenaille d'un courant  $I$ . Cet effet dépend à la fois du temps et d'une épreuve, c'est-à-dire de la suite indéfinie des instants où ont lieu les chocs dans le modèle proposé par Blanc-Lapierre. Il s'agit donc d'étudier les propriétés de cette famille de fonctions aléatoires pour fournir une solution à la plupart des problèmes posés par l'électrotechnique.

---

de l'appareil de lecture et je me disais : "j'aimerais bien mettre une théorie derrière le frémissement de cette aiguille". »

La « théorie derrière le frémissement de cette aiguille » est le sujet de sa thèse en probabilités.

326. Cf. BLANC-LAPIERRE 1945, introduction p.1-9.

327. Cf. BLANC-LAPIERRE 1945, p. 2.

328. Cf. BLANC-LAPIERRE 1945, p. 2. La formule donnée par André Blanc-Lapierre n'est pas exactement celle-là. Il indique  $P(n, \Delta t) = \frac{(\rho \Delta t)^n e^{-\rho \Delta t}}{n!}$ . Cependant si on tient compte des indications qu'il donne (répartition de Poisson) ou de sa reformulation du problème, p.3, on trouve la formule que j'indique ci-dessous.

329. Les oscillations des amplificateurs sont nécessairement amorties.

Le doctorant examine tout d'abord le cas où il prend comme temps initial du premier choc  $t_0$ . Il étudie la fonction aléatoire qu'il note  $x_{A_0}(t)$  en traitant le problème suivant<sup>330</sup> : «  $t_1, t_2, \dots, t_K$  étant un nombre quelconque, mais fini, d'instantanés postérieurs à  $t_0$ , quelle est la fonction de répartition associée aux variables liées :  $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_K)$  ? ». Pour résoudre ce problème, il passe par la fonction caractéristique associée à ces variables liées. Il en obtient une formule par passage à la limite de la fonction caractéristique de nouvelles variables liées, considérées dans le cas où le temps est divisé en cellules égales d'amplitude  $\Omega$ <sup>331</sup>. De l'expression sous forme de séries qu'il obtient pour l'expression de la fonction caractéristique, il en déduit les moments de la variable aléatoire et il en conclut que  $x_{A_0}(t)$  n'est pas stationnaire, c'est-à-dire que ses propriétés statistiques changent par un déplacement quelconque de l'origine des temps<sup>332</sup>. De là il montre qu'on peut faire tendre  $t_0$  vers  $-\infty$  et obtenir alors une fonction aléatoire stationnaire qu'il note  $x(t)$  (la dépendance à une « épreuve » étant ici sous-entendue). Il en étudie certaines propriétés et il en donne la fonction caractéristique ainsi que la fonction de répartition à  $t$  fixé.

Pour mener à bien cette étude, le doctorant se fonde notamment sur la monographie de Maurice Fréchet, *Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*, 1937<sup>333</sup>, et sur le cinquième chapitre « Divers modes de convergence d'une suite de variables aléatoires ». Il s'y réfère notamment lorsque se posent la question de la continuité et de la dérivabilité de  $x(t, \mathcal{E})$  par rapport à  $t$  et les questions de passage à la limite pour les fonctions caractéristiques. André Blanc-Lapierre reprend ainsi de FRÉCHET 1937 les définitions et les résultats sur les convergences de variables aléatoires et sur les limites de certaines probabilités<sup>334</sup>. Par l'intermédiaire de Fréchet, il utilise dans sa thèse certains résultats de Kolmogoroff, la théorie de la mesure et la théorie de l'intégration de Lebesgue<sup>335</sup>.

Dans un second temps de son mémoire, Blanc-Lapierre étudie de façon très approfondie les propriétés ergodiques de  $x(t)$ <sup>336</sup>. Il montre la possibilité de permuter les moyennes temporelles et les espérances mathématiques et il en explicite l'intérêt pour un physicien<sup>337</sup> : la mesure des moyennes temporelles est possible expérimentalement. Il démontre également que les moyennes temporelles  $(\frac{1}{T} \int_0^T x(t, \mathcal{E}) dt)$ , quand la limite

330. Cf. BLANC-LAPIERRE 1945, p. 11.

331. C'est  $\Omega$  qui tend alors vers 0.

332. Cf. par exemple le rapport qu'écrit Darmois sur la thèse de Blanc-Lapierre ou BLANC-LAPIERRE 1945, p. 6 et p.15.

333. Cf. FRÉCHET 1937.

334. Il utilise ainsi, cf. par exemple BLANC-LAPIERRE 1945, p. 12, le résultat sur la limite de la probabilité d'une suite « ascendante » d'événements  $E_p$  vers la probabilité de l'événement consistant dans la réalisation d'un au moins des événements  $E_p$ , cf. FRÉCHET 1937, p. 24.

335. Cf. FRÉCHET 1937, p. 160-162.

336. C'est-à-dire les propriétés à l'infini de la fonction aléatoire qui ne dépendent pas de l'état initial du système.

337. Cf. BLANC-LAPIERRE 1945, p. 20.

existe pour  $T \rightarrow +\infty$ , convergent presque sûrement vers l'espérance mathématique de la fonction aléatoire, sous certaines conditions, telles que l'intégrabilité du coefficient de corrélation de la fonction au sens de Césaro<sup>338</sup>. Dans la démonstration de ces théorèmes, la théorie de l'intégration joue un rôle important. Le théorème de Fubini est par exemple utilisé à plusieurs reprises par le doctorant pour légitimer les permutations des symboles de moyenne et d'intégration<sup>339</sup>.

Blanc-Lapierre étudie également les moyennes du second ordre et notamment les fonctions de corrélation, indépendantes du temps, notées  $\overline{XX_\theta}$  qui sont les moyennes des variables  $\overline{X(t)X(t+\theta)}$ , où  $X(t) = x(t) - \bar{x}$ ,  $\bar{x}$  désignant la moyenne de la variable aléatoire  $x(t)$ . De cette étude il en déduit des résultats sur les fonctions de corrélation associées aux réponses fournies par l'amplificateur au choc  $X(t)$ , notées  $y(t)$  et  $Y(t) = y(t) - \bar{y}$ <sup>340</sup>. Il fait alors principalement référence aux travaux du mathématicien russe Khintchine sur les fonctions stationnaires<sup>341</sup>. Il en déduit certains résultats, comme par exemple sur la « loi d'approche » de  $\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$  vers  $\bar{y}$ . Il démontre notamment que la variable aléatoire  $\frac{1}{T} \int_0^T (y(t) - \bar{y}) dt$  converge (après avoir été normée) vers une variable aléatoire laplacienne<sup>342</sup>. André Blanc-Lapierre souligne l'importance de ce travail du point de vue d'un physicien : il permet de préciser « dans quelles conditions on peut faire appel à des lois de Laplace pour représenter les phénomènes expérimentaux »<sup>343</sup>.

En outre, il étudie d'autres propriétés de  $x(t)$  et de la réponse de l'amplificateur,  $y(t)$  en considérant des grandes densités de chocs aléatoires dans le temps. Enfin, il généralise certains de ses résultats ou méthodes de calcul (notamment celles fondées sur l'utilisation des fonctions de corrélation), par exemple à l'étude des processus aléatoires stationnaires laplaciens. L'étude de tels processus fait, au même moment, l'objet de plusieurs publications que signale le doctorant et dont il n'a connaissance qu'à la fin de sa thèse<sup>344</sup> : une note aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* de Michel Loève en 1945, où celui-ci étend l'emploi de la fonction de corrélation à des fonctions aléatoires non stationnaires, et une publication de Joseph Leo Doob, DOOB 1944. Le doctorant signale également l'information que lui a fournie Maurice Fréchet sur la prochaine paru-

338. C'est-à-dire si l'intégrale  $\int_{-s}^s \rho(t) \left(1 - \frac{|t|}{s}\right) dt$  tend vers une limite lorsque  $s \rightarrow +\infty$ , où  $\rho(t)$  est le coefficient de corrélation. Cf. BLANC-LAPIERRE 1945, p. 24.

339. Cf. BLANC-LAPIERRE 1945, p. 22-23. Dans le vocabulaire utilisé par Blanc-Lapierre, « moyenne » désigne l'espérance mathématique d'une variable aléatoire et « intégration » renvoie au calcul des moyennes temporelles., cf. par exemple BLANC-LAPIERRE 1945, p. 6-7.

340. Cf. BLANC-LAPIERRE 1945, p. 7.

341. Et notamment à son article : Khintchine, 1934, « Korrelations theorie des Stationären stochastischen Prozesse », *Mathematische Annalen* 109.

342. Cf. BLANC-LAPIERRE 1945, p. 39-46. André Blanc-Lapierre comme Maurice Fréchet dans FRÉCHET 1937 appelle variable laplacienne une variable dont on dit, aujourd'hui, qu'elle suit une loi normale centrée. Il démontre ainsi, BLANC-LAPIERRE 1945, p. 46 que  $\frac{1}{\sqrt{A}\sqrt{T}} \int_0^T (y(t) - \bar{y}) dt$  converge en loi pour  $T \rightarrow +\infty$  vers une variable normale centrée d'écart type 1,  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

343. Cf. BLANC-LAPIERRE 1945, p. 81.

344. Cf. BLANC-LAPIERRE 1945, p. 64-65.

tion d'un ouvrage de Ville sur la théorie de la corrélation<sup>345</sup>. Il fait également référence à une note de Ville aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* en 1943 : « Sur les processus stochastiques stationnaires analytiques »<sup>346</sup>. André Blanc-Lapierre se place également à un autre point de vue : il adjoint à la fonction aléatoire  $x(t)$  un certain nombre de ses dérivées<sup>347</sup>. Le modèle qu'il utilise alors est différent : l'état stationnaire d'un système est interprété « comme le résultat de la lutte de forces de rappel tendant à le ramener vers une configuration stable et d'un mécanisme perturbateur qui, à chaque instant, l'éloigne de cette configuration ». L'ensemble formé par la fonction aléatoire  $x(t)$  et par ses dérivées (en nombre fini) forme alors un processus de Markov<sup>348</sup>, ce qui lui permet d'en déduire de nouveaux résultats dans l'étude des fluctuations relatives à un certain phénomène physique, l'effet de scintillation<sup>349</sup>.

Parmi les sept derniers doctorats soutenus à la fin de l'entre-deux-guerres, celui d'André Blanc-Lapierre occupe une place particulière. Le doctorant est venu aux probabilités via les sciences physiques<sup>350</sup>. Sa formation initiale et sa date décalée de soutenance laissent penser qu'il n'a pas suivi les mêmes enseignements que les six autres doctorants : il aurait suivi des cours de probabilités pendant la seconde guerre mondiale.

Désirant modéliser des phénomènes physiques, il a recherché un tel modèle en probabilités, réalisant par cette démarche l'une des volontés affirmée par Borel tout au long de l'entre-deux-guerres : permettre aux probabilités et à la physique d'interagir ensemble. L'influence de Borel sur ce dernier doctorat semble cependant très faible : il n'occupe plus de position institutionnelle à la faculté des sciences de Paris depuis 1941 et la génération de Fréchet, Darmon et Lévy l'a remplacé sur la scène mathématique française<sup>351</sup>. On peut cependant interpréter la venue aux probabilités d'André Blanc-Lapierre comme la marque d'une place plus importante occupée par le champ des probabilités au début des années 1940 qu'à la fin des années 1920. Au contraire de Francis Perrin, fils de Jean Perrin, qui avait réalisé le programme d'Einstein sur le mouvement brownien de rotation de la sphère, et considéré comme un élève de Borel, Blanc-Lapierre semble être venu aux probabilités de façon autonome, ce qui témoigne

345. Il pourrait s'agir de VILLE 1944.

346. VILLE, Jean, 1943, « Sur les processus stochastiques stationnaires analytiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 217 101-103.

347. L'ordre de la dernière dérivée considérée est donnée par l'ordre de l'équation différentielle vérifiée par l'amplificateur auquel on enlève une unité, cf. BLANC-LAPIERRE 1945, p. 69.

348. Cf. BLANC-LAPIERRE 1945, p. 68-71.

349. Cf. BLANC-LAPIERRE 1945, p. 77. L'effet de scintillation est lié aux fluctuations du nombre d'atomes adsorbés par une cathode incandescente.

350. Comme je l'ai déjà rappelé, Gustave Malécot a dès le début de sa formation étudié les probabilités et c'est à cette occasion qu'il a été « orienté » par Georges Darmon dès le début de sa formation à l'École normale supérieure, cf. LAMOTTE 1999b, p. 58.

351. Ce sont d'ailleurs Fréchet et Darmon que remercie le doctorant à la fin de son introduction « pour les conseils qu'ils lui ont donnés ».

d'une certaine visibilité de ce domaine. La génération de Fréchet et Darmon est intervenue et l'on perçoit également l'influence des doctorants en probabilités de la fin des années 1930 : certains travaux de Ville, Loève et Fortet sont cités dans le doctorat. Blanc-Lapierre exprime également sa reconnaissance à Robert Fortet « pour l'aide efficace qu'il n'a cessé de [lui] apporter au cours de l'évolution de [ses] recherches »<sup>352</sup>. La première rencontre entre ces deux mathématiciens a sans doute eu lieu alors que Fortet supplée Darmon à la faculté des sciences de Paris pendant la seconde guerre mondiale<sup>353</sup>, ce dernier se trouvant alors en Angleterre. Blanc-Lapierre serait allé en 1943 « voir Fortet pour discuter, avec un probabiliste chevronné, sur la composante « aléatoire » du problème qu'il avait étudié » dans sa modélisation des fluctuations induites par l'effet d'un courant continu agissant à l'entrée d'un dispositif amplificateur<sup>354</sup>.

De plus, le choix du modèle d'André Blanc-Lapierre montre précisément comment les probabilités interviennent dans cette modélisation des courants électriques. Il témoigne de l'émergence d'un sujet de recherche qui, au milieu des années 1930, est traité dans plusieurs publications. Bernard Picinbono<sup>355</sup> écrit ainsi qu'au même moment et de façon indépendante des travaux similaires sont publiés aux États-Unis. Il s'agit sans doute des articles qu'évoque André Blanc-Lapierre dans BLANC-LAPIERRE 1945, p. 9 : ceux de S.O. Rice sur l'analyse des fluctuations dans les circuits électriques. Enfin, Roger Brard, dans l'allocution qu'il donne à l'occasion de la « Remise de l'épée d'Académicien à André Blanc-Lapierre » en 1972 en tant que président de l'Académie des sciences, explique qu'au même moment où Blanc-Lapierre commence à étudier les fonctions aléatoires pour modéliser le bruit de fond, lui-même s'interroge sur le rôle de ces fonctions dans la modélisation des écoulements turbulents<sup>356</sup>. Cette direction de recherche est ensuite poursuivie après l'entre-deux-guerres. Picinbono précise ainsi que la thèse de Blanc-Lapierre « fut le point de départ d'une série de recherches et de publications qui ont constitué le matériau de base pour la rédaction du livre considérable

---

352. Dans la mesure où les deux mathématiciens publient huit ans plus tard un ouvrage en collaboration dont le point de départ est dans la thèse de Blanc-Lapierre d'après PICINBONO 2002, on peut penser que pour ce doctorat, le remerciement est significatif. Le lien entre les deux mathématiciens est d'ailleurs confirmé dans l'allocution que donne André Blanc-Lapierre à l'occasion de sa « Remise de l'épée d'Académicien à André Blanc-Lapierre », en 1972. Dans la nécrologie de Robert Fortet, cf. BRU et NEVEU 1998, p. 80, Bernard Bru et Jacques Neveu écrivent également : « À la libération Fortet supervise la thèse de Blanc-Lapierre sur les fonctions aléatoires du second ordre intervenant en théorie du signal ». Enfin dans BERNARD et TORTRAT 2003, p. 56, Bernard Picinbono et Albert Tortrat écrivent que dès 1942, il fut « fermement conseillé » par Robert Fortet et André Blanc-Lapierre explicite ses relations avec Fortet dans BLANC-LAPIERRE ET AL. 1997, p. 1.

353. Alors même que Fortet est chargé d'un cours de mécanique à l'université de Caen, cf. BRU et NEVEU 1998, p. 80.

354. D'après l'article nécrologique qu'écrit Blanc-Lapierre sur Fortet dans BLANC-LAPIERRE et FERRAND 1999. André Blanc-Lapierre réitère ces propos dans BLANC-LAPIERRE ET AL. 1997, p. 1-2.

355. Cf. PICINBONO 2002, p. 2.

356. Cf. ACADÉMIE DES SCIENCES 1972, p. 1.



de près de 700 pages sur les fonctions aléatoires » qu'écrivit huit ans plus tard en 1953 André Blanc-Lapierre en collaboration avec Robert Fortet.

La thèse d'André Blanc-Lapierre confirme ainsi un intérêt de la recherche en probabilité amorcé par la thèse de Malécot six ans auparavant sur la modélisation de la théorie de l'hérédité. Si Darmois ne joue pas pour ce doctorat un rôle aussi important que pour celui de Malécot, Bernard Picibono et Albert Tortrat signalent toutefois<sup>357</sup> que Darmois a « fortement encouragé » Blanc-Lapierre. En outre, c'est son suppléant à la faculté des sciences de la Sorbonne, Robert Fortet, qui joue un rôle central dans l'évolution du travail. Il s'agit ainsi d'une direction de recherche (les probabilités pour modéliser des phénomènes physiques, naturels, etc) qui semble débiter à la fin des années 1930 en France mais aussi à l'étranger.

### 6.3.5 Une thèse sur le fondement des probabilités et la théorie des collectifs : Jean Ville

En 1939, un ancien élève de l'École normale supérieure, Jean Ville, soutient une thèse, *Étude critique de la notion de collectif*, dont le cadre théorique diffère des autres doctorats classés en probabilités. Il ne s'agit pas d'une thèse qui aborde une théorie particulière du calcul des probabilités. Le sujet concerne la question des fondements et de l'interprétation des probabilités. Maurice Fréchet, rapporteur de la thèse, affirme ainsi que le travail de Ville « relève à la fois de la Philosophie des Sciences et des Mathématiques » et apporte une « contribution aux Fondements des Sciences ». Son mémoire apparaît alors par son cadre et son sujet en décalage avec ceux de Dugué, Doeblin, Fortet et également Loève<sup>358</sup>. Les conditions même d'élaboration du mémoire et de découverte du sujet contribuent également à le distinguer parmi le corpus des autres thèses des probabilités.

D'après Bernard Bru, Jean Ville a terminé, comme Wolfgang Doeblin, de rédiger son mémoire de thèse plusieurs années avant la soutenance du doctorat, en 1936-1937. Le sujet de son doctorat lui est venu à l'occasion d'un séjour à Vienne effectué à la sortie de l'École normale supérieure grâce à une bourse Arconti-Visconti<sup>359</sup>. En 1933, Fré-

---

357. Cf. BERNARD et TORTRAT 2003, p. 56.

358. Comme je le montrerai, le décalage n'est cependant pas total, car Ville applique certaines de ses considérations à la démonstration de théorèmes de probabilités et notamment d'un théorème sur les chaînes de Markov.

359. Pour davantage de renseignements sur cette période de la vie de Ville, je renvoie aux sources suivantes : BRU 1992, p. 41, note 44, BRU ET AL. 1999, p. 203-208, CRÉPEL 2009, CRÉPEL 1984, p. 42-53, VILLE et SHAFER 2005, SHAFER et VOVK 2001, p. 197-198, D'ORGEVAL 1992. Ce sont de ces ouvrages que sont issues les informations ci-dessous. Glenn Shafer et Laurent Mazliak ont préparé un numéro du *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique* sur les martingales (le numéro du JEHPs 5/1 de juin 2009 « Splendeurs et misères des martingales »). Plusieurs articles portent sur Jean Ville et son oeuvre (seul CRÉPEL 2009 m'a été communiqué lors de l'écriture de la thèse. Depuis la soutenance, le journal est paru. Y figurent d'autres documents

chet avait demandé à Ville de travailler sur un problème de topologie dans les espaces de Hilbert<sup>360</sup>. Pourtant le doctorant, attiré depuis la seconde année de sa scolarité à l'ÉNS par les probabilités et la statistique<sup>361</sup> et n'aboutissant à aucun résultat sur le sujet donné par Fréchet, décide de partir à Berlin pour continuer à étudier le sujet de topologie. Il a également l'intention de rencontrer von Mises et d'étudier son axiomatisation et son interprétation des probabilités fondées sur les collectifs et différentes de celles que Kolmogorov expose dans KOLMOGOROFF 1933. En 1933, Richard von Mises a déjà fui l'Allemagne et Ville part pour Vienne en 1934. Il participe alors très régulièrement au séminaire de Karl Menger, le « Mathematisches Kolloquium »<sup>362</sup>. Il y côtoie notamment Constantin Carathéodory, Alfred Tarski, Kurt Gödel et Abraham Wald. D'après Bernard d'Orgeval<sup>363</sup>, c'est à l'occasion d'une séance organisée par Wald sur la définition des probabilités proposée par von Mises que « le sujet [lui] parut digne d'étude » sans doute pour en faire l'objet de sa thèse<sup>364</sup>. Il y travaille alors jusqu'en 1936. Fréchet, « à contrecœur »<sup>365</sup>, accepte que l'étude de ce dernier sur les collectifs puisse constituer l'objet d'un doctorat. Mais, espérant que Ville produise des résultats sur d'autres domaines, il retarde la soutenance de ce dernier jusqu'à ce qu'Émile Borel intervienne et l'impose.

Jean Ville discute dans sa thèse du concept de collectif sur lesquels plusieurs mathématiciens fondent les probabilités. Von Mises a présenté sa théorie de ce concept en 1919 dans VON MISES 1919<sup>366</sup>. Au cours des années 1930, elle est ensuite reprise et retravaillée par d'autres mathématiciens, tels Arthur Copeland, Reichenbach, Karl Popper et Abraham Wald<sup>367</sup>.

Dans un premier temps, Ville présente et étudie les notions fondamentales de la théorie de von Mises, telles que les configurations à l'intérieur d'une suite infinie de termes égaux à 0 ou à 1, la notion de fréquence de ces configurations à l'intérieur de la suite considérée. Il donne alors certains résultats relatifs à ces notions et il propose une

---

ainsi qu'un article centré sur la biographie de Jean Ville : SHAFER 2009.). Par ailleurs, Glenn Shafer prépare une biographie scientifique du mathématicien.

360. Cf. CRÉPEL 2009, p. 4 et SHAFER et VOVK 2001, p. 197.

361. D'après Bernard d'Orgeval dans D'ORGEVAL 1992, p. 388, Ville a dès cette année-là (1930) pris contact avec Émile Borel et Georges Darmon.

362. Cf. CRÉPEL 2009, p. 6.

363. Cf. D'ORGEVAL 1992, p. 388.

364. Cf. VILLE 1955, p. 44, cf. également VILLE 1939a, p. 1.

365. Cf. SHAFER et VOVK 2001, p. 198. Jean Ville le signale également en introduction de son mémoire.

366. Il l'a reprise ensuite dans son livre *Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, und Wahrheit* publié pour la première fois en 1928, VON MISES 1928. La notion de collectif n'a cependant pas été inventée par von Mises, cf. VON PLATO 1994, p. 183 (von Plato y évoque quelques prédécesseurs de von Mises) et KAMLAH 1987.

367. Cf. VON PLATO 1994, p. 193.

méthode de construction de suites infinies où les fréquences de certaines configurations ou de toutes les configurations ont des valeurs données<sup>368</sup>.

Il introduit dans un second temps les axiomes de la théorie des collectifs de von Mises (axiome de la limite et axiome de procédé du choix)<sup>369</sup> dans le cas le plus simple. Ville désigne par « collectif le plus simple » ou « alternative » « une suite infinie d'observations de même nature, dont les résultats peuvent à chaque fois être représentés par deux signes, soient « 0 » et « 1 » » (autrement dit une suite infinie de 0 et de 1) et qui vérifie les deux conditions suivantes (les axiomes de la limite et l'axiome de procédé du choix)<sup>370</sup> :

« PREMIÈRE CONDITION :  $n_0$  et  $n_1$  étant le nombre de celles parmi les  $n$  premières observations qui ont fourni les résultats « 0 » et « 1 » respectivement, les deux limites suivantes existent :

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_0}{n} = p, \quad \lim_{n=\infty} \frac{n_1}{n} = q.$$

DEUXIÈME CONDITION : Si l'on extrait de la suite totale une suite partielle par « sélection »<sup>371</sup>, les limites correspondantes existent dans la suite partielle et gardent les mêmes valeurs :

$$\lim_{n'=\infty} \frac{n'_0}{n'} = p, \quad \lim_{n'=\infty} \frac{n'_1}{n'} = q. »$$

Les valeurs limites  $p$  et  $q$  sont alors appelées selon Ville les « probabilités d'apparition du résultat 0 (et 1) à l'intérieur du collectif considéré ».

Après avoir relevé certaines objections à la théorie ainsi axiomatisée, Ville expose la nouvelle définition de « collectif » proposée par Wald<sup>372</sup>, qui restreint en fait les procédés de choix, c'est-à-dire l'ensemble des sélections possibles, à un ensemble  $\mathcal{S}$  dénombrable de sélection, stable par composition<sup>373</sup>. Wald définit alors la notion de collectif relatif à cet ensemble  $\mathcal{S}$  de sélection ainsi qu'à la valeur  $p$  de la fréquence

368. Cf. par exemple VILLE 1939a, p. 6 et p.14.

369. selon les termes qu'emploie Jean Ville dans VILLE 1955.

370. Cf. VILLE 1939a, p. 23.

371. D'après la définition que rappelle Ville, VILLE 1939a, p. 23, une suite partielle est extraite par « sélection » si on se donne un procédé qui décide de l'appartenance ou de la non-appartenance de la  $n^{\text{ième}}$  observation ( $n = 1, 2, \dots$ ) à la suite partielle, indépendamment du résultat de cette  $n^{\text{ième}}$  observation et en tenant compte au plus de la connaissance des résultats des observations précédentes.

372. Notamment dans WALD 1937 que cite Ville dans sa bibliographie.

373. Comme l'expose Ville, VILLE 1939a, p. 26, une sélection  $S$  dans la théorie de Wald est définie par une suite infinie de fonctions « de sélection » :  $\{f_n\} = f_0 f_1 \dots f_n \dots$ ,  $f_0$  étant constante,  $f_1, f_2, \dots$  étant des fonctions à une, deux, ... variables binaires (0 ou 1) respectivement à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . La sous-suite extraite d'une suite  $x = x^1 x^2 \dots$  par  $S$  contient  $x^n$  si et seulement si  $f_{n-1}(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}) = 1$ , cf. aussi VILLE et SHAFER 2005. L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions est alors « un système de sélections contenant la sélection qui laisse toute suite inchangée », VILLE 1939a, p. 27.

d'apparition de 1 dans la suite, dans le cas où le collectif est une suite de 0 et de 1<sup>374</sup>. Il note alors  $K(\mathcal{S}, p)$  cet ensemble de collectifs.

Ville discute ensuite des objections à la théorie du collectif définie par Wald en regardant « le champ des événements probabilisables »<sup>375</sup>, ainsi que l'« irrégularité de la suite constituant un collectif ». Il établit alors un contre-exemple à la théorie de von Mises-Wald et met en valeur une lacune de la théorie des collectifs de Wald concernant le deuxième axiome qui caractérise cette irrégularité<sup>376</sup>. Comme le formule Ville dans sa *Notice sur les travaux scientifiques de Jean Ville* en 1955 : « la catégorie des ensembles de mesure nulle définis comme ensembles des points représentatifs de suites ne satisfaisant pas à un axiome de procédé de choix n'était pas assez étendue pour couvrir tous les ensembles de mesure nulle »<sup>377</sup>.

Ville appelle « point représentatif » d'une suite  $x = x^1 x^2 \dots x^n \dots$  de 0 et de 1 le point du segment  $[0, 1]$  (qu'il nomme « point  $x$  »)<sup>378</sup> défini par  $x = \frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{4} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots$ . La correspondance entre la suite et le point du segment  $[0, 1]$  étant univoque, il identifie les collectifs de  $K(\mathcal{S}, p)$  au sous-ensemble des points de  $[0, 1]$  correspondants qu'il note également  $K(\mathcal{S}, p)$ . Il se ramène ensuite à l'étude de ce sous-ensemble.

Il considère une suite infinie d'épreuves indépendantes  $(X_i)$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$  telles que, si  $i \geq 1$ ,  $X_i$  étant l'épreuve de rang  $i$ ,  $P(X_i = 1) = p$  et  $P(X_i = 0) = 1 - p$ . Il interprète alors la  $p$ -mesure d'un ensemble  $G$  comme la probabilité que la suite des épreuves  $(X_i)$  définie ci-dessus fournisse une suite dont le point représentatif appartienne à l'ensemble<sup>379</sup>.

Muni de ces définitions, le théorème correspondant à la formulation précédente mettant en valeur une lacune de la théorie des collectifs de Wald est énoncé par Ville sous la forme<sup>380</sup> :

**THÉORÈME 4 :** *Soit donnée une valeur  $p$  quelconque comprise entre 0 et 1 ; on peut lui associer un ensemble  $G$ , de  $p$  mesure nulle, jouissant de la propriété suivante :*

*Quel que soit le système dénombrable  $\mathcal{S}$ , les ensembles  $K(\mathcal{S}, p)$  et  $G$  ont au moins un point commun.*

Ville insiste sur l'établissement de ce contre-exemple dans sa *Notice sur les travaux scientifiques de Jean Ville*, 1955<sup>381</sup> et Glenn Shafer souligne également son importance

374. Cf. VILLE 1939a, p. 32 et VILLE et SHAFER 2005 : la suite  $x$  est un collectif relativement à  $\mathcal{S}$  et  $p$  (avec les notations précédentes) si quelle que soit la sélection  $S \in \mathcal{S}$ , la fréquence d'apparition des 1 dans la sous-suite extraite converge à l'infini vers  $p$ .

375. Ville montre qu'il est plus restreint que le champ des événements probabilisables dans la théorie classique VILLE 1939a, p. 29-32.

376. Cf. VILLE 1939a, p. 39-47 et VILLE et SHAFER 2005 et DELLACHERIE 1978, p. 32.

377. Cf. CRÉPEL 1984, p. 47.

378. Cf. VILLE 1939a, p. 33.

379. Cf. VILLE 1939a, p. 38.

380. Cf. VILLE 1939a, p. 39.

381. Cf. CRÉPEL 1984, p. 47.

dans VILLE et SHAFER 2005, même s'il affirme qu'il n'a pas toujours été remarqué et utilisé par ceux qui discutaient de la question des fondements. C'est dans le cours de la démonstration de ce théorème que Ville établit l'existence pour tout ensemble de sélection et toute valeur de  $p$  dans  $]0, 1[$  l'existence d'un collectif où la fréquence d'apparition des 1 tend vers sa limite  $p$  de manière unilatère, donc sans fluctuation autour d'elle<sup>382</sup>. Ce résultat lui permet d'affirmer que « tout probabiliste rejettera l'idée que la notion de collectif puisse s'identifier avec la notion intuitive de partie typique de jeu de pile ou face »<sup>383</sup>.

On peut remarquer que Ville, dans son étude critique de la notion de collectif, ne procède pas par ordre chronologique. Ce n'est en effet que dans le chapitre suivant qu'il étudie la notion des suites indifférentes introduite et travaillée par Popper et Reichenbach et Copeland respectivement sous les termes « Nachwirkungsfreie Folgen », « Normale Folgen » et « Admissible Numbers » et dont il affirme qu'elle « fournit une représentation assez parfaite de l'irrégularité exigée par M. de Misès »<sup>384</sup>. À la fin des années 1920 et au début des années 1930, comme l'expliquent Glenn Shafer<sup>385</sup> et Jan van Plato<sup>386</sup>, ces trois mathématiciens proposent de clarifier les sélections possibles des sous-suites et étudient la notion de suite de « nombres admissibles ». Ainsi que le montre Ville dans sa thèse, l'introduction de telles sélections ne permet cependant pas de combler la lacune qu'il a mise en évidence ; et en outre il montre que de tels processus de sélection sont en fait des cas particuliers de la théorie énoncée par Wald<sup>387</sup>.

Ville formule alors, à son tour, de nouvelles conditions d'irrégularité qui remplacent le deuxième axiome (d'irrégularité) de von Misès, déjà transformé par Wald, et qui visent à combler la lacune que son contre-exemple a mise en valeur<sup>388</sup>. Ville fonde ces

382. Cf. notamment Dellacherie dans DELLACHERIE 1978, p. 32.

383. où le résultat 1 représente par exemple pile et 0 face.

La théorie des collectifs, l'énoncé de ses axiomes ainsi que les différentes objections et les évolutions de la théorie ont déjà fait l'objet de plusieurs publications. Je ne rentrerai donc pas davantage dans le détail de l'exposition qu'en fait Ville ni l'ensemble des critiques qu'il formule. Je renvoie aux ouvrages et articles suivants qui évoquent également cette théorie et l'apport de Ville : VON PLATO 1994, VILLE et SHAFER 2005, DELLACHERIE 1978, SIEGMUND-SCHULTZE 2006.

384. Cf. VILLE 1939a, p. 54 et 68.

385. Cf. SHAFER et VOVK 2001, p. 47.

386. Cf. VON PLATO 1994, p. 193.

387. D'après Glenn Shafer et von Plato, alors que von Mises a accepté la nouvelle axiomatique de Wald, il n'en a pas été de même des propositions de Copeland, Reichenbach et Popper. Il estimait que leur processus de sélection pouvait dans certains cas permettre de qualifier comme collectifs des suites définies au moyen de lois mathématiques, ce qu'il n'acceptait pas.

388. Autrement formulé, Ville veut donner des conditions d'irrégularité formant un système  $\mathcal{C}$  de conditions  $C$  telles que « dans le langage de la théorie classique modernisée » (terme employé par Fréchet pour désigner la théorie axiomatisée de Kolomogorov), « quel que soit  $C$  appartenant à  $\mathcal{C}$ , il y a une probabilité égale à 1 pour que  $C$  soit satisfaite par une suite d'épreuves indépendantes ; quelle que soit la propriété de suite  $P$  que l'on considère, si cette propriété  $P$  a une probabilité nulle d'être possédée par une suite d'épreuves indépendantes, il existe dans  $\mathcal{C}$  une condition  $C$  telle que toute suite qui possède la propriété  $C$  ne possède pas la propriété  $P$  », VILLE 1939a, p. 70, ce qui n'était pas le cas dans la théorie de Wald comme l'affirme le théorème 4 rappelé plus haut.

conditions sur la notion de « système de jeu », qu'il appelle encore « martingale » et qui est relative aux différentes sommes que va miser, avec une somme initiale égale à 1, un joueur au cours du temps sur les événements  $\{x^n = 1\}$  et  $\{x^n = 0\}$ , pour  $n \geq 1$ , de la suite infinie  $x = x^1 x^2 \dots x^n \dots$  considérée<sup>389</sup>. Le choix des suites infinies d'épreuves retenues sous le nom de collectif n'est plus alors déterminé par l'axiome de von Mises-Wald. Il repose dans la théorie de Ville sur la condition qu'aucune martingale (ou système de jeu) ne saurait permettre à un joueur de gagner indéfiniment<sup>390</sup>. Autrement exprimé, si  $s_n$  désigne la somme dont dispose le joueur après le  $n^{\text{ième}}$  coup ( $n \geq 1$ ),  $s_n$  est une fonction de  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  et la condition de Ville se traduit par l'inégalité<sup>391</sup> :

$$\sup_{n=1,2,3,\dots} s_n(x^1, x^2, \dots, x^n) < \infty$$

D'après plusieurs auteurs sur l'histoire de la notion de martingale, tels que Pierre Crépel et Glenn Shafer, Ville est le premier mathématicien à l'introduire explicitement en probabilités<sup>392</sup>. Dans sa formulation d'une nouvelle condition d'irrégularité, Ville utilise des concepts de théorie des jeux. Il est le seul des doctorants en probabilités de la fin des années 1930 à aborder et à utiliser cette théorie. C'est d'ailleurs lui qui a rédigé le cours professé en 1937-1938 à la faculté des sciences de Paris par Émile Borel sur les *Applications aux jeux du hasard*<sup>393</sup>. À la fin des années 1930, il est donc considéré par Borel comme le spécialiste de la théorie des jeux, ce dont témoigne sa thèse<sup>394</sup>.

389. Cf. VILLE 1939a, p. 71-72.

390. Cf. le rapport sur la thèse écrit par Fréchet et VILLE 1939a, p. 71-72.

391. Cf. VILLE 1939a, p. 73.

392. Cf. pour davantage de détails sur l'introduction de cette notion : MANSUY 2005, CRÉPEL 1984. Bernard Bru, dans BRU ET AL. 1999, p. 206-207, et Glenn Shafer, dans SHAFER et VOVK 2001, p. 48-49 et p.52-53, présentent de façon détaillée l'introduction par Ville de cette notion et les résultats qu'il obtient alors pour la théorie des collectifs. La définition axiomatisée que Ville donne de la martingale n'apparaît pas dès l'énoncé du système de jeu qui lui permet d'énoncer une nouvelle condition d'irrégularité pour les collectifs. Il l'explicite peu après et l'énonce ainsi (cf. VILLE 1939a, p. 83) :

« DEFINITION 1 : Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  une suite de variables aléatoires telles que les probabilités

$$Pr(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

soient bien définies et que les  $X_i$  ne puissent prendre que des valeurs finies.

Soit une suite de fonctions  $s_0, s_1(x_1), s_2(x_1, x_2), \dots$  non négatives telles que

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ \mathcal{M}_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}}(s_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X_n)) = s_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{cases}$$

où  $\mathcal{M}_X(Y)$  représente d'une manière générale la valeur moyenne conditionnelle de la variable  $Y$  quand on connaît la position du point aléatoire  $X$  au sens indiqué par M.P. Lévy.

Dans ces conditions, nous dirons que la suite  $\{s_n\}$  définit une martingale ou un jeu équitable. »

393. Cf. VILLE 1939b.

394. Borel l'écrit d'ailleurs dans la préface de l'ouvrage : « Il était particulièrement préparé à cette tâche par ses belles recherches personnelles sur le calcul des probabilités », VILLE 1938, p. VIII-Préface. On pourrait supposer que la participation de Ville à la rédaction du cours de Borel a joué dans l'aide accordée par le mathématicien à la soutenance de son doctorat.

Enfin dans un dernier chapitre, Ville applique la notion de martingale, qu'il définit dans un cadre plus général, à la démonstration d'énoncés dans la théorie classique des probabilités. Il associe alors « à chaque problème un jeu équitable et [étudie] l'espérance mathématique correspondante » ce qui revient à traiter le problème de la ruine des joueurs pour établir des propositions sur la limitations des écarts<sup>395</sup>. Parmi les résultats obtenus par le doctorant et que Pierre Crépel a déjà analysés<sup>396</sup> figurent notamment le « théorème de la ruine des joueurs » dans le cas discontinu<sup>397</sup> ainsi que la moitié de la démonstration d'un théorème de Komogoroff sur l'ordre de grandeur de la répétition d'un événement dans  $n$  épreuves indépendantes de probabilité constante  $p$ <sup>398</sup>. Ville considère ensuite les suites continues  $(X_t)$ <sup>399</sup>. Il étend alors sa définition de la martingale<sup>400</sup> ainsi que la formule de la ruine des joueurs en un certain sens et sous certaines conditions. Cependant, comme le souligne Pierre Crépel<sup>401</sup>, le passage correspondant est jugé « obscur » par Doob dans le rapport qu'il écrit en 1939 sur VILLE 1939b<sup>402</sup>. Enfin, Ville étudie certaines applications de ses résultats, parmi lesquelles figure une application à la théorie des processus de Markov continus<sup>403</sup>, théorie travaillée au même moment à la fois par Wolfgang Doeblin et par Robert Fortet. Si les trois doctorants se connaissent et participent ensemble au séminaire de probabilités de l'Institut Henri Poincaré, aucun d'entre eux ne reprend directement les résultats d'un autre. Chacun propose un point de vue différent pour traiter ce sujet. Ville est le seul des trois à faire référence presque uniquement aux travaux de Paul Lévy. Certains ouvrages de Fréchet sont cités par Ville mais en tant qu'ouvrage de référence pour évoquer des résultats déjà démontrés<sup>404</sup>.

Lors de cette application de sa notion de martingale à la théorie classique des probabilités, Ville fait ainsi référence à plusieurs reprises à des résultats de Paul Lévy, exposés dans LÉVY 1937, notamment sur les « espérances et moyennes conditionnelles » de certaines variables quand on connaît la « position d'un point aléatoire  $X$  », sur les processus à temps continus et sur le début des processus stochastiques, comme indiqué

---

395. Cf. VILLE 1939a, p. 78.

396. Cf. CRÉPEL 1984, p. 51-53.

397. Cf. VILLE 1939a, p. 82-83. Le théorème donne une inégalité maximale qui est également rapportée dans BRU ET AL. 1999, p. 206 : « Si  $\{s_n\}$  est une suite définissant une martingale et  $\lambda$  un nombre  $> 1$ , nous avons l'égalité :  $P(\sup_{(n)} s_n(X_1, \dots, X_n) \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$ . »

398. Cf. CRÉPEL 1984, p. 52 et VILLE 1939a, p. 87. Claude Dellacherie analyse également certains résultats obtenus par Ville sur les martingales dans DELLACHERIE 1978, p. 33-35.

399. Auparavant, il n'avait considéré que les suites discrètes de variables aléatoires.

400. Cf. VILLE 1939a, p. 95.

401. Cf. CRÉPEL 1984, p. 52.

402. Cf. DOOB 1939.

403. Cf. CRÉPEL 1984, p. 52.

404. Cf. par exemple VILLE 1939a, p. 19, où Ville cite FRÉCHET 1938 pour rappeler un résultat classique sur les chaînes de Markov.

dans le paragraphe précédent<sup>405</sup>. Certains de ces résultats sont par ailleurs repris par Michel Loève dans sa thèse en 1941, mais ce dernier ne cite pas le mémoire de Ville. La définition que donne Ville de la notion de martingale est d'ailleurs fondée sur la « valeur moyenne conditionnelle » d'une variable « au sens indiqué par [...] Lévy »<sup>406</sup>. L'article BRU ET AL. 1999 signale d'ailleurs l'influence possible des travaux de Lévy sur ceux de Ville<sup>407</sup>.

Par son sujet et par les circonstances de la découverte de ce sujet, Ville se trouve donc en léger décalage avec les autres doctorants en calcul des probabilités de la fin des années 1930. Il est le seul à avoir fondé l'origine de son travail sur des connaissances acquises à l'occasion d'un séjour à l'étranger. En outre, au moment où il commence à le traiter, le sujet de son mémoire n'est étudié directement par aucun autre mathématicien français de l'époque : au milieu des années 1930, ni Lévy, ni Darmois, ni Fréchet ou Borel ne publient sur la théorie des collectifs, même s'ils la connaissent et ont exprimé des objections à son encontre<sup>408</sup>. Enfin, il doit attendre plusieurs années avant d'avoir l'autorisation de soutenir son doctorat, et, d'après Bernard Bru, ses relations avec Fréchet, tant que celui-ci n'a pas donné son accord, ne semblent pas les mêmes que celles qu'entretient le mathématicien avec Wolfgang Doeblin ou Robert Fortet. Le sujet choisi par Ville, sur le fondement des probabilités, n'apparaît pas encore totalement accepté par le milieu académique français comme un sujet de mathématiques. La réticence initiale de Fréchet en est une preuve, le commentaire de Borel (pourtant président du jury de la thèse) rapporté par Ville peut en être une autre. Borel, tout en reconnaissant l'intérêt du travail a ainsi déclaré : « il est temps que vous fassiez de l'analyse »<sup>409</sup>. Pourtant, plusieurs éléments viennent nuancer ce décalage apparent.

En effet, la question des fondements des probabilités et la discussion de la théorie des collectifs est au centre des intérêts mathématiques internationaux en calcul des pro-

405. Cf. VILLE 1939a, p. 83, p. 101, p. 104, etc. Ville reconnaît explicitement l'utilisation des résultats de Lévy dès l'introduction de son mémoire, VILLE 1939a, p. 2. Il précise alors qu'« à cette occasion, [Lévy] a lu une partie du manuscrit » et que « ses observations [lui] ont été très précieuses ». Je n'ai cependant pas pu trouver confirmation de ce fait. La correspondance entre Lévy et Fréchet, cf. BARBUT ET AL. 2004, ne comporte cependant aucune mention d'un échange entre Lévy et Ville avant 1943. En outre, lors d'une conversation entre Ville et Pierre Crépel, cf. CRÉPEL 2009, Ville explique que Lévy n'a pas lu sa thèse.

406. Cf. VILLE 1939a, p. 83.

407. Cf. p. 207. Il y est toutefois précisé que « Ville est le premier à identifier véritablement le rôle central des martingales en théorie des probabilités et à en indiquer plusieurs applications intéressantes ». Les relations entre Paul Lévy et Jean Ville semblent n'avoir presque pas existé. Jean Ville ne les mentionne pas dans sa thèse. Laurent Mazliak a étudié de façon plus approfondie la question dans son article MAZLIAK 2009a, paru après la soutenance de ma propre thèse et auquel je renvoie donc sur le sujet.

408. Objections que Ville mentionne d'ailleurs dans sa thèse, cf. VILLE 1939a, p. 77. Elles concernent l'impossibilité de « donner un modèle arithmétique d'une suite présentant tous les caractères d'une suite prise au hasard » que Ville ne résout pas malgré la nouvelle condition d'irrégularité qu'il vient d'énoncer au moyen des martingales.

409. Cf. par exemple D'ORGEVAL 1992, p. 388.



babilités tout au long des années 1930. Dès 1931, von Mises vient d'ailleurs exposer sa théorie dans une conférence donnée à l'Institut Henri Poincaré, dont le contenu est publié l'année suivante dans les *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, VON MISES 1932<sup>410</sup>. En outre, à l'occasion du colloque de Genève sur le calcul des probabilités, une partie est entièrement consacrée à la question des fondements<sup>411</sup> et au moins trois conférences qui y sont prononcées discutent de la théorie des collectifs : celles de Maurice Fréchet, *Exposé et discussion de quelques recherches récentes sur les fondements du calcul des probabilités*, de Richard von Mises, *Quelques remarques sur les fondements du calcul des probabilités*, et d'Abraham Wald, *die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes*. Maurice Fréchet y expose notamment certains des résultats de la thèse de Jean Ville et fait directement référence au travail du doctorant dans un discours où il reprend plus globalement les différentes évolutions de la théorie des collectifs, étudiées en partie par Ville dans son *Étude critique de la notion des collectifs*<sup>412</sup>. Le changement d'attitude de Maurice Fréchet est à relever : initialement réticent, il défend et présente les travaux du doctorant à un colloque international. Ville cite d'ailleurs en bibliographie de sa thèse les comptes rendus de ce colloque même s'il a établi ses résultats antérieurement et déjà rédigé en partie son manuscrit<sup>413</sup>. Le travail de Ville témoigne donc d'une direction de recherche importante en théorie des probabilités au cours des années 1930 : la discussion de la théorie des collectifs et l'interprétation des probabilités.

Cependant, d'après Glenn Shafer et Vladimir Vovk<sup>414</sup>, la thèse et les résultats de Ville n'ont eu que peu d'impact sur l'évolution immédiate de la théorie des collectifs, malgré la diffusion qu'en a faite Fréchet à Genève en 1937 ou le commentaire écrit par Doob dans le *Bulletin of the American Mathematical Society* sur l'ouvrage de Ville tiré de sa thèse (VILLE 1939b)<sup>415</sup>. Doob, même s'il n'est pas entièrement positif sur le mémoire<sup>416</sup>, souligne les apports de l'analyse comparative des différents critères vérifiés

---

410. Cet article figure d'ailleurs parmi les références bibliographiques de Ville.

411. Cf. CANTELLI ET AL. 1938.

412. Cf. CANTELLI ET AL. 1938, p. 23-56.

413. Il cite ainsi les conférences introductives, les textes des conférences sur les fondements ainsi que le résumé qu'en fait Bruno de Finetti, cf. WAVRE ET AL. 1938; CANTELLI ET AL. 1938; DE FINETTI 1939. Dans la mesure où la bibliographie de la thèse est identique à celle de l'ouvrage publié dans la *Collection des Monographies des probabilités*, on peut penser que Ville a voulu faire de son ouvrage, un ouvrage de référence. La bibliographie a alors pour objectif d'être aussi exhaustive que possible, même si le doctorant ne cite pas toutes les références au cours de son ouvrage, ce qui est le cas des conférences prononcées au Colloque de Genève.

414. Cf. SHAFER ET VOVK 2001, p. 48.

415. Signalons également qu'en 1940, le mathématicien et philosophe français, Jean Cavaillès discute dans CAVAILLÈS 1940 de théories récentes sur les probabilités et de la question de l'interprétation des probabilités qu'impliquent ces différentes théories. Évoquant la théorie des collectifs et les travaux de von Mises et Reichenbach, il mentionne les contributions de Jean Ville pour définir de façon « satisfaisante » un collectif ainsi que ceux de Wald, sans faire de différence entre les deux mathématiciens, sans inclure un jugement comparatif sur la valeur de leurs travaux respectifs.

416. Comme je l'ai déjà indiqué précédemment. Doob souligne certaines inexactitudes et imprécisions du travail : « It is unfortunate that this book, which contains much material which clarifies the subject, should contain so much careless writing ».

par les collectifs ainsi que les « idées stimulantes » du doctorant notamment dans la discussion sur les martingales qu'il propose. L'historiographie récente des probabilités réévalue toutefois le travail de Ville sur la théorie des collectifs et le situe comme une étape importante dans les discussions sur cette théorie<sup>417</sup>.

Enfin, le travail de Ville est connu au niveau du milieu académique français des probabilités. Ville expose ainsi ses résultats à l'occasion d'une séance du séminaire *Exposés et Discussions sur le calcul des Probabilités*, appelé encore « Séminaire Borel ». Il mentionne d'ailleurs cette séance dans l'introduction de sa thèse et souligne le profit qu'il a tiré de la discussion qui s'ensuivit<sup>418</sup>. Cette participation au séminaire, tout comme les applications que propose Ville de la notion de martingale à la théorie classique des probabilités et notamment à l'étude des processus continus de Markov, contribuent à ancrer le sujet du doctorant dans le milieu français même si l'aspect « philosophique » du mémoire mentionné par Fréchet le situe en léger décalage. En outre, un dernier point est commun entre la thèse de Ville et certains autres doctorats soutenus au même moment, ceux de Doeblin ou Fortet par exemple : les références aux deux ouvrages de Fréchet, FRÉCHET 1937, 1938, dès lors qu'il s'agit de citer un résultat connu ou d'utiliser une notion de la théorie classique modernisée des probabilités<sup>419</sup>.

## 6.4 Conclusion

### 6.4.1 Relations entre mathématiciens et doctorants en probabilités à la fin des années 1930

Le calcul des probabilités change radicalement pendant l'entre-deux-guerres. Les thèses soutenues dans ce domaine en confirment les transformations. Les années 1920 sont marquées par l'omniprésence institutionnelle et intellectuelle de Borel qui cherche à promouvoir ce domaine émergent. Pendant cette décennie, une seule thèse est soutenue, en probabilités géométriques, et elle porte la trace de l'influence du mathématicien.

---

417. Cf. VON PLATO 1994; SHAFER et VOVK 2001; SIEGMUND-SCHULTZE 2006.

418. Ville ne précise pas quel profit exact il en a tiré. Si comme il est indiqué dans CRÉPEL 2009, CRÉPEL 1984, p. 42-53, VILLE et SHAFER 2005 et SHAFER et VOVK 2001, p. 197-198, ses résultats principaux datent de 1936, on peut penser que le profit touche à l'introduction et à la présentation finale de ses résultats dans VILLE 1939a et VILLE 1939b, les deux ouvrages ne différant que par l'introduction et la conclusion : de deux pages dans la thèse, elle s'étend à 17 pages dans l'ouvrage correspondant. Il y introduit les différentes définitions des probabilités qui ont été formulées et introduit les notions d'événement aléatoire, de jeu équitable, de fréquence, etc. Aucune conclusion ne figurait dans la thèse. D'après Fréchet dans le rapport de thèse, les ajouts de VILLE 1939b constituent des « commentaires interprétatifs » des résultats de Ville dans la thèse. Le doctorant cherche à y montrer quels sont les progrès que son travail sur la théorie des collectifs permet pour la question des fondements des probabilités. Il y rassemble des « considérations d'ordre non mathématique » sur « le champ des événements probabilisables, l'interprétation des petites et des grandes probabilités, la notion d'irrégularité, la probabilité de l'événement isolé », VILLE 1939b, p. 130.

419. Cf. par exemple VILLE 1939a, p. 19,30,96.

Pendant les années 1930 et 1940, l'influence du mathématicien diminue et il ne semble plus jouer de rôle intellectuel. Aucun doctorant ne fonde son travail sur ses recherches ou ne se réclame de son influence. S'il est encore en arrière-plan du paysage, il joue surtout un rôle institutionnel en tant que président de quelques thèses de calcul des probabilités, celles de Daniel Dugué, Wolfgang Doeblin et Jean Ville<sup>420</sup>. Il est remplacé sur la scène des probabilités par les mathématiciens qu'il a fait venir pour l'aider à promouvoir le domaine, Fréchet et Darmois, ainsi que par Lévy. L'étude des thèses soutenues à la fin des années 1930 confirme la place intellectuelle occupée par ces trois mathématiciens et elle révèle et précise leurs sphères d'influences respectives.

L'influence de Darmois est mise en évidence par les deux thèses consacrées à l'étude d'articles ou de résultats de R.A. Fisher : celle de Daniel Dugué sur la théorie de l'estimation et celle de Gustave Malécot sur la théorie de l'hérédité mendélienne, deux sujets explicitement traités par Fisher respectivement dans FISHER 1925 et FISHER 1918. Le mémoire de Gustave Malécot est révélateur d'une direction de la recherche en calcul des probabilités mise en avant par Borel dès les années 1920 : l'application de ce domaine à l'étude d'autres champs de la science. Darmois semble ainsi être celui qui, à la fin des années 1930, a remplacé Borel pour promouvoir cette direction. En outre, ce rôle est confirmé par la thèse d'André Blanc-Lapierre, exemple de l'application des probabilités à la physique. Pour ce doctorat, on voit également apparaître une nouvelle génération de mathématiciens, celle de Robert Fortet, qui aide Blanc-Lapierre dans ses recherches. L'importance de Darmois ne se mesure pas aux nombres de citations de ses travaux mais elle se traduit par les directions de recherche qu'il préconise : il fait étudier par deux doctorants les travaux de Fisher et insiste sur le rôle des applications. Dugué comme Malécot reconnaissent ainsi explicitement le rôle qu'il a joué dans l'élaboration de leur travail (choix du sujet, guide et conseil pendant la recherche). Pour Blanc-Lapierre, il joue davantage un rôle d'encouragement en facilitant la soutenance du mémoire à la faculté des sciences de Paris, Fortet n'ayant pas le pouvoir institutionnel suffisant, en 1945, en tant que professeur de l'université de Caen.

L'influence de Darmois ne dépasse cependant pas le cadre de ces trois thèses. Le mathématicien ne semble jouer aucun rôle sur les autres thèses de probabilités. La sphère d'influence de Fréchet est disjointe de celle de Darmois comme sont séparés les domaines mathématiques sur lesquels publient les deux mathématiciens. Cette séparation se trouve illustrée dans une lettre qu'écrit Maurice Fréchet à Wolfgang Doeblin le 8 septembre 1938<sup>421</sup>. Fréchet y écrit à propos de Michel Loève, qui en 1938 semble encore s'intéresser à l'actuariat : « Vous me parlez de Loève. Est-il exact qu'il soit

420. Il est de toutes les façons à la fin de sa carrière académique puisqu'il quitte ses fonctions en janvier 1940, cf. par exemple MAZLIAK et SHAFER 2008, p. 4.

421. Cf. BRU 1993, p. 26. D'après la note que Bernard Bru (p.52), cette lettre est déposée aux archives de Marbach, ref. : D. Döblin.C.D. Wolfgang Döblin.

en train de travailler avec Darmois ? En ce cas, je préfère ne rien lui demander, il est dans ce cas plus naturel de ne pas le détourner des études, recherches ou travaux qui lui auraient été proposés par M. Darmois ». Même si leurs relations sont cordiales, les deux professeurs que sont Darmois et Fréchet ne semblent donc pas très proches.

La sphère d'influence de Fréchet s'étend aux quatre autres doctorants : Fortet et Doeblin qui travaillent sur les chaînes de Markov, comme le mathématicien, ainsi que Ville et Loève. Les quatre doctorants sont d'ailleurs dans l'historiographie actuelle parfois désignés comme les « élèves de Fréchet », notamment par Bernard Bru. Cependant pour Ville et Loève, le rôle de Fréchet est davantage institutionnel. Les deux mémoires des mathématiciens ont d'ailleurs comme point commun de citer certains ouvrages de Fréchet comme des ouvrages où sont recensés des résultats connus et classiques en probabilités. Pour ces deux doctorants, Fréchet apparaît davantage comme agent de liaison avec les travaux d'autres mathématiciens dont Paul Lévy, que la fonction de professeur à l'École polytechnique prive de rôle à la faculté des sciences de Paris<sup>422</sup>.

Les thèses soutenues à la fin des années 1930 en calcul des probabilités témoignent de l'émergence de ce domaine dans le milieu mathématique français. Chacune des sept thèses aborde un problème d'un point de vue différent et font référence à des ouvrages mathématiques que l'on ne retrouve en général pas mentionnés dans les autres doctorats. D'ailleurs, à l'exception de Fortet qui évoque sans les utiliser les résultats obtenus par Doeblin sur les chaînes de Markov, aucun autre doctorant ne cite le travail d'un autre. Chaque mémoire se construit indépendamment des autres. Cela ne signifie cependant pas que chaque doctorant est isolé. Chacun s'empare de différents thèmes représentatifs de directions de la recherche en probabilités et intègre de nouvelles théories, développées en France ou à l'étranger. Le séminaire qu'ils animent ensemble à la fin des années 1930 à l'Institut Henri Poincaré (au moins Ville, Fortet, Doeblin et Loève y participent de façon certaine) montre en outre que les doctorants se connaissent, qu'ils connaissent les sujets de recherche des uns et des autres et que ces sujets évoluent, intégrant différentes avancées. Des collaborations se font entre doctorants ainsi qu'entre doctorants et mathématiciens. Dans la thèse d'André Blanc-Lapierre, qui est soutenue en décalage, en 1945, celui-ci cite des travaux des doctorants différents de ceux qui sont exposés dans leur thèse. Sa thèse témoigne alors des évolutions rapides des sujets et des travaux dans un domaine qui se développe.

---

422. Un schéma résumant les relations entre mathématiciens et entre mathématiciens et doctorants en probabilités figure à la fin de ce chapitre.

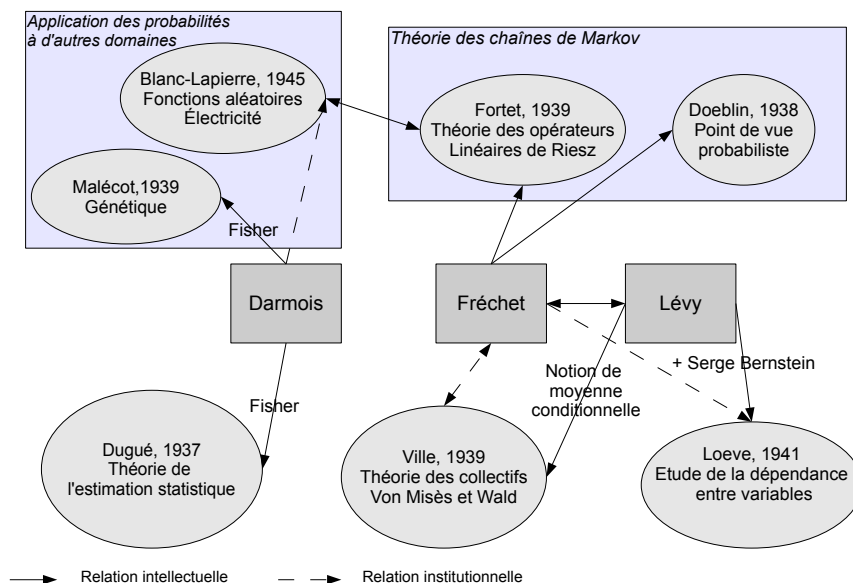


FIGURE 6.1 – Relations entre mathématiciens et doctorants français en probabilités à la fin des années 1930

### 6.4.2 Les doctorants en probabilités dans l'immédiate après-seconde-guerre mondiale

Le domaine des probabilités est marqué par la seconde guerre mondiale, qui en freine l'essor. Wolfgang Doeblin meurt au cours de cette guerre, alors que ses travaux laissaient supposer qu'il pouvait jouer un rôle important en probabilités<sup>423</sup>. Michel Loève est emprisonné à Drancy pendant la période d'occupation de la France par l'Allemagne. Ensuite, de 1944 à 1946, il est chargé de recherches à l'Institut Henri Poincaré; en 1946, il quitte la France pour l'université de Londres et y travaille de 1946 à 1948. Il est ensuite à l'université de Colombia puis à celle de Berkeley à partir de 1948<sup>424</sup>. On peut se demander si la guerre n'a pas également joué un rôle dans le faible impact des théories et des résultats proposés dans certaines thèses, notamment celles de Fortet et de Ville.

Au final, des sept doctorants en calcul des probabilités de la fin de l'entre-deux-guerres, trois seulement restent dans le domaine français du calcul des probabilités : Michel Loève part pour Berkeley, André Blanc-Lapierre est du côté de la physique tout en s'intéressant aux fonctions aléatoires<sup>425</sup>, tandis que Malécot continue à se spécialiser dans les probabilités et la génétique. Restent donc Daniel Dugué, qui se spécialise dans les statistiques, Jean Ville, qui travaille dans l'industrie privée et devient

423. En témoignent également les qualificatifs qui lui sont attribués, tels que « brillant » ou Paul Lévy qui le compare à Abel ou Galois dans LÉVY 1955.

424. Cf. UNIVERSITY OF CALIFORNIA (SYSTEM) ACADEMIC SENATE 1980.

425. D'après ce qu'il explique dans BLANC-LAPIERRE ET AL. 1997, p. 3.

professeur d'économétrie à la faculté des sciences de Paris en 1958<sup>426</sup>, et Robert Fortet. Fortet est celui qui occupe le plus rapidement la place institutionnelle la plus forte (dès 1939, il supplée Darmois à la faculté des sciences de Paris tout en étant chargé de recherche puis professeur à Caen). Il s'intéresse à la théorie des probabilités et également à ses applications à d'autres domaines, comme en témoigne son rôle dans la thèse d'André Blanc-Lapierre. De fait, il décale sa zone d'influence par rapport au milieu classique des mathématiques représenté par l'arithmétique et l'algèbre, la géométrie et l'analyse. Les domaines de recherches de Jean Ville après sa thèse restent également à la marge des probabilités travaillées en France. Il s'intéresse notamment à la recherche opérationnelle, à la théorie des jeux appliquée à l'économie, des domaines davantage travaillés aux États-Unis après la seconde guerre mondiale. Jean Ville ne participe donc pas directement à établir les probabilités comme un domaine classique des mathématiques françaises de la seconde moitié du XX<sup>ème</sup> siècle. Au niveau du poids institutionnel, le groupe des probabilistes reste faible. On peut penser que la présence de Doeblin aurait pu changer cet état de forces, d'autant qu'un groupe de jeunes mathématiciens participant du renouveau et du développement de ce domaine avait commencé à se former à la fin des années 1930.

On ne peut manquer d'effectuer un rapprochement entre ce nouveau groupe de mathématiciens qui se crée à la fin des années 1930 et le groupe Bourbaki du début des années 1930. Ville, à l'instar de certains membres de Bourbaki, a trouvé l'origine de certaines de ses recherches à l'étranger, notamment en Allemagne. Le groupe des doctorants en probabilités travaille sur un domaine qui n'est pas celui le plus étudié dans le milieu mathématique académique de l'entre-deux-guerres. Un séminaire Borel s'organise, faisant écho au séminaire Julia. Cependant, le succès des probabilistes ne semble pas comparable, au moins dans les décennies qui suivent la seconde guerre mondiale. Il serait intéressant de mieux comprendre cette différence et le rôle qu'a joué en particulier la formation par Bourbaki d'un groupe solide de mathématiciens acquis à la même cause et attelé à la publication d'un ouvrage commun, signe de la réalité de leur entité, ce qui n'est pas le cas des probabilistes.

---

426. Cf. BRU 1992, p. 41, note 44 ainsi que D'ORGEVAL 1992, p. 389. Plusieurs résultats de Jean Ville, notamment en théorie des Jeux, ont connu à la Libération des applications industrielles. D'après Bernard d'Orgeval, Jean Ville devint conseiller scientifique de l'Alsacienne de constructions mécaniques auprès de Roger Julia, depuis CIT Alcatel et en 1962, il y obtiendra une direction. Il collabore également avec le CEA sans que Bernard d'Orgeval précise quelles activités il y eut. Pour davantage de renseignements biographiques sur Ville pendant la guerre et sur la suite de ses recherches mathématiques, l'article BRU ET AL. 1999, 229-232 fournit des renseignements supplémentaires.



# Conclusion

Au terme de ce travail sur les thèses de sciences mathématiques soutenues en France durant l'entre-deux-guerres, je pense avoir montré la pertinence d'un tel corpus pour mettre en œuvre une nouvelle approche du milieu mathématique et de sa recherche dans cette période. Mon analyse des thèses, considérées sans filtre a priori, permet de réévaluer et de compléter les différentes images fragmentées et incomplètes qui en ont été produites jusqu'à présent, parmi lesquelles domine celle d'un milieu de la recherche autarcique, isolé et dominé par l'analyse, où la seule influence étrangère vient de l'Allemagne, à partir des années 1930, et s'exerce sur certains jeunes mathématiciens à la suite de voyages dans ce pays. Il en ressort une vision plus complexe et plus diverse de la recherche mathématique, mon étude mettant en lumière des aspects particuliers du milieu et de la recherche à différentes échelles – de la plus globale, l'équilibre entre domaines, à la plus fine, le contenu mathématique des thèses étudiées – qui dessinent ainsi des dynamiques nouvelles de l'entre-deux-guerres mathématique en France.

Un premier rééquilibrage concerne les disciplines, puisqu'il ressort clairement de cette étude que le domaine de l'analyse représente une part plus faible des sujets des doctorats que celle qui lui est prévue habituellement. Sont ainsi mis en évidence l'intérêt suscité par la géométrie différentielle, l'importance des mathématiques appliquées et l'émergence des probabilités. Il s'agit de domaines auxquels ont participé des doctorants à la carrière moins visible institutionnellement dans le milieu mathématique et qui ont jusqu'à récemment été occultés dans la mémoire collective des acteurs. Un second rééquilibrage concerne des centres de province qui, à certains moments de l'entre-deux-guerres, dans certains domaines mathématiques particuliers, ont eu une activité mathématique importante, que l'étude des thèses qui y ont été soutenues a permis de révéler.

L'exemple de Poitiers, qui met en lumière le rôle de Bouligand, ouvre sur un autre apport de cette étude. Mon analyse fait apparaître en effet de nouveaux personnages de premier plan sur cette scène mathématique française de l'entre-deux-guerres : certains sont inattendus, comme Élie Cartan en géométrie différentielle, alors qu'on le représente souvent tout à fait isolé, Georges Valiron en théorie de variable complexe ou Georges Darmon en calcul des probabilités.



Les travaux de ces mathématiciens français participent, comme je l'ai montré, d'un renouveau des sujets de thèse dans les années trente. Ils s'inscrivent dans une périodisation de l'entre-deux-guerres, que l'étude des thèses m'a permis de mettre en évidence. On constate en effet un changement de sujets et de théories référentes entre le début des années 1920 et les années 1930, constat d'autant plus marquant qu'il vaut pour les quatre domaines analysés : l'algèbre et l'arithmétique, la géométrie, la théorie des fonctions et le calcul des probabilités. Les premières thèses abordent des sujets de l'avant première guerre mondiale jusqu'au milieu des années 1920. Les années 1930 sont marquées par l'émergence de nouveaux sujets, de nouvelles méthodes, en partie initiées et développées à l'étranger.

Cette rupture des années 1930, que signale l'arrivée de ces thématiques dans les thèses et plus généralement dans le milieu mathématique français de ces années, n'est donc pas limitée aux seules recherches initiées par Bourbaki. Si elle s'explique en partie comme un effet des différents voyages des étudiants à l'étranger, permis notamment par la fondation Rockefeller, il serait cependant réducteur de n'y voir que cette origine. Les mathématiciens français cités plus haut, qui reprennent les théories étrangères, participent bien à ce renouvellement.

Mon étude montre également quelles sont ces sources étrangères connues et utilisées par les doctorants, bien au-delà des seuls travaux allemands habituellement considérés dans l'historiographie. Ces sources sont en effet d'origine multiple, et cela dès les années 1920. Il ne s'agit donc pas seulement des travaux d'Emmy Noether ou van der Waerden en arithmétique et en algèbre, dont l'influence est importante dans les thèses de ce domaine au cours des années 1930. En théorie des fonctions de la variable complexes, par exemple, des travaux de mathématiciens allemands comme Bieberbach et Carathéodory ou ceux de chercheurs finlandais comme Nevanlinna et Ahlfors sont cités et retravaillés dans les doctorats. De même les travaux de mathématiciens anglais sont repris dans plusieurs domaines : sur le sujet des séries trigonométriques avec Hardy, Littlewood, Paley et Young, en statistique avec Fisher. Certains travaux italiens en géométrie algébrique sont également repris à la fin de l'entre-deux-guerres.

L'analyse des thèses menée à l'échelle la plus fine révèle les méthodes et résultats utilisés par les doctorants, les types de questions étudiées et également leurs apports à leur domaine à travers les résultats qu'ils obtiennent et les généralisations de théories qu'ils démontrent. Elle montre ainsi comment certaines théories sont appropriées et intégrées à la pratique mathématique du doctorant. C'est le cas, par exemple, des théories de Nevanlinna et d'Ahlfors pour les fonctions de variable complexe, de plusieurs travaux de Cartan en géométrie différentielle, des travaux de Fisher dans les thèses de statistique, des travaux de Fréchet, Lévy et de probabilistes russes en théorie des

probabilités. Elle met en évidence des domaines de recherche en évolution, qui changent de théories référentes, qui en intègrent d'autres, qui les travaillent et les approfondissent.

Pour ce qui est de l'influence exercée par ces mathématiciens français dont mon étude a révélé le rôle dans les travaux des doctorants, elle apparaît toutefois inégale. La nature de leurs relations avec les doctorants ne répond pas à un modèle préétabli. On constate souvent une certaine indépendance des étudiants. Une partie d'entre eux abordent ainsi des sujets isolés, qui ne sont repris dans aucune autre thèse, et n'ont aucune référence endogène au corpus ou que l'on retrouve dans d'autres mémoires ou ne font même aucune référence commune avec le reste du corpus. Certains thèmes particuliers ne sont traités que dans des thèses isolées.

On touche ici à certaines limites de mon cadre d'analyse. Elles découlent intrinsèquement des caractéristiques du corpus et de celles des doctorants. En effet, ces derniers ne poursuivent pas tous une carrière dans la recherche mathématique et certains ne restent pas en France. Une part importante des étudiants étrangers repart dans leur pays d'origine pour y poursuivre leur carrière scientifique<sup>427</sup>. Ils ne peuvent alors participer au développement de leur sujet en France. S'ils continuent de le travailler et de diffuser leurs résultats, une fois revenus dans leur pays d'origine, l'étude des thèses soutenues en France ne permet pas de saisir ces dynamiques de recherches.

Le corpus des thèses mathématiques ne peut en outre prétendre couvrir l'ensemble des thèmes de la recherche et l'ensemble des dynamiques de recherches en France. Certains des patrons mathématiques<sup>428</sup> sont quelque peu absents dans notre étude : en tant que citations dans les doctorats et également en tant que membres de jury. Jacques Hadamard ou Henri Lebesgue ne sont ainsi que très peu cités dans les thèses de théorie des fonctions des années 1920<sup>429</sup> et ils ne le sont plus du tout dans les années 1930. Cette absence traduit la faiblesse de leur influence sur les thèses classées en théorie des fonctions. Elle ne signifie pas pour autant que leur influence ne peut pas s'exercer autrement ou sur d'autres domaines qui ne sont pas étudiés ici. Le séminaire d'Hadamard a ainsi joué un rôle important dans la diffusion de certaines théories, dans le temps même où ses propres travaux sont repris dans les thèses classées en calcul différentiel et intégral et en mécanique.

Les différentes limites que je viens de souligner engagent à poursuivre l'étude. Tout d'abord, il serait intéressant d'élargir l'analyse de deuxième ou troisième niveau à tous les domaines des sciences mathématiques et d'étudier ainsi le corpus des thèses de calcul différentiel et intégral ainsi que de mathématiques appliquées. Cela permettrait de mettre en évidence certains liens entre ces domaines, de montrer quelles applications

---

427. C'est notamment le cas de nombreux doctorants roumains et des étudiants chinois.

428. Cf. LELOUP et GISPERT prévu pour 2009.

429. Pour Lebesgue, par exemple, sa théorie de l'intégration ou ses travaux sur la classification des questions ne sont repris, au moins explicitement, que par deux thèses.

sont faites en mécanique du calcul différentiel ou comment les théories d'analyse participent à l'émergence de nouveaux sujets, en mécanique des fluides notamment. De telles relations, déjà mises en évidence pour les thèses soutenues entre 1900 et 1914, mériteraient un approfondissement. Elles s'inscrivent en outre dans un contexte plus large marqué par une volonté politique, de Painlevé notamment, de développement des mathématiques appliquées, qui se traduit notamment par la création d'Instituts de mécanique de fluide.

Il serait également intéressant d'approfondir, en aval de la thèse, où et comment les nouveaux docteurs développent leur sujet, comment ils continuent ou non de travailler sur les mêmes thèmes. Cela permettrait de mieux percevoir l'importance de leur thèse dans le développement des domaines concernés.

Ces perspectives possibles s'inscrivent en fait dans une ambition plus large, que j'ai esquissée dans l'introduction<sup>430</sup>, celle de dégager des dynamiques, au sens fort du terme. Dans cette acception, empruntée à la physique, la dynamique est une « branche de la mécanique qui étudie le mouvement d'un mobile considéré dans ses rapports avec les forces qui en font les causes ». L'utilisation de cette notion en histoire des mathématiques pour la période de l'entre-deux-guerres implique donc d'étudier les « mouvements » de la recherche académique française : les directions, les tendances prises par les différents intérêts de recherche que j'ai repérés dans le corpus des thèses, au sein de la production mathématique. Elle signifie également la nécessité dans un deuxième temps d'identifier et de dégager les phénomènes (intellectuels, institutionnels par exemple) à l'origine de changements de direction de recherche, ainsi que toutes les forces et les contraintes qui s'exercent au cours du temps sur cette évolution.

Dans la *Structure des Révolutions scientifiques*, Kuhn a déjà appliqué cette notion de dynamique au processus de développement des sciences physiques et des théories en en décrivant les transformations comme des processus longs qu'il appelle « révolution scientifique »<sup>431</sup>. Dans *La dynamique de l'occident*, Norbert Elias étudie les « processus de civilisation » : il en regarde leurs transformations successives. Il identifie et analyse les interconnexions, les interdépendances à l'origine du processus ainsi que les contraintes, les mécanismes d'interdépendance qui s'exercent sur ce processus et le transforment au cours du temps<sup>432</sup>.

Plus récemment, en histoire des mathématiques, Catherine Goldstein et Jim Ritter ont mené une réflexion sur cette notion en cherchant à dégager et à comprendre les dynamiques des théories unitaires. Ils ont montré que cette recherche ne peut être envi-

---

430. Cf. p. 35.

431. Révolution liée au changement de « paradigme », cf. KUHN 1983. On peut également citer les travaux d'Imre Lakatos qui utilise la notion de « programmes de recherche » à la place de celle de « théories » (chez Kuhn) pour décrire la science en regardant notamment la concurrence entre les programmes de recherche, cf. par exemple LAKATOS 1978.

432. Cf. ELIAS 2003 et notamment sa conclusion où Norbert Elias reprend l'essentiel de ses résultats.

sagée que dans le cadre de processus collectifs et que la compréhension des dynamiques d'un sujet est liée aux sélections opérées pour constituer le corpus. Il n'est en outre pas toujours possible d'arriver à dégager une dynamique satisfaisante des théories<sup>433</sup>.

Dégager des dynamiques au sens fort à partir des thèses mathématiques nécessite alors d'adjoindre à ce corpus d'autres productions mathématiques. Celles des doctorants, tout d'abord – comme par exemple leurs notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, leurs publications, antérieures et postérieures à leur soutenance, qui concernent leur sujet de thèse –, mais également, plus largement, d'exploiter les références citées dans les thèses, d'étudier les autres publications des mathématiciens concernés en lien avec le sujet et de chercher le devenir, au-delà du corpus des thèses, des idées et résultats nouveaux exposés dans les thèses. Un tel effort de recherche permettrait ainsi de mieux saisir comment certaines thèses s'inscrivent dans des dynamiques de recherche en France et à l'étranger.

Mon étude a mis en valeur une diversité cachée de l'entre-deux-guerres mathématique. Il s'agit maintenant d'étudier les origines et les évolutions de ces développements et de continuer à mettre en lumière les parcelles d'ombres restantes...

---

433. Cf. GOLDSTEIN et RITTER 2003, p.137. L'un des arguments avancés pour conclure à la dynamique insatisfaisante est qu'à ce stade de leur étude ils n'ont pas réussi à déterminer certains liens entre des éléments mathématiques, des propositions et des résultats des théories unitaires (par exemple des principes géométriques et les principes variationnels). De tels liens n'apparaissent que de façon éphémère et locale.



# Appendices



## Annexe A

Présentation du corpus : un exemple de thèse et de rapport de thèse, celle d'Henri Cartan en 1928.

### A.1 Manuscrit de thèse



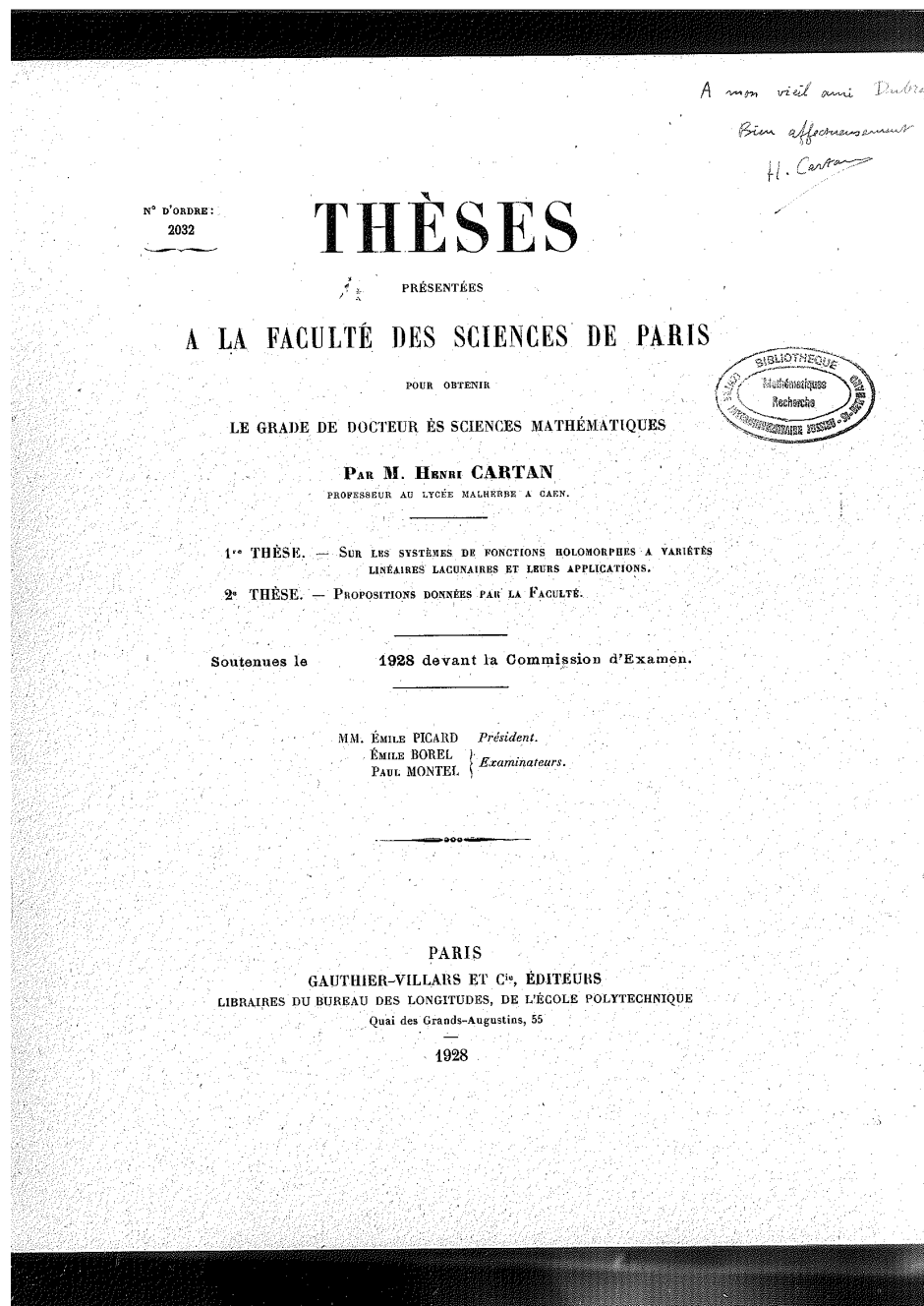


FIGURE A.1 – Première page du manuscrit

# UNIVERSITÉ DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.	
Doyen.....	C. MAURAIN, Professeur, Physique du globe.
Doyens honoraires.....	P. APPELL, M. MOLLIARD.
Professeurs honoraires.....	V. BOUSSINESQ, A. JOANNIS, H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC, R. DONGIER, E. HEROUARD.
Professeurs.....	E. PICARD..... Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	KOENIGS..... Mécanique physique et expérimentale.
	GOURSAT..... Calcul différentiel et Calcul intégral.
	JANET..... Electrotechnique générale.
	WALLERANT..... Minéralogie.
	ANDOYER..... Astronomie.
	PAINLEVÉ..... Mécanique analytique et Mécanique céleste.
	GABRIEL BERTRAND..... Chimie biologique.
	M <sup>me</sup> P. CURIE..... Physique générale et radioactivité.
	GAULLERY..... Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	G. URBAIN..... Chimie minérale.
	EMILE BOREL..... Calcul des probabilités et Physique mathématique.
	MARCHIS..... Aviation.
	REMY PERRIER..... Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	JEAN PERRIN..... Chimie physique.
	ABRAHAM..... Physique.
	M. MOLLIARD..... Physiologie végétale.
	E. CARTAN..... Géométrie supérieure.
	LAPICQUE..... Physiologie générale.
	VESSIOT..... Théorie des groupes et calcul des variations.
	COTTON..... Physique générale.
	DRACH..... Application de l'Analyse à la Géométrie.
	C. FABRY..... Physique.
	C. PEREZ..... Zoologie.
	LÉON BERTRAND..... Géologie appliquée et Géologie régionale.
	R. LESPIEAU..... Théories cliniques.
	E. RABAUD..... Biologie expérimentale.
	P. PORTIER..... Physiologie comparée.
	B. BLAISE..... Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD..... Botanique.
	P. MONTEL..... Mécanique rationnelle.
	P. WINTREBERT..... Anatomie et histologie comparées.
	O. DUBOSQ..... Biologie maritime.
	G. JULIA..... Mathématiques générales.
	A. MAILHE..... Etude des Combustibles.
	L. LUTAUD..... Géographie physique.
	EUGÈNE BLOCH..... Physique théorique et Physique céleste.
	HENRI VILLAT..... Mécanique des fluides et applications.
	CH. JACOB..... Géologie.
	P. PASCAL..... Chimie appliquée.
	N..... Chimie générale.
	E. PECHARD..... Chimie (Enseign <sup>mt</sup> P.C.N.)
	V. AUGER..... Chimie analytique.
	M. GUICHARD..... Chimie minérale.
	A. GUILLET..... Physique.
	C. MAUGUIN..... Minéralogie.
	L. BLARINGHEM..... Botanique.
	A. MICHEL-LÉVY..... Pétrographie.
	A. DEREIMS..... Géologie.
	A. DENJOY..... Calcul différentiel et intégral.
	H. BENARD..... Physique (P. C. N.).
	E. DARMOIS..... Physique.
	G. BRUHAT..... Physique.
	H. MOUTON..... Chimie physique.
	L. JOLAUD..... Paléontologie.
	M. JAVILLIER..... Chimie biologique.
	A. DUFOUR..... Physique (P. C. N.).
	F. PICARD..... Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	ROBERT-LÉVY..... Zoologie.
	L. DUNOYER..... Optique appliquée.
	A. GUILLEMOND..... Botanique (P. C. N.).
Secrétaire.....	A. DEBIERNE..... Radioactivité.
	D. TOMBECK.

84802 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>ie</sup>, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

03605 a

22 MARS 1989

FIGURE A.2 – 2<sup>ème</sup> page du manuscrit

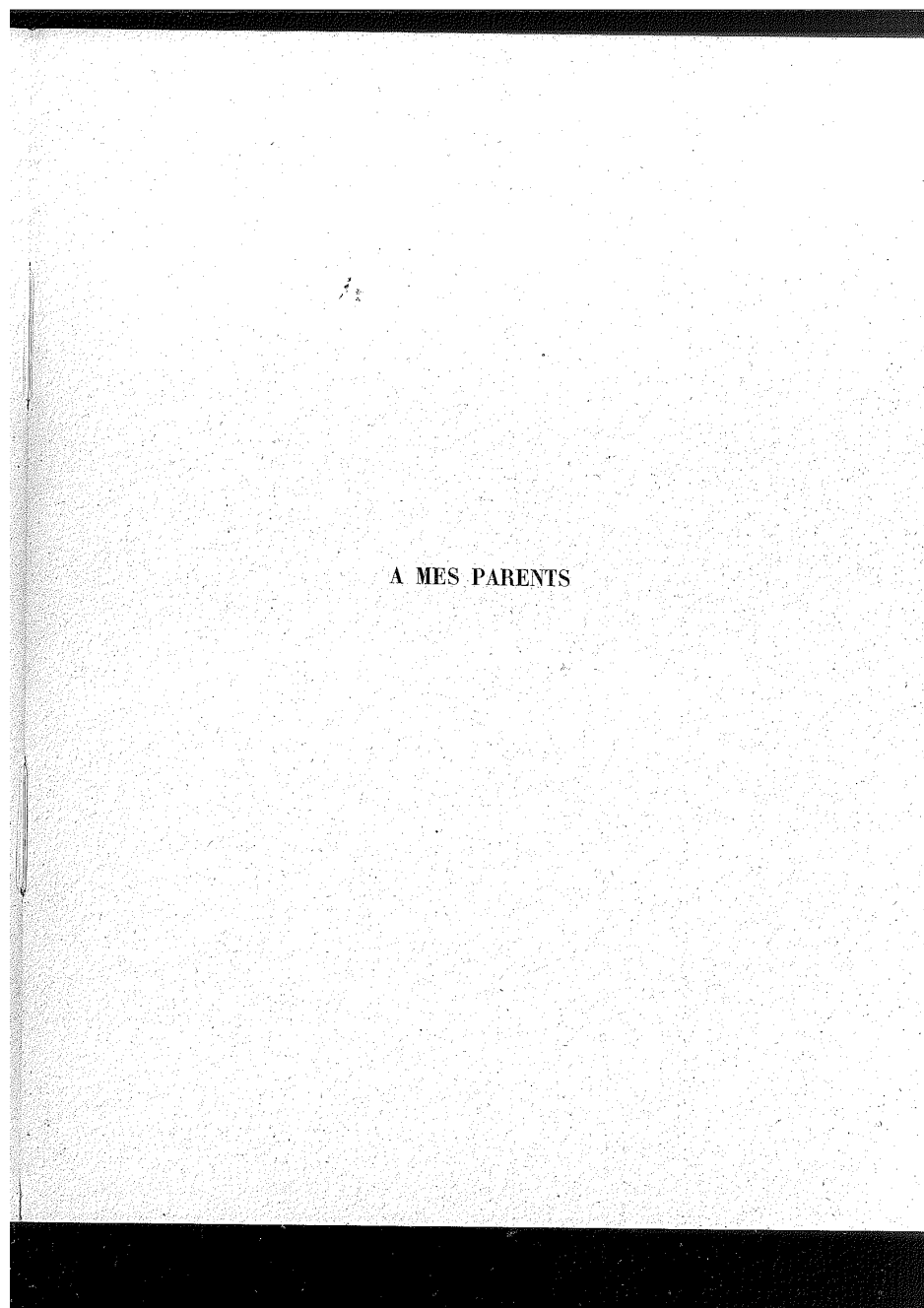


FIGURE A.3 – 3<sup>ème</sup> page du manuscrit - Dédicace

## PREMIÈRE THÈSE.

SUR

## LES SYSTÈMES DE FONCTIONS HOLOMORPHES

A VARIÉTÉS LINÉAIRES LACUNAIRES

ET

LEURS APPLICATIONS

## Introduction.

1. Émile Borel a démontré [B] <sup>(1)</sup> en 1897 l'impossibilité d'une identité

$$X_1(x) + X_2(x) + \dots + X_p(x) \equiv 0,$$

entre des fonctions entières, sans zéros, de la variable complexe  $x$ . Voici, plus précisément, la forme que l'on peut donner à son théorème : *Si l'on a une telle identité, ou bien les rapports mutuels des fonctions sont des constantes, — ou bien les fonctions se partagent en plusieurs groupes, la somme des fonctions d'un même groupe est identiquement nulle, et leurs rapports mutuels sont des constantes.*

Lorsque  $p = 3$ , ce théorème équivaut <sup>(2)</sup> au théorème de E. Picard : « une fonction entière ne peut admettre deux valeurs exceptionnelles finies ». Or, on a complété le théorème de Picard en le « traduisant en

(1) Les lettres placées entre crochets renvoient à l'Index bibliographique.

(2) En effet, si l'on avait

$$X_1 + X_2 + X_3 \equiv 0,$$

la fonction  $-\frac{X_1}{X_3}$ , par exemple, serait entière et ne prendrait aucune des valeurs *zéro* et *un*.

FIGURE A.4 — 4<sup>ème</sup> page du manuscrit - Début du mémoire

92 H. CARTAN. — SUR LES SYSTÈMES DE FONCTIONS HOLOMORPHES, ETC.

Par conséquent, il existe sur  $\Gamma$  un point  $z_0$ , qui jouit de la propriété suivante : étant donné un cercle  $C$  quelconque, de centre  $z_0$ , on peut trouver une suite infinie  $\sigma_{\mu_n}$  telle que, dans chacun des cercles  $C_{\mu_n}$ , la fonction  $\frac{f-1}{g-1}$  ait au moins un zéro ou un pôle. Prenons alors une suite infinie de cercles, de centre  $z_0$ , dont les rayons tendent vers zéro ; pour chacun d'eux nous avons une suite  $\sigma_{\mu_n}$ . La suite diagonale fournit la suite  $\sigma_{\mu_n}$  de l'énoncé, et le théorème est démontré.

*Vu et approuvé :*

Paris, le 3 octobre 1928.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,  
C. MAURAIN.

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 3 octobre 1928.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,  
S. CHARLÉTY.

FIGURE A.5 – Dernière page du texte du mémoire

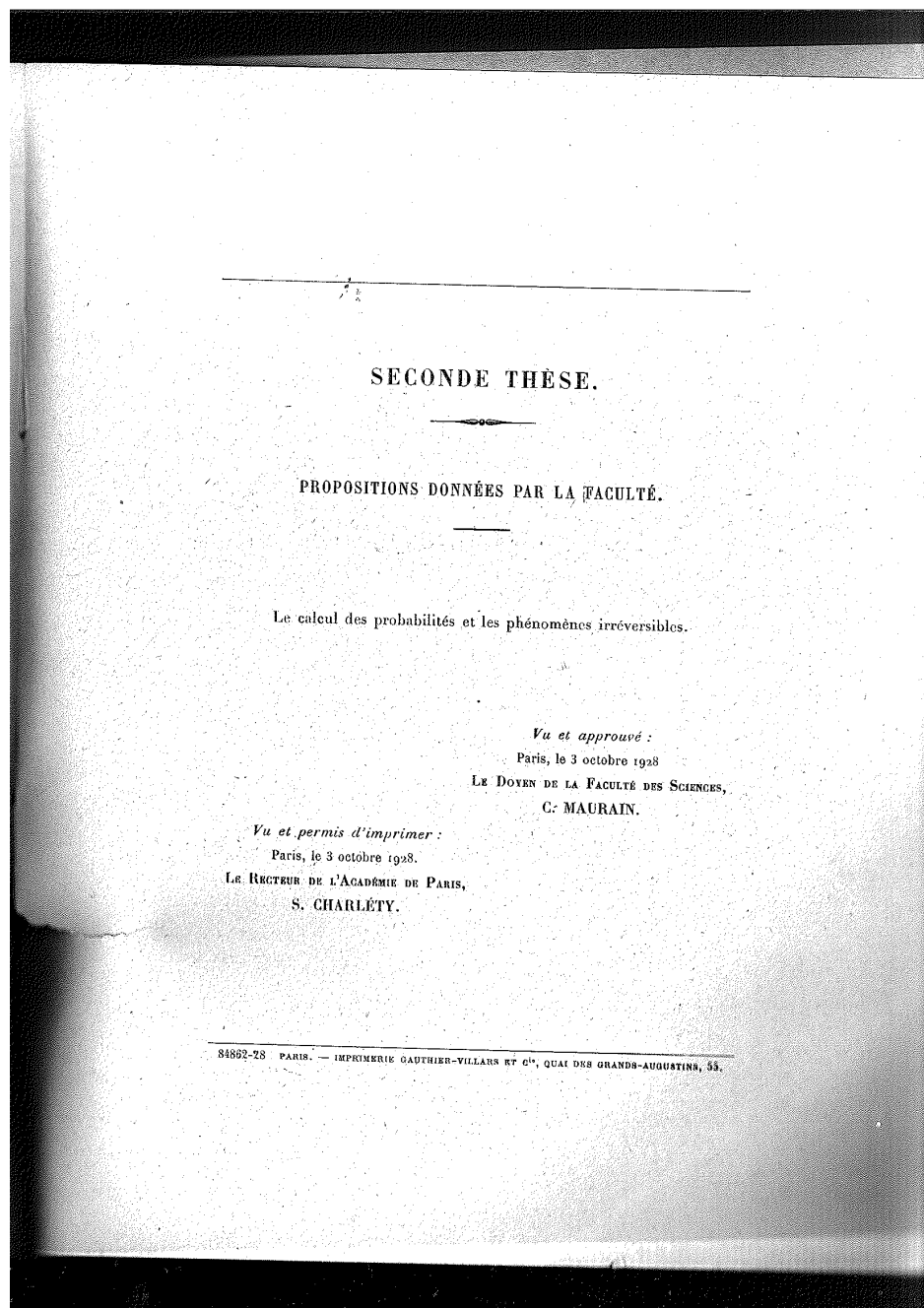


FIGURE A.6 – Dernière page du manuscrit - Titre des propositions de la Faculté

PROCÈS-VERBAUX D'EXAMENS ET RÉCEPTIONS

NUMÉROS  
d'ordre

EXAMEN SUBI POUR LE DOCTORAT ES SCIENCES *le 20 mars 1906*

Nous, Professeurs de la Faculté des Sciences de Paris;

En exécution du décret impérial du 17 mars 1808, du Statut du 16 février 1839, du décret impérial du 22 août 1854, et conformément au Règlement du 5 juin 1858;

Vu le Diplôme de Licence es sciences délivré le *11 Mars* 1897.

N M *Blatin* *Gony*

né le *Bucard* *Norman* le *17 Mars* 1861.

Lui avons fait soutenir une première Thèse ayant pour sujet:

*Sur l'équilibre des forces et des forces tendues.*

et une seconde Thèse ayant pour sujet: Propositions données par la Faculté

*Sur l'équilibre intégral.*

et l'avons déclaré digne du grade de Docteur es sciences.

avec la mention *très honorable*

Les Membres du Jury,

*Blatin*  
*Bucard*  
*Norman*

Le Secrétaire,  
*Blatin*

FIGURE A.7 – Exemple de procès-verbal d'examen du doctorat d'État

## A.2 Exemple de fichier de rapport de thèse : rapport de la thèse d'Henri Cartan

**Henri Cartan**

Doctorat ès sciences mathématiques

Date inscrite sur la thèse : "8 décembre 1928"

Date inscrite sur le rapport : "8 décembre 1928"

Titre de la première thèse : Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications

Titre de la seconde thèse : Le calcul des probabilités et les phénomènes irréversibles

Membres du jury de thèse

Président : Picard

Rapporteur : Montel

Autres : Borel

### Rapport sur la thèse de M. Henri Paul Cartan

*"Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications".*

Référence : Aj 16 5546 aux Archives nationales.

Le théorème de M. Picard sur l'indétermination d'une fonction entière montre l'impossibilité de l'identité :

$$F_1 + F_2 \equiv 1,$$

Ou encore de l'identité :

$$X_1 + X_2 + X_3 \equiv 0,$$

Les lettres F et X désignant des fonctions entières dépourvues de zéros. Les théorèmes de M. Landau et de M. Schottky limitent, en fonction des premiers coefficients de  $F_1$  ou de  $F_2$ , le rayon d'existences de telles identités pour des fonctions holomorphes et non nulles autour de l'origine : ils se déduisent de la propriété de former des familles normales que possèdent les fonctions  $F_1$  et  $F_2$ .

Or, M. Borel a démontré l'impossibilité de l'identité



$$F_1 + F_2 + \dots + F_{p-1} \equiv 1,$$

ou

$$X_1 + X_2 + \dots + X_p \equiv 0,$$

entre des fonctions entières  $F$  ou  $X$ , sans zéros, et en nombre quelconque. Ne peut-on, dans le cas où  $p$  dépasse 3, établir des théorèmes analogues à ceux de M. Landau et de M. Schottky, limitant, en fonction des premiers coefficients des fonctions  $F_1, F_2, \dots$ , holomorphes et dépourvues de zéros autour de l'origine le rayon d'existence de telles identités ? Ne peut-on montrer que les systèmes  $F_1, F_2, \dots, F_{p-1}$  correspondant forment une famille complexe normale ?

C'est M. A. Bloch qui s'est posé le premier de ces problèmes. Il l'a résolu en partie dans son Mémoire des Annales de l'École normale où<sup>1</sup> il a esquissé les démonstrations de théorèmes répondant à la question, mais ses raisonnements sont insuffisants et reposent d'ailleurs sur un lemme fondamental que son auteur n'est pas parvenu à établir.

M. H. Cartan s'est posé le second problème plus général et dont la solution entraîne celle du premier. Il a suivi la marche générale que M. A. Bloch avait indiquée, mais il a précisé tous les détails et, en particulier, a démontré simplement le lemme fondamental. Ses conclusions entraînent l'exactitude des propositions que M. A. Bloch avait énoncées avec une étonnante pénétration. Seulement, tandis que M. A. Bloch impose aux fonctions  $F$  des conditions initiales qui limitent le nombre des éventualités possibles, le problème plus général de M. H. Cartan conduit, lorsque  $p$  est supérieur à 4, à des cas exceptionnels sur lesquels ses recherches n'ont pu encore faire entièrement la lumière. Voici d'ailleurs une analyse détaillée de cette partie de son travail.

Le Chapitre I rappelle les propriétés essentielles des valeurs moyennes de M.M. F. et R. Nevanlinna pour une fonction  $f(x)$  :

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\phi})| d\phi,$$

et des nombres

$$T(r) = m(r) + \overline{\log} \frac{r^n}{|a_1 a_2 \dots a_n|},$$

( $a_1, a_2, \dots, a_n$  désignant les pôles non nuls de modules inférieurs à  $r$ ) qui jouent un rôle important dans l'étude de la croissance de la fonction. Il en déduit un critère de famille normale pour les systèmes de fonctions  $X$  assujetties à des conditions initiales assez larges.

---

1. passage peu lisible sur le manuscrit

Une étude plus approfondie exige la comparaison des nombres  $T(r)$  relatifs, non plus à l'origine, mais à des points variables du domaine d'existence des fonctions  $X$ , domaine que l'on supposera être le cercle  $|x| < 1$ . Les termes en  $\log \left| \frac{x}{a_i} \right|$  sont remplacés par des termes de la forme  $\log \left| \frac{x-a_i}{1-x\bar{a}_i} \right|$ ,  $\bar{a}_i$  désignant le conjugué de  $a_i$ , qui deviennent infinis aux points  $a_i$ . Cette comparaison repose sur le lemme suivant :

« Etant donnés  $n$  points  $P_i$  fixes dans le plan, les points  $M$  de ce plan pour lesquels on a  $MP_1 \times MP_2 \times \dots \times MP_n < \rho^n$ ,  $\rho$  étant un nombre arbitraire, peuvent être enfermés dans des cercles dont le nombre ne dépasse pas  $n$  et dont les rayons ont une somme inférieure à  $2e\rho$  ( $e$  désigne la base des logarithmes népériens). »

La démonstration de ce lemme et les généralisations étendues qu'il comporte font l'objet du Chapitre II. Le procédé employé, simple et habile, a un caractère élémentaire ; il repose sur l'emploi de caches circulaires qui recouvrent les points voisins des points  $P_i$ .

Dans les Chapitres III et IV, M. H. Cartan aborde la recherche d'un critère de famille complexe normale. Pour bien comprendre son résultat, définissant avec lui les fonctions de 1<sup>ère</sup> et de 2<sup>ème</sup> catégorie d'un groupe de fonctions  $X$ , holomorphes et sans zéro. Soient  $X_1, X_2, \dots, X_K$ ,  $K$  fonctions d'un groupe ; supposons qu'on puisse les partager en deux groupes partiels  $X_1, X_2, \dots, X_k$  et  $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_K$  avec  $2 \leq k \leq K$ , possédant les propriétés suivantes. Dans le premier groupe partiel, les rapports tels que  $\frac{X_1}{X_2}$  forment des familles normales et bornées : aucune de leurs limites n'est donc nulle ; le rapport de la somme  $X_1 + \dots + X_k$  à l'un de ses termes a pour limite zéro ; le rapport d'une fonction du second groupe à une fonction du premier a pour limite zéro. Dans ces conditions les fonctions  $X_1, X_2, \dots, X_k$  sont de 1<sup>ère</sup> catégorie et les fonctions  $X_{k+1}, \dots, X_K$  sont de 2<sup>ème</sup> catégorie. On peut alors énoncer le théorème général suivant :

« Soient  $X_1, X_2, \dots, X_p$ ,  $p$  fonctions holomorphes non nulles pour  $|x| < 1$ , et vérifiant dans ce cercle l'identité  $X_1 + \dots + X_p \equiv 0$  ; la famille de ces fonctions comprend au moins deux groupes formés de fonctions de 1<sup>ère</sup> et de 2<sup>ème</sup> catégorie, ou bien toutes les fonctions forment un groupe. »

Lorsque  $p = 4$ , il peut y avoir un groupe, ou 2 groupes, mais pas davantage, puisque un groupe a au moins deux termes. Si  $p > 4$ , il peut y avoir plus de deux groupes, et ce dernier cas n'est pas complètement éclairci.

Si l'on impose aux fonctions  $X$  ou  $F$  des conditions telles qu'il ne puisse exister qu'un seul groupe, on obtient des théorèmes prévus par M. A. Bloch. Par exemple, « Soient  $F_1, F_2, \dots, F_{p-1}$ ,  $p - 1$  fonctions holomorphes et non nulles et dont la somme n'est jamais égale à un lorsque  $|x| < 1$  ; supposons que les valeurs de ces fonctions soient, pour  $x = 0$ , différentes de un et que les sommes d'un nombre quelconque d'entre elles soient, pour  $x = 0$ , différentes de zéro : il existe un nombre fixe bornant supérieurement

les modules de ces fonctions dans le cercle  $|x| < \theta$  ( $0 < \theta < 1$ ). » C'est une extension remarquable du théorème de M. Schottky.

Les résultats précédents sont étendus au Chapitre V, aux fonctions analytiques de plusieurs variables.

Enfin, dans le Chapitre VI, l'auteur étudie des problèmes d'unicité posés par M. G. Polya et M. R. Nevanlinna. Soit  $E(a)$ , l'ensemble des zéros de  $f(x) - a$ ,  $f(x)$  désignant une fonction méromorphe dans le plan et chaque zéro étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité. Quel est le nombre minimum de valeurs de  $a$  tel qu'une fonction méromorphe soit complètement déterminée par la connaissance des ensembles  $E(a)$  correspondants ?

M. H. Cartan montre que ce problème se ramène à l'étude de certaines identités entre des fonctions X. M. R. Nevanlinna avait établi que toute fonction méromorphe non constante est déterminée par la connaissance de cinq ensembles  $E(a)$ , si l'on ne tient pas compte des ordres de multiplicité. M. H. Cartan montre que, « si l'on tient compte de cet ordre de multiplicité, toute fonction méromorphe non constante est déterminée par la connaissance des ensembles  $E(a)$  pour quatre valeurs de  $a$ , sauf dans le cas où ces quatre valeurs sont en relation harmonique ; qu'il y a au plus deux<sup>2</sup> fonctions méromorphes admettant les mêmes ensembles  $E(a)$  pour trois valeurs de  $a$ . » Ces théorèmes, simples et précis, sont étendus au cas où l'on néglige un nombre fini de points de chaque ensemble  $E(a)$ , et au cas où la fonction  $f(x)$  n'est définie qu'au voisinage d'un point essentiel isolé.

Dans son Mémoire, M. H. Cartan a résolu des problèmes difficiles au moyen de méthodes relativement simples et très heureusement adaptées au but. Si, pour la résolution du problème fondamental, il a dû suivre la voie que M. A. Bloch avait tracée, il l'a fait en démontrant pour la première fois le lemme fondamental sur lequel repose le raisonnement et en éclairant des points obscurs. Pour les questions d'unicité, signalons qu'en dernier lieu, la méthode est entièrement originale.

L'ensemble du travail révèle un esprit inventif, pénétrant et juste, et témoigne de connaissances étendues : il paraît porter la marque d'une intelligence mathématique de haute qualité.

Je propose d'accepter le Mémoire de M. H. Cartan comme thèse pour le doctorat ès sciences et de lui accorder le permis d'imprimer.

Le 8 août 1928

Paul Montel.

**Rapport sur la soutenance de Thèse de M. Henri Cartan.**

---

2. passage peu lisible

« La soutenance de la thèse de M. Cartan a été très remarquable. Il a montré combien il avait réfléchi sur nombre de questions se rattachant au sujet de son travail, faisant preuve d'un esprit critique très fin, en dehors des qualités d'invention et d'originalité que signale M. Montel dans son rapport. Nous avons retrouvé le même esprit critique dans la seconde thèse sur l'irréversibilité, où M. Cartan a montré qu'il n'était pas dupe de certains mots si souvent utilisés<sup>3</sup> dans les applications du Calcul des probabilités à la Physique.

Mention : très honorable.

Le 8 décembre 1928

Émile Picard

---

3. illisible



## Annexe B

# Justifications pour la classification de certains doctorats non recensés dans le *Jahrbuch*

## Thèses soutenues à Paris

### B.1 Bratu

La thèse n'est pas directement référencée dans le *Jahrbuch*. Une publication de l'auteur, de 1914 (*Figures d'équilibre d'un fil dont les éléments se repoussent mutuellement*, 1914, Darboux Bull. (2) 38, 240-244) nous sert à classer la thèse, le titre étant presque semblable à celui de la thèse.

### B.2 Besserve

La thèse de Besserve n'est pas référencé par *Jahrbuch* comme aucune autre de ses publications. En effectuant une recherche sur les termes "surfaces cerclées", on trouve les deux publications qui paraissent à des dates contemporaines du mémoire de Besserve et dont je me sers pour classer l'ouvrage.

- Lelievre (Note sur les surfaces cerclées), 1922, Ens. math. 22, 55, classée en géométrie, géométrie différentielle
- Demoulin, A. *Sur les surfaces réglées, les surfaces cerclées et les surfaces à ligne de courbure sphériques dans un système.*, 1919, Belg. Bull. Sciences, 511-520. aussi répertorié en géométrie, géométrie différentielle.

## B.3 Julia

Toutes les notes aux CRAS de Julia de l'année 1917, référencées par le *Jahrbuch* et se rapportant au sujet de la thèse, sont classées dans le chapitre indiqué.

## B.4 Egnell

La thèse n'est pas référencée telle quelle. Dans les commentaires de l'article d'Egnell qui est recensé, en 1919, (*Champs vectoriels à directions asymptotiques indéterminées.*, 1919, C. R. 168, 1263-1265), la thèse est évoquée et les thématiques de l'article sont dites être évoquées en annexe de la thèse. L'article est référencé en géométrie. géométrie différentielle. Les autres articles de l'auteur de 1920 sont également classés dans cette rubrique.

D'autres publications contemporaines portant sur le même thème sont également classées dans cette rubrique ; par exemple : Bouvaist, R., *Note de géométrie infinitésimale*, 1918, Nouv. Ann. (4) 18, 161-175. ; ou Goormaghtigh, R., *Sur un problème de géométrie infinitésimale*, 1919, Nouv. Ann. (4) 19, 177-184 ; etc.

## B.5 Haumé-Hérouard

La thèse n'est pas référencée dans le *Jahrbuch*. Une recherche sur les termes "surfaces réelles", donne l'article suivant : Gambier, B., *Application imaginaire de deux surfaces réelles ou imaginaires. Systèmes cycliques ou systèmes triples orthogonaux réels correspondants.*, 1920, C. R. 171, 1049-1052. Cette publication me sert à classer la thèse en géométrie, géométrie différentielle.

## B.6 Lebel

La thèse n'est pas directement référencée dans le *Jahrbuch*. Les autres travaux de l'auteur ne se rapportant pas explicitement au titre du Mémoire, j'ai fait une recherche à partir du titre de la thèse sur "surfaces isothermiques" qui donne comme résultats contemporains des articles tous référencés en géométrie, géométrie différentielle, classément que j'ai donc adopté.

- Guichard, C., *Sur les surfaces isothermiques.*, C. R. 168, 1185-1188, publié en 1919.
- Guichard, C., *Sur un mode de génération des surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système.*, C. R. 168, 982-984, publié en 1919
- Gambier, B., *Représentation conforme avec conservation des lignes de courbure et de la valeur absolue du rapport des rayons de courbure principaux. Surfaces*

*de révolution ; surfaces minima ; surfaces isothermiques ; hélicoidales et spirales.*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 39, 217-271, publié en 1922.

- Gambier, B., *Surfaces isothermiques à représentation sphérique isotherme.*, C. R. 174, 921-924, publié en 1922.
- Gambier, B., *Sur les correspondances ponctuelles de deux surfaces et sur une classe de surfaces analogues aux surfaces isothermiques.*, C. R. 174, 1110-1113, publié en 1922.

## B.7 Jacques

La thèse n'est pas directement référencée dans le *Jahrbuch*, mais une note au CRAS, parue la même année de publication du mémoire et portant exactement le même nom, l'est : *Sur les surfaces telles que les axes des cercles osculateurs à une famille de lignes de courbure appartiennent à un complexe linéaire.*, C. R. 174, 281-282. Le classement adopté est celui de cette note.

## B.8 Schieldrop

La thèse n'est pas directement référencée. Aucune publication de l'auteur, contemporaine de la publication du doctorat n'est non plus recensée. Une recherche sur le terme "accélération", ne donnant pas de résultats concluants, j'ai regardé les travaux de l'auteur référencés par le répertoire et qui paraissent à des dates relativement contemporaines. Parmi elles, deux semblent avoir un sujet proche de celui de la thèse :

- *Sur une notion de déviation non holonome et son application à la cinématique et la dynamique des systèmes matériels*, 1926, VI. Skand. Mathematikerkongress, 281-307 ;
- *La déviation non holonome*, 1926, C. R. 182, 564-566 ;

Elles sont classées en mécanique, Statique et dynamique des systèmes de points et des corps solides, classement que confirme le rapport.

## B.9 Riabouchinski

La thèse n'est pas directement référencée dans le *Jahrbuch*, mais tous les articles et notes aux CRAS de l'auteur publiés en 1921 et en 1922, l'année de publication du mémoire, sont sans exception classés en mécanique, mécanique des corps déformables. Le rapport ainsi que le titre explicite du mémoire "Recherches d'hydrodynamique" confirment cette classification.



## B.10 Beghin

La thèse n'est pas directement référencées. En 1921, deux publications de l'auteur sont recensées. L'une d'entre elles est une note au CRAS qui porte le même titre que la thèse. Les deux sont classées en mécanique, statique et Dynamique des systèmes de points et des corps solides, classement que confirme le rapport.

## B.11 Lagrange

La thèse n'est pas directement référencée mais toutes les publications de l'auteur contemporaines se rapportant au sujet du mémoire sont classées en géométrie, géométrie différentielle, notamment *Sur le calcul différentiel absolu*, 1921, C. R. 173, 1325-1327, qui en porte le nom exact.

## B.12 Porchet

Aucun article de l'auteur n'est référencé. Une recherche sur le mot du titre de la thèse, "écoulement" donne comme publications les plus contemporaines du doctorat les deux suivantes :

- Grialou, J., *Mouvement rotationnel vertical plan des liquides parfaits. Ecoulement par un orifice*, 1927, C. R. 185, 930-932, classé en mécanique, mécanique des fluides.
- Jouguet, E., *Sur un problème d'hydraulique généralisée. Écoulement d'un mélange gazeux en combustion*, 1919, C. R. 169, 326-328, classé en mécanique, mécanique des corps déformables.

En 1923, la rubrique n'a pas encore changé de nom par rapport à 1919, j'ai donc classé la thèse en mécanique, mécanique des corps déformables.

## B.13 Yamamoto

La thèse n'est pas référencée dans *Jahrbuch*. Mais la seule publication de l'auteur qui y est référencée (*Contributions à l'étude des constitutions intérieurs du globe terrestre*, 1929, Japanese Journal of Astronomy and Geophysics 6, 161-176) se rapporte directement au sujet de la thèse. C'est le classement de cet article, en "géodésie et géophysique, astronomie ; géodésie et géophysique", que j'ai choisi.

## B.14 Krebs

La thèse n'est pas directement référencée mais un article de l'auteur est référencé et il se rapporte directement à la thèse : *Sur deux équations aux dérivées partielles du second ordre*, 1925, Verhandlungen Aarau, 106. Jahresversammlung, 2. Teil, 101-103 ; Enseignement 24, 297-299. Son classement détermine celui de la thèse.

## B.15 Vasilesco

La thèse de l'auteur n'est pas référencée dans le *Jahrbuch*. Les premières publications de l'auteur référencées datent de 1927 et ne semblent pas directement concerner le sujet de la thèse (*Sur le problème de Dirichlet*, 1927, C. R. 185, 1572-1575). Une recherche sur les termes du titre "fonctions multiformes" aboutit aux résultats contemporains suivants, tous classés en analyse, théorie générale des fonctions de la variable complexe.

- Kasanin, R., *Sur les formes analytiques des fonctions multiformes*, 1926, Glas CXVII (53), 11-49 ;
- Fatou, P., *Sur une propriété de certaines fonctions analytiques multiformes*, 1925, C. R. 181, 902-904 ;
- Rémoundos, G. J., *Sur l'extension du théorème de M. Picard aux fonctions multiformes*, 1925, C. R. 181, 459-461 ;
- Varopoulos, Th., *Les dérivées des fonctions multiformes*, 1924, C. R. 179, 589-590.

Même si le titre de la thèse précise "variable réelle", j'ai choisi de classer la thèse dans cette rubrique, le rapport n'apportant aucune précision permettant de trancher.

## B.16 Paloque

La thèse n'est pas référencée, tout comme aucune autre publication de l'auteur. Une recherche à partir du titre, sur les noms "mouvement", "planètes", donne comme résultats contemporains deux publications, classées toutes deux en géodésie et géophysique, astronomie, astronomie.

- Fatou, P., *Sur le mouvement du périhélie des planètes*, 1928, C. R. 186, 65-67 ;
- de la Villemarqué, E., *Perturbations générales par Jupiter des Planètes 1025 434, 1019 et, éventuellement, d'autres planètes à moyen mouvement compris entre 1250" et 1350"*, 1929, Astronomische Nachrichten 236, 213-232.

C'est donc ce classement que j'ai adopté.

## B.17 Eyraud

La thèse n'est pas référencée directement le *Jahrbuch*. Les publications de l'auteur recensées en 1925 et 1926 sont les suivantes :

- *La théorie affine asymétrique du champ électromagnétique et le rayonnement atomique.*, 1925, C. R. 180, 1245-1248, classé en “physique mathématique, théorie de la relativité” ;
- *Sur le caractère riemannien projectif du champ gravifique électromagnétique*, 1925, C. R. 180, 127-129 ; classé en “physique mathématique, théorie de la relativité” ;
- *Sur deux déformations complémentaires de l'espace à connexion affine général*, 1925, C. R. 180, 1090-1093 ; classé en géométrie, géométrie différentielle ;
- *Les équations de la dynamique de l'éther*, 1926, Paris, A. Blanchard, 68p. ; en physique mathématique, théorie de la relativité.

Compte-tenu du titre de la thèse et du nombre de publications concordants, c'est ce dernier classement que j'ai choisi.

## B.18 Long

La thèse n'est pas référencée dans le *Jahrbuch*. Les premières publications de l'auteur référencées dans le répertoire bibliographique datent de 1935. Elles sont toutes, sans exception, référencées en géométrie, géométrie différentielle. Une recherche à partir de mots du titre, "transformations" et "polaires", donne une publication de 1935 : Golab, S, *Les transformations par polaires réciproques dans la géométrie de Finsler*, 1935, C. R. 200, 1462-1464 ; classée en géométrie, géométrie différentielle. Dans la classification du *Jahrbuch*, cette rubrique restant entièrement stable entre les deux dates, j'ai décidé d'y classer la thèse de Louis Long.

## B.19 Jekhowski

La thèse n'est pas référencée dans le *Jahrbuch*. Les publications de l'auteur qui se rapportent au sujet de la thèse sont antérieures, mais le rapport de la thèse mentionne ce fait. Le classement des notes au CRAS les plus récentes sera adopté. Il s'agit d'“analyse, fonctions particulières”.

- *Sur les fonctions de Bessel à deux variables*, 1921, C. R. 172, 1331-1332 ;
- *Sur les équations différentielles du second ordre vérifiées par les fonctions de Bessel à plusieurs variables*, 1920, C. R. 170, 1042-1045 ;

En faisant une recherche à partir du titre on trouve ces publications d'Akimoff, N.W., *Transcendantes de Fourier-Bessel à plusieurs variables*, 1927, C. R. 185, 409-412, référencée en analyse, fonctions particulières, ce qui confirme le classement choisi.

## B.20 Nechvile

La thèse n'est pas directement référencée. À une période contemporaine de la date de soutenance, plusieurs travaux de l'auteur sont référencés par le *Jahrbuch* :

- *Sur la théorie des deux courants stellaires et la théorie ellipsoïdale*, 1928, C. R. 186, 848-850, classé en géodésie, géophysique, astronomie, astronomie ;
- *Sur la fréquence des mouvements apparents des étoiles*, 1927, C. R. 185, 37-39, classé en géodésie, géophysique, astronomie, astronomie ;
- *Sur une nouvelle forme d'équations différentielles du problème restreint elliptique*, 1926, C. R. 182, 310-31, classé en mécanique, statique et dynamique.

Le titre de la note au CRAS de 1927 semble le plus proche du sujet de la thèse, c'est donc son classement que j'ai adopté.

## B.21 Féraud

La thèse n'est pas directement référencée. Avant la date de soutenance, plusieurs travaux de Féraud sont référencés par le *Jahrbuch*, dont un qui porte le titre du mémoire de doctorat. C'est le classement de cette dernière note au CRAS que j'ai choisi.

- *Les correspondances  $C_{23}$  entre les surfaces de l'espace à quatre dimensions*, 1927, C. R. 185, 692-694, classé en géométrie, géométrie algébrique ;
- *Sur une généralisation des correspondances ponctuelles qui établissent l'applicabilité projective*, 1927, C. R. 184, 1630-1632, classé en géométrie, géométrie algébrique ;
- *Sur les surfaces admettant un groupe fini de déformations projectives*, 1928, C. R. 186, 1086-1087, classé en géométrie, géométrie différentielle.

## B.22 Nicolesco

Sa thèse n'est pas référencée explicitement. Avant 1928, un seul article de l'auteur est recensé : *Sur les fonctions de bipoint et les fonctions aréolairement conjuguées*, 1927, C. R. 185, 442-444. Il est classé en analyse, théorie générale des fonctions de la variable complexe. Vu le titre de la thèse (*Fonctions complexes dans le plan et dans l'espace*), ce classement semble approprié et le rapport confirme ce choix.

## B.23 Demtchenko

La thèse n'est pas directement référencée, mais l'auteur publie avant sa thèse plusieurs articles et notes au CRAS, dont le thème est proche du sujet de son doctorat et qui sont toutes référencées en mécanique, mécanique des fluides.

- *Sur les cavitations ellipsoïdales solitaires dans un liquide illimité*, 1926, Journal Ecole Polytechn. (2) 26, 113-124 ;
- *Sur la variation des vitesses d'un liquide infini entourant un solide dont la surface se déforme*, I, II, 1927, Bulletin sc. Math. (2) 51 ; 320-328, 338-346 ;
- *Forces perturbatrices agissant sur un corps qui se meut dans un liquide près d'une paroi*, 1927, C. R. 185, 1186-1189 ;
- *Sur la stabilité des captations*, 1927, C. R. 184, 1314-1316 ;
- *Sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide près d'une paroi*, 1928, Bulletin S. M. F. 56, 215-223.

## B.24 Charrueau

La thèse n'est pas référencée directement dans le *Jahrbuch*. Cependant l'auteur publie au même moment des notes au CRAS qui y sont recensées :

- *Sur une figure d'équilibre, de révolution, d'une masse liquide en rotation, soumise à l'attraction newtonienne entre ses particules et à la tension superficielle*, 1927, C. R. 184, 961-963, classé en mécanique, mécanique des fluides ;
- *Sur les surfaces d'équilibre relatif d'une masse liquide de révolution à tension superficielle, en rotation uniforme*, 1927, C. R. 184, 1043-1046, classé en mécanique, mécanique des fluides ;
- *Sur les figures d'équilibre relatif d'une masse liquide en rotation, à attraction newtonienne entre ses particules et à tension superficielle*, 1927, C. R. 184, 1418-1420, classé en mécanique, mécanique des fluides ;
- *Étude d'une masse liquide de révolution homogène, sans pesanteur et à tension superficielle, libre dans un milieu à pression uniforme, animée d'une rotation uniforme autour de son axe de révolution*, 1926, Annales École norm. (3) 43, 129-176, classé en géodésie, géophysique, astronomie, astronomie, astrophysique ;
- *Sur quelques propriétés géométriques des surfaces d'équilibre relatif d'une masse liquide de révolution, sans pesanteur, à tension superficielle, en rotation uniforme autour de son axe de révolution*, 1926, C. R. 182, 1601-1603, classé en géodésie, géophysique, astronomie, astronomie, astrophysique.

Comme les notes aux CRAS parues juste avant la thèse semblent très proches du sujet du Mémoire et qu'elles sont classées en mécanique, mécanique des fluides, c'est ce classement que j'ai adopté.

## B.25 Ghika

La thèse n'est pas directement référencée, mais les deux notes au CRAS publiées la même année que la thèse et dont le sujet semble directement s'y rapporter (*Sur le prolongement analytique d'une fonction donnée par son développement en série de Taylor*, 1929, C. R. 188, 607-609; *Sur les fonctions de carré sommable le long des contours de leurs domaines d'holomorphisme*, 1928, C. R. 186, 1808-1810) sont classées en analyse, théorie générale des fonctions complexes.

## B.26 Brard

La thèse n'est pas référencée directement dans le *Jahrbuch*. Parmi les publications de l'auteur recensées et qui date de la même époque, l'article suivant se rapporte au sujet de la thèse : *Le problème isocarène inverse ; les arbitraires dont dépend la stabilité de forme des navires*, 1931, *Verhandlungen Kongress Stockholm 2*, 411-417 ; il est classé en mécanique, statique et dynamique. C'est donc ce classement que j'ai choisi.

## B.27 Cioranescu

La thèse en elle-même n'est pas directement référencée, mais plusieurs notes aux CRAS publiées l'année de soutenance se rapportent au sujet traité :

- *Le problème de Dirichlet pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre.*, 1929, C. R. 188, 31-32, classée en analyse, théorie du potentiel et théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques ;
- *Le problème de Dirichlet pour les systèmes d'équations du type elliptique et l'extension d'une relation fonctionnelle de M. Hadamard.*, 1929, C. R. 188, 373-375, classée en analyse, théorie du potentiel et théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques ;
- *La méthode de Riemann pour les systèmes d'équations du second ordre.*, 1929, C. R. 188, 1473-1475, classée en analyse, équations différentielles paraboliques et hyperboliques.

Le classement adopté est alors "analyse, équations aux dérivées partielles".

## B.28 Chandon

La thèse n'est pas directement référencée dans le *Jahrbuch*, mais les deux publications référencées de l'auteur (*Sur la variation de la latitude de l'observatoire de Paris*, 1928, C. R. 186, 1823-1825 ; *Sur les marées de la mer Rouge*, 1928 C. R. 180, 683-685)

sont classées en géodésie et géophysique, astronomie, géodésie et géophysique, c'est donc ce classement que j'ai choisi.

## B.29 Cholodenko

La thèse n'est pas référencée dans le *Jahrbuch*, tout comme aucun autre travail de Cholodenko. Une recherche à partir du titre "mesure des ensembles", donne les résultats suivants :

- Jurek, B., *Les classes dénombrables et la mesure des ensembles* (Czech ; with French summary), 1931, Casopis 60, 152-156, classé en analyse, théorie générale des fonctions réelles ;
- Nikodym, O., *Contribution à la théorie des fonctionnelles linéaires en connexion avec la théorie de la mesure des ensembles abstraits*, 1931, Mathematica 5, 130-141, classé en analyse, théorie générale des fonctions réelles ;
- Steinhaus, H., *Sur la portée pratique et théorique de quelques théorèmes sur la mesure des ensembles de droites*, 1930, C. R. Congrès Math. Pays slaves 348-354, classé en Théorie des ensembles, Ensembles abstraits, ensembles de points ;
- Nikodym, O., *Sur une propriété de la mesure généralisée des ensembles. Pewne twierdzenie o mierze uogólnionej*, 1929, Prace mat.-fiz. 36, 65-71, classé en classé en analyse, théorie générale des fonctions réelles ;
- Bouligand, G., *Ordre de mesure et dimensions des ensembles fermés*, 1928, C. R. 187, 524-525, classé en classé en analyse, théorie générale des fonctions réelles.

Dans la courte introduction à sa thèse il se réfère au mémoire de M. Leau *Sur la mesure des ensembles linéaires*, 1918, Ann. de l'Éc. Norm., 35, 313-392, référencé par le *Jahrbuch* en Théorie des ensembles, Ensembles généraux et abstraits, ensembles de points. C'est donc finalement ce classement que j'ai choisi, identique à celui de la publication de Steinhaus, d'autant que cette rubrique du *Jahrbuch* est restée stable pendant cette période.

## B.30 Gay

La thèse n'est pas directement référencée dans le *Jahrbuch*. Mais toutes les publications de l'auteur autour de l'année 1930 sont référencées en mécanique des fluides :

- *Recherches sur l'hydrodynamique des liquides visqueux*, 1931, Publ. sci. techn. Ministère de l'Air 2, 126 p. ;
- *Mouvement lent, non permanent, d'un cylindre quelconque en liquide visqueux incompressible*, 1929, C. R. 188, 143-145 ;

- *Sur le mouvement d'un cylindre dans un fluide visqueux*, 1929, C. R. 188, 375-377.

## B.31 Callandreaux

La thèse n'est pas directement référencée dans les répertoires. Cependant, dans le *Jahrbuch* toutes les notes aux CRAS de l'auteur et les publications dans le Bulletin de la SMF de 1931 et 1932 sont classées en mécanique, mécanique des fluides, certaines ayant un titre très proche du sujet de la thèse (*Sur une correspondance étroite des théories de la poussée des terres de Coulomb et de Boussinesq*, 1932, C. R. 194, 953-955 ; *Sur les lignes de glissement d'un massif pulvérulent*, 1931, C. R. 192, 1150-1152 ; *Solutions approchées des lignes de rupture dans un massif pulvérulent*, 1931, C. R. 192, 1442-1443).

## B.32 Caratzénis

L'auteur comme sa thèse n'apparaissent ni dans le *Jahrbuch* ni dans le *Zentralblatt*. Une recherche de publications de 1931 contenant le terme "problème des trois corps" dans le titre donne des résultats tous classées en mécanique, statique et dynamique. (Popoff, K., *Sur le problème des trois corps*, 1931, Atti Congresso Bologna 5, 49-53 ; Chazy, J., *Sur la stabilité à la Poisson dans le problème des trois corps*, 1931, Atti Congresso Bologna 5, 15-16 ; Belorizky, D., *Sur la solution du problème des trois corps, donnée par M. Sundman*, 1931, C. R. 193, 766-768.)

## B.33 Stoyko

Sa thèse n'est pas référencée dans le *Jahrbuch*, mais tous les articles, toutes les notes aux CRAS de l'auteur référencées sont classées en géodésie et géophysique, astronomie, astronomie.

## B.34 Meyer

La thèse n'est pas référencée dans le *Jahrbuch*. Elle l'est dans le *Zentralblatt* avec le mot-clé associé "mécanique". Une recherche dans le *Jahrbuch* sur l'auteur de la thèse n'étant pas concluante, la recherche a porté sur les termes "problèmes des  $n$  corps". Les publications de 1932 référencées sont toutes classées en mécanique, statique et dynamique, c'est donc le classement que j'ai adopté.



- Mendes, M., *Sur le problème des  $n$  corps à masses variables*, C. R. 194, 597-599, 1932 ;
- Mendes, M., *Application de la méthode de la variation des constantes au problème des  $n$  corps à masses variables*, C. R. 194, 1794-1796, 1932 ;
- Mendes, M., *Sur le problème des  $n$  corps à masses variables traité à partir de l'égalité de M. Levi-Civita*, C. R. 194, 2289-2292, 1932 ;
- Saltykow, N., *Sur les équations fondamentales du problème des  $n$  corps*, Bull. astron. Mém. var. (2) 8, 473-480, 1932 ;
- Mendes, M., *Sur le problème des  $N$  corps à masses variables*, C. R. Congrès des Soc. savantes 1932, 42-50, 1932.

## B.35 Murray

La thèse n'est référencée ni dans le *Jahrbuch*, ni dans le *Zentralblatt*. Et une recherche sur d'autres publications de l'auteur ne donne aucun résultat concluant, tout comme une recherche sur le titre "mécanismes paradoxaux". En effectuant une recherche sur le terme "mécanisme", les seules publications qui traitent de sujet proche de la thèse, d'après son rapport, semblent être : Buschgens, S. S., *Sur le mécanisme de Bennett-Vershovsky*, Appl. Math. Mech., Moskau, (2) 2, 513-518, 1939, classé en géométrie, cinématique ; Andrade, J., *Le mécanisme général de la synchronisation*, C. R. 180, 1148-1150 ; Berichtigung hierzu : 1300, 1925, classé en mécanique, statique et dynamique ; et Demeny, G., *Mécanisme et éducation des mouvements*, Paris : Félix Alcan. II u. 523. S., 1905, classé en mécanique, généralités. Compte tenu de l'évolution de la classification du *Jahrbuch*, et de son état en 1933, date de soutenance du doctorat, le classement choisi est mécanique, statique et dynamique/cinématique.

## B.36 Belorizky

La thèse n'est pas référencée ni dans le *Jahrbuch*, ni dans le *Zentralblatt*. Cependant l'auteur publie à la même période plusieurs notes aux CRAS, référencées par le *Jahrbuch*, en rapport direct avec le titre de sa thèse. Elles sont toutes classées en mécanique, Statique et dynamique, classement que j'ai donc adopté.

- *Sur la nature des chocs dans le problème des trois corps à trois degrés de liberté*, C. R. 194, 769-771, 1932 ;
- *Sur la convergence des séries dans la solution du problème des trois corps donnée par M. Sundman*, C. R. 193, 314-317, 1931 ;
- *Sur la solution du problème des trois corps, donnée par M. Sundman*, C. R. 193, 766-768, 1931

- *Sur l'application des méthodes de M. Sundman aux problèmes de la mécanique céleste*, C. R. 193, 1321-1323, 1931.

## B.37 Racine Charles

La thèse n'est référencée ni dans le *Jahrbuch*, ni dans le *Zentralblatt*. Mais en effectuant dans le *Jahrbuch* une recherche sur les autres articles publiés par l'auteur à la même époque et dont les titres se rapportent à celui de la thèse on trouve plusieurs notes aux CRAS (*Sur une classe de solution des équations de la gravitation d'Einstein*, C. R. 197, 302-304, 1933; *Contribution à l'étude du problème statique dans la théorie de la relativité*, C. R. 192, 1533-1536, 1931) référencées en physique mathématique, théorie de la relativité. C'est donc ce classement que j'ai adopté.

## B.38 Woronetz

Sa première thèse n'est référencée ni dans le *Jahrbuch*, ni dans le *Zentralblatt*. Cependant tous les articles contemporains et référencés sont classés en mécanique, mécanique des fluides, notamment la note aux CRAS dont le sujet semble se rapprocher de sa thèse (*L'influence de la température sur la stabilité des mouvements giratoires des fluides*, C. R. 196, 99-101, 1933). De plus le rapport de Villat porte exceptionnellement sur les deux thèses et la seconde thèse de l'auteur est elle, au contraire, référencée, d'où le classement de l'ensemble en mécanique, mécanique des fluides.

## B.39 Massé

La thèse n'est référencée ni dans le *Jahrbuch*, ni dans le *Zentralblatt*. Les autres publications de l'auteur référencées dans le *Jahrbuch* sont :

- *Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie des intumescences*, C. R. 200, 109-110, 1935, référencé en mécanique, mécanique des fluides ;
- *Recherches sur la théorie des eaux courantes*, Proc. V. internat. Congr. appl. Mech. 1938, Cambridge, Mass., 545-549, 1938, référencé en physique mathématique, Aéro et Hydrodynamique.

Compte tenu des évolutions de la classification du *Jahrbuch* pour cette section précise à l'époque, je me base sur la note au CRAS pour classer la thèse.

## B.40 Tarrab

Aucun travail de l'auteur n'est référencé ni dans le *Jahrbuch*, ni dans le *Zentralblatt*. Une recherche dans le *Jahrbuch* à partir du terme "massif pulvérulent du titre donne comme résultat un mémoire de Joseph Boussinesq, *Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents comparé à celui de massifs solides et sur la poussée des terres sans cohésion.*, Mém. cour. de Belg. XI., publié en 1876 et référencé en mécanique, statique. J'ai donc adopté le classement "mécanique. Statique et dynamique", qui semble lui correspondre en 1938. Ce choix est confirmé par le rapport.

## B.41 Malécot

La thèse n'est référencée ni dans le *Jahrbuch* ni dans le *Zentralblatt*, mais dans le *Jahrbuch*, plusieurs ouvrages et notes aux Cras de l'auteur, se rapportant au sujet de la thèse, le sont. Elles sont toutes, sans exception, classées dans la section "calcul des probabilités et applications".

- *Mendélisme et consanguinité*, 1942, C. R. Acad. Sci., Paris, 215, 313-314 ;
- *Le calcul des probabilités et les problèmes de l'hérédité*, 1939, Ann. Univ. Lyon A (3) 2 (1939), 25-37 ;
- *Lois de Mendel et homogamie*, 1939, C. R. Acad. Sci., Paris, 208, 407-409 ;
- *Les corrélations entre individus apparentés, dans l'hypothèse d'homogamie*, 1939, C. R. Acad. Sci., Paris, 208, 552-554 ;
- *Sur la biométrie et les lois de Mendel*, 1938, C. R. Soc. math. France 1938, 44-45 ;
- *Sur l'analyse des aléatoires et le problème de l'hérédité*, 1938, C. R. Acad. Sci., Paris, 206, 153-155 ;
- *Sur les aléatoires mendéliennes et les corrélations de l'hérédité*, 1938, C. R. Acad. Sci., Paris, 206, 404-406.

## B.42 Lefebvre

La thèse n'est référencée ni dans le *Jahrbuch* ni dans le *Zentralblatt*. Dans le *Jahrbuch*, un article de 1939 de Lefebvre est recensé : *Sur les fonctions d'une variable complexe définies par une relation linéaire entre la variable et le logarithme de la fonction, les coefficients étant des polynômes par rapport à la fonction.*, 1939, C. R. Acad. Sci., Paris, 208, 79-81 et il est classé en analyse, théorie des fonctions complexes. Ce classement est vérifié par la lecture du rapport.

## B.43 Roure

La thèse d'Henri Roure n'est référencée ni dans le *Zentralblatt*, ni dans le *Jahrbuch*. Parmi les notes antérieures de l'auteur référencées dans le *Jahrbuch* figurent plusieurs notes aux CRAS de 1935 et 1932 :

- *Calcul d'une solution périodique dans le mouvement de Pluton troublé par Neptune*, C. R. 200, 437-439, 1935, référencé en mécanique, Statique et dynamique ;
- *Moyen mouvement de Pluton déduit des observations* C. R. 201, 1322-1323, 1935, référencé en mécanique, Statique et dynamique ;
- *Sur une inégalité à très longue période du moyen mouvement de Pluton due à l'action d'Uranus* C. R. 198, 901-902, 1934, référencé en géodésie et géophysique, astronomie, astronomie ;
- *Formules nouvelles pour le calcul des perturbations spéciales*, C. R. 195, 694-696, 1932, référencé en géodésie et géophysique, astronomie, astronomie.

En faisant une recherche sur le titre "calcul" et perturbations, en plus de la publication de Roure de 1932, le *Jahrbuch* donne deux autres publications référencées en géodésie et géophysique, astronomie, astronomie, (Samoilowa-Jachontowa, N., *Sur le calcul des perturbations planétaires au moyen d'une nouvelle variable indépendante*, C. R. 190, 1544-1546, 1930 ; et Alliaume, M., *Le calcul des perturbations planétaires par la méthode de Lagrange*, Bulletin Acad. Bruxelles (5) 11, 135-144, 1925), c'est donc ce classement que j'ai adopté.

## B.44 Cagniard

La thèse n'est référencée dans aucun des répertoires bibliographiques. Dans le *Jahrbuch* sont référencées des notes aux CRAS de l'auteur qui se rapportent directement au sujet de la thèse :

- *Sur la propagation d'un séisme à l'intérieur d'un solide homogène, isotrope, élastique, semi-indéfini, limité par une surface plane*, 1932, C. R. 194, 899-902 ;
- *Sur la réflexion à la surface du sol d'une onde sismique sphérique et isotrope*, 1932, C. R. 194, 1005-1008.

Les deux notes sont référencées en géodésie et géophysique, astronomie. géodésie et géophysique, rubrique qui a disparu du *Jahrbuch* en 1939. Le rapport sur ce mémoire est manquant aux Archives Nationales, mais l'avant-propos de la thèse confirme cette classification.

## B.45 Loeve

La thèse n'est pas référencée dans le *Jahrbuch*, mais elle l'est dans le *Zentralblatt*. Le *Jahrbuch* recense plusieurs notes aux CRAS de l'auteur parues en 1941, année de la soutenance de la thèse. Elles sont toutes classées dans la section "calcul des probabilités et applications" :

- *Sur les systèmes d'événements; application à deux théorèmes classiques*, 1941, C. R. Acad. Sci., Paris, 212, 261-263 ;
- *La loi forte des grands nombres pour les variables aléatoires liées*, 1941, C. R. Acad. Sci., Paris, 212, 1121-1123 ;
- *La tendance centrale des sommes de variables aléatoires liées*, 1941, C. R. Acad. Sci., Paris, 213, 9-11 ;
- *Nouvelles classes de lois limites*, 1940, C. R. Acad. Sci., Paris, 210, 202-204.

## B.46 Kourganoff

La thèse de Kourganoff n'est référencée ni dans le *Zentralblatt*, ni dans le *Jahrbuch*. Une recherche à partir du titre ("mécanique céleste") dans le *Jahrbuch* fait apparaître deux travaux contemporains dont le sujet semble se rapprocher de l'objet de la thèse de Kourganoff :

- Chazy, J., *Sur la méthode de la variation des constantes en mécanique céleste.*, C. R. Acad. Sci., Paris, 210, 156-159, 1940 ;
- Fabre, H., *Les mouvements récurrents en mécanique céleste, et la variation des éléments des orbites*. Bull. astron., Paris, Mém. Var. (2) 10 (1937), 297-410 ; (2) 11 (1938), 17-136.

Ils sont tous deux classés en physique mathématique, mécanique des corps solides et c'est ce classement que j'ai adopté.

## B.47 Ferrand

La thèse est référencée dans le *Zentralblatt* et le mot-clé associé est "fonctions complexes". Elle n'est pas référencée dans le *Jahrbuch* mais plusieurs notes aux CRAS de l'auteur, parues en 1942, l'année de publication de la thèse, le sont :

- *Sur la représentation conforme.*, 1942, C. R. Acad. Sci., Paris, 214, 250-253 ;
- *Sur les fonctions holomorphes ou méromorphes dans une couronne.*, 1942, C. R. Acad. Sci., Paris, 214, 50-52 ;
- *Sur un théorème de M. Golusin.*, 1942, C. R. Acad. Sci., Paris, 215, 254-255.

Ces notes ainsi que celles qui paraissent en 1941 sont toutes, sans exception, classées en analyse, théorie des fonctions complexes.

## B.48 Bouffard

La thèse n'est pas référencée telle quelle ni dans le *Zentralblatt*, ni dans le *Jahrbuch*. Cependant une publication de l'auteur de 1942, *Nouvelle méthode de calcul et d'étude de la trajectoire d'un projectile.*, 1942, Actual. sci. industr. 907, 79 p. semble avoir été directement inspirée par la thèse (elle est référencée dans les deux répertoires). Cette publication nous sert de base au classement du mémoire en physique mathématique, mécanique des corps solides.

## B.49 Lévy, Jacques

La thèse est référencée dans le *Zentralblatt* mais elle n'est pas classée. Aucune publication de l'auteur n'est référencée dans le *Jahrbuch*. Une recherche dans ce répertoire sur le titre "problème des trois corps" a pour résultats différentes notes aux CRAS, dont les plus récentes de 1942 sont toutes référencées en physique mathématique, mécanique des corps solides, d'où le classement choisi, (celles de Sémirot, P., *Chocs imaginaires dans le problème des trois corps.*, 1941, C. R. Acad. Sci., Paris, 212, 974-977; Belorizky, D., *Chocs d'une nouvelle espèce dans le problème des trois corps*, 1941, C. R. Acad. Sci., Paris, 213, 558-560; Dramba, C., *Singularités imaginaires du problème isoscèle plan des trois corps. I, II.*, 1940, C. R. Acad. Sci., Paris, 210; 131-133, 393-395).

## B.50 Sémirot

La thèse est référencée dans le *Zentralblatt* mais elle n'est pas classée. Dans le *Jahrbuch*, toutes les notes aux CRAS publiées par l'auteur entre 1941 et 1942 sont classées en physique mathématique, en mécanique des corps solides. Les titres de certaines sont explicitement en relation avec le titre de la thèse : *Sur les mouvements périodiques d'un corps attiré par deux centres fixes*, (1942), *Chocs imaginaires dans le problème des trois corps*, (1941).

## B.51 d'Orgeval

Le mémoire est référencé dans le *Zentralblatt*, en ayant été publié chez Gauthier-Villars en 1945. Il y est classé en géométrie algébrique.

Une recherche dans le *Jahrbuch* sur d'autres mémoires de l'auteur donne trois articles :

- *Remarques sur la détermination des plans multiples représentant une surface algébrique.*, 1942, C. R. Acad. Sci., Paris, 215, 341-342, classé en géométrie, géométrie algébrique ;
- *Une construction des plans multiples représentatifs des surfaces algébriques de genres 1.*, 1938, C. R. Acad. Sci. Paris, 206, 1866-1867, classé en géométrie, géométrie algébrique ;
- *Sur une extension du principe de dégénérescence à la théorie des surfaces algébriques.*, 1937, Atti Acad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. nat. (6) 25, 547-553, classé en géométrie, géométrie algébrique.

Le classement choisi est donc géométrie, géométrie algébrique.

## B.52 Costa de Beauregard

La thèse est référencée dans le *Zentralblatt* mais elle n'est pas classée. Dans le *Jahrbuch* toutes les notes aux CRAS publiées par l'auteur entre 1940 et 1942 sont classées en physique mathématique, en théorie des quantas ou théorie de la relativité.

## B.53 Benneton

La thèse est référencée dans le *Zentralblatt* et classée avec les mots-clés : théorie des nombres et théorie des fonctions. Dans le *Jahrbuch*, toutes les notes aux CRAS publiées par l'auteur sont classées de la même façon en arithmétique et algèbre, théorie des nombres, dont une avec un titre presque semblable à celui de la thèse. Les deux classements concordant, j'ai opté pour : arithmétique et algèbre, théorie des nombres.

## B.54 Momet

La thèse n'est référencée dans aucun répertoire. Une recherche dans le *Jahrbuch* sur les autres publications de l'auteur donne une publication de 1941, *Sur le théorème fondamental de la géométrie projective*, 1941 Rev. sci., Paris, 79, 140-146, classé par le *Jahrbuch* en géométrie, fondements de la géométrie, géométrie non euclidienne. Sur le *Zentralblatt*, est mentionnée une publication qui semble se rapprocher davantage du sujet de la thèse : *Sur les transformations anallagmatiques*, 1942, Rev. Sci. 80, 200-208, les mots-clés géométrie analytique et géométrie projective étant mentionnés. L'introduction de la thèse indique l'absence du point de vue différentiel et des considérations de géométrie projective et analytique. J'ai donc classé le mémoire dans la section géométrie, géométrie analytique et projective du tome du *Jahrbuch* de 1942.

## B.55 Eger

La thèse est référencée dans le *Zentralblatt* mais elle n'est pas classée. En faisant une recherche dans le *Jahrbuch* on trouve recensées des notes aux CRAS de l'auteur : deux parues en 1940 et 1939, portant le même nom *Sur la jacobienne d'un système de Pfaff*, une autre de 1939, *Sur une propriété caractéristique des fonctions harmoniques et biharmoniques* les trois étant référencées en analyse, théorie des équations différentielles, ainsi que deux de 1937, *Sur les systèmes canoniques d'une variété algébrique*, référencées en géométrie, géométrie algébrique. Le rapport de la thèse classant explicitement le travail en géométrie algébrique, c'est ce dernier classement que j'ai adopté.

## B.56 Chatelet

La thèse est recensée mais non classée dans le *Zentralblatt*. En revanche dans le *Jahrbuch* sont référencés les articles suivants de l'auteur :

- *Courbes réduites dans les classes de courbes de genre*, 1941, C. R. Acad. Sci., Paris, 212, 320-322.; référencé en algèbre et arithmétique, corps de nombres et de fonctions ;
- *Points exceptionnels d'une cubique de Weierstrass.*, 1940, C. R. Acad. Sci., Paris, 210, 90-92; référencé en algèbre et arithmétique, corps de nombres et de fonctions ;
- *Groupe exceptionnel d'une classe de cubiques.*, 1940, C. R. Acad. Sci., Paris, 210, 200-202; référencé en algèbre et arithmétique, corps de nombres et de fonctions ;
- *Classification des courbes de genre un, dans le corps des restes, module  $p$* . 1939, C. R. Acad. Sci., Paris, 208, 487-489; référencé en géométrie, géométrie algébrique ;
- *Points rationnels et classification des courbes de genre un*. 1938, C. R. Acad. Sci., Paris, 206, 1532-1533; référencé en algèbre et arithmétique, corps de nombres et de fonctions.

Dans le *Zentralblatt*, en plus des articles référencés par le *Jahrbuch*, toutes les publications recensées, constituées en fait de notes aux *Comptes rendus*, hormis *Sur la notion d'équivalence due à Poincaré*, 1943, C. R. Acad. Sci., Paris 216, 142-144<sup>1</sup>, sont associées au mot-clé "Number fields, function fields", qui par analogie correspond à la classification du *Jahrbuch* : arithmétique et algèbre corps de nombres et de fonctions.

Dans le rapport, Garnier évoque les thèmes de l'"analyse diophantienne" et la "théorie moderne des algèbres". J'ai donc décidé de classer sa thèse en arithmétique et algèbre (corps de nombres et de fonctions).

---

1. Cette note est classée en géométrie algébrique



## B.57 Oudart

La thèse est référencée mais non classée dans le *Zentralblatt*. D'autres articles antérieurs de l'auteur sont référencés par le *Jahrbuch* :

- *Théorie des sillages. Problème indéterminé de Levi-Civita et de M. Villat*, 1942, C. R. Acad. Sci., Paris, 214, 149-151., classé en physique mathématiques, hydra et aérodynamique ;
- *Problème des sillages. Validité des solutions*, 1941, C. R. Acad. Sci., Paris, 213, 679-682, classé dans la même rubrique.

En faisant une recherche sur le terme "Kirchhoff", aucun résultat valable n'est obtenu, mais sur "Helmholtz", on trouve pour l'année 1942 un article de Kravtchenko (*Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz ; théorie des sillages et des proues*, 1942, J. Math. pur. appl., Paris, (9) 20, 35-106, 107-234, 235-303) référencé en physique mathématique, hydro et aéro-dynamique. Ce classement est confirmé par le rapport de thèse qui évoque un "problème extrêmement ardu de mécanique des fluides".

## B.58 Maitre

La thèse n'est pas référencée dans le *Zentralblatt*. Les recherches dans le *Jahrbuch* à partir du nom de l'auteur et du titre de la thèse n'aboutissent à rien. Une recherche dans le *Zentralblatt* sur d'autres publications de Victor Maitre donne comme résultat une unique note au CRAS de 1935 publiée conjointement avec Barbier, Daniel (Barbier, Daniel, Maitre, Victor, *Méthode nouvelle pour l'étude de l'absorption de la lumière dans l'espace interstellaire*, C. R. Acad. Sci., Paris 201, 1170-1172) et référencée en astronomie, astrophysique d'où le classement adopté.

## B.59 Bernier

La thèse n'est recensée dans aucun répertoire. La seconde thèse (les propositions données par la faculté) est l'unique publication recensée<sup>2</sup>. En effectuant une recherche sur les termes "cavité" et "électromagnétiques", la publication dont les thèmes se rapprocher au plus de la thèse est la suivante : Jouguet, M., *Sur les oscillations électromagnétiques*, 1942, C. R. Acad. Sci., Paris, 214, 214-215. Elle est référencée en physique mathématique, électrodynamique, classement confirmé par le rapport sur la thèse.

---

2. Il est d'ailleurs indiqué qu'elle a été publiée dans les Annales Radioélectriques en 1945.

## B.60 Genty

La thèse n'est référencée dans aucun des répertoires. Dans le *Jahrbuch*, une recherche sur les mots du titre n'a rien donné. Selon le rapport et l'introduction de la thèse, le travail appartient au domaine de la géodésie et de l'astronomie.

## B.61 Galvani

La thèse est référencée dans le *Zentralblatt* mais "not reviewed". En faisant une recherche dans le *Jahrbuch* sur d'autres publications de l'auteur, on trouve deux notes aux CRAS parues en 1942 :

- *Sur la réalisation de certains espaces à parallélisme absolu par des congruences de droites*, C. R. Acad. Sci., Paris, 214, 337-339 ;
- *Sur les connexions euclidiennes à courbure non nulle réalisables par des congruences de droites*, C. R. Acad. Sci., Paris, 214, 733-736.

Elles sont toutes les deux classées en géométrie, variétés riemanniennes, et se réfèrent à des sujets proches du titre de la thèse, d'où le classement adopté, confirmé par le rapport de thèse.

## B.62 Marrot

La thèse est recensée par le *Zentralblatt* mais aucun mot-clé n'y est associé. Une recherche dans le *Jahrbuch* à partir du titre donne comme résultat une note au CRAS de Raymond Marrot publiée en collaboration avec Alain Lichnerowicz *Sur l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann*, 1940, C. R. Acad. Sci., Paris, 211, 531-533, classée en analyse, équations intégrales, classement qui est confirmé par le rapport.

## B.63 Robin

La thèse n'est pas référencée dans le *Zentralblatt*. Un extrait du mémoire, publié en 1946 (*La propagation d'ondes electromagnetiques dans deux ou plusieurs milieux successifs et la diffraction de ces ondes ramenees à l'étude de problèmes de Cauchy*, 1946, Rev. Sci. 84, 7-14 (1946)) est référencé par le *Zentralblatt* et les mots-clés "théorie électromagnétique, optique" lui sont attribués. Un autre article de l'auteur est également recensé et classé de la même façon par ce répertoire : *Sur un problème de propagation et de diffraction d'ondes electromagnetiques, à la surface de séparation de deux milieux*, 1944, C. R. Acad. Sci., Paris 218, 989-990 (1944).

La rapport de Delsarte fait référence à des travaux de Delsarte sur le problème de la diffraction publiés précédemment . Une recherche sur le *Jahrbuch* référencent les deux publications de Delsarte sur le sujet (*Sur un problème de diffraction. I, II*, 1936, C. R. Acad. Sci., Paris, 202 ; 826-828, 1026-1028 ; *Sur un problème de diffraction*, 1936, Ann. sci. Ecole norm. sup. (3) 53, 223-273) ; elles sont classées en analyse, théorie des équations différentielles de type elliptique, théorie du potentiel, classement que j'ai adopté pour la thèse.

## B.64 Décuyper

Le *Zentralblatt* recense la thèse et lui associe les mots-clés suivants : géométrie différentielle des groupes de Lie particuliers. Une recherche sur les autres publications de l'auteur recensées dans le *Jahrbuch*, donne des travaux qui sont tous référencés en géométrie, géométrie différentielle, notamment le plus récent : *Sur les couples de surfaces admettant mêmes directrices de Wilczynski*, 1941, C. R. Acad. Sci., Paris, 213, 428-430, classé dans la rubrique plus spécifique du répertoire en 1941, géométrie, géométrie différentielle de groupes de Lie particuliers. Le rapport confirme que les thèmes abordés appartiennent au domaine de la géométrie différentielle.

## B.65 Gauthier

La thèse est référencée dans le *Zentralblatt* et classée en géométrie algébrique. D'autres articles de l'auteur sont référencés dans le *Jahrbuch*, tous en géométrie (3 en géométrie algébrique, 1 en géométrie descriptive, le plus ancien) et le plus récent *Au sujet d'un théorème de M. Apéry sur les quintiques*. C. R. Acad. Sci., Paris, 214, 408-410, publié en 1942, en géométrie analytique et synthétique.

J'ai donc décidé de le classer en géométrie, géométrie algébrique.

La lecture du rapport confirme ce classement d'autant que le rapport de la thèse de Lesieur en 1945 fait référence précisément à cette thèse et que j'ai classé également la thèse de Lesieur en géométrie, géométrie algébrique.

## B.66 Roubaud-Valette

La thèse n'est pas référencée dans le *Zentralblatt*. Le *Jahrbuch* recense de nombreuses notes aux CRAS de l'auteur dans les années 1941 et 1942. Toutes celles parues en 1942 sont classées en physique mathématique, en théorie des quantas ou en théorie de la relativité. D'où le classement adopté qui est confirmé par le rapport de thèse.

## B.67 Bonnet

La thèse de Rose Bonnet n'est référencée dans aucun des deux répertoires bibliographiques. Une recherche à partir du titre ("binaires" en tant qu'étoiles) dans le *Jahrbuch* donne comme résultat :

- Tiercy, G., *Les binaires à éclipses, la vitesse de la lumière et les théories relativistes.*, Arch. Sci. physiqu. natur., Genève, (5) 23, 5-24. publié en 1941 et référencé en physique mathématique, théorie de la relativité
- Sevin, E., *A propos des systèmes binaires* Bull. astron. Mém. var. (2) 7, 61-74, publié en 1932 et référencé en astronomie

Des recherches sur les termes "excentricités" et "périodes" ont abouti à des articles référencés en astronomie, c'est ce classement que j'ai choisi. Il est confirmé par le rapport de thèse.

## B.68 Mayot

La thèse n'est pas référencée dans le *Zentralblatt*. Dans le *Jahrbuch*, est recensée une note au CRAS de l'auteur : *Stabilité des figures d'équilibre d'un amas d'étoiles dont le centre décrit un cercle dans la voie lactée*, 1941, C. R. Acad. Sci., Paris, 212, 45-47, dont le sujet se rapporte au sujet du doctorat. La note est classée en physique mathématique, hydro et aérodynamique, applications astrophysiques, classement que j'adopte.

## B.69 Blanc-Lapierre

La thèse est recensée mais non classée par le *Zentralblatt*. Aucune des productions de l'auteur, qui paraissent avant la thèse ne sont d'ailleurs classé par le répertoire. En effectuant une recherche dans le *Jahrbuch* sur les termes "fonctions aléatoires stationnaires", on obtient l'article suivant : Slutsky, E., *Sur les fonctions aléatoires presque périodiques et sur la décomposition des fonctions aléatoires stationnaires en composantes*, 1938, Actual. sci. industr. 738, 33-55. (Confér. internat. Sci. math. Univ. Genève. Théorie des probabilités. V : Les fonctions aléatoires.), classé en analyse, calcul des probabilités et applications. C'est dans cette rubrique que j'ai donc classé la thèse ce qui est confirmé par le rapport.

## B.70 Lesieur

La thèse est recensée par le *Zentralblatt* et les mots clés "géométrie algébrique" lui ont associés.

En faisant une recherche dans le *Jahrbuch* à partir de mots du titre ("intersection" et "hyperquadriques"), un seul article apparaît :

- Gussenhoven, L., *Invariants projectifs de la surface intersection de deux hyperquadriques d'un espace  $S_4$* , 1936, Mathesis, Bruxelles, 50, 259-262, publié en 1936.

Il est également classé en géométrie, géométrie algébrique, rubrique qui n'évolue pas dans les dernières années du *Jahrbuch*.

## B.71 Berthomieu

Aucune réponse n'est fournie par la consultation du *Zentralblatt*.

En 1945, le répertoire bibliographique du *Jahrbuch* ne paraissant plus, la recherche est faite à partir du titre de la thèse. En sélectionnant "les étoiles doubles spectroscopiques", deux réponses apparaissent :

- Rakowiecki, T., *Détermination des orbites des étoiles doubles spectroscopiques d'après les positions opposées* Prace mat.-fiz. 45, 181-209, 1937; référencé en mécanique, statique et dynamique ;
- Bourgeois, P. E., *Contribution à la recherche de la cause de la répartition non uniforme des longitudes des périastres des étoiles doubles spectroscopiques*. Bulletin Acad. Bruxelles (5) 15, 711-718, 1929; référencé en géodésie, géophysique et astronomie.

En se fondant sur le titre, j'ai préféré référencé la thèse en astronomie, Esclangon étant président et rapporteur de la thèse.

Le rapport confirme ce classement.

# Thèses soutenues en Province

## B.72 Morel

La thèse n'est pas référencée dans le *Jahrbuch*. Une publication qui semble avoir été écrite par l'auteur (Morel, *La balistique graphique et son application dans le calcul des tables à tir*, 1904, Paris, Gauthier-Villars) est référencée en mécanique, dynamique. Cette section est devenue en 1919 : mécanique, statique et dynamique des systèmes de points et corps solides.

## B.73 Galissot

La thèse n'est pas directement référencée, mais une recherche sur les autres publications de l'auteur donne une note au CRAS de 1912, *Sur l'absorption sélective de l'atmosphère*, C. R 152, 569-571, classée en géodésie, géophysique, astronomie, astronomie et qui se rapporte au sujet du Mémoire. Cette rubrique est restée à peu près stable entre 1912 et 1922, d'où le classement adopté.

## B.74 Courrier

Aucune publication de l'auteur n'est référencée dans le *Jahrbuch*. En faisant une recherche sur les termes "solutions entières", les publications qui paraissent dans une période contemporaines pour la stabilité des rubriques telles que Gloden, A., *Sur un procédé permettant d'obtenir des solutions entières de l'équation  $x^2 + y^2 = z^2 + t^{2k}$ , ( $k = 3, 5, \dots, 2n + 1$ )*, 1937, Rev. mat. Timisoara 17, 112-113 ou Gérardin, A., *Solutions entières des congruences  $ax^m \pm cy^m \equiv 0 \pmod{M}$  (question 3187, de Mehmed Nadir)*, 1922, Interméd. des math. (2) 1, 112-113, sont classées en arithmétique et algèbre, théorie des nombres, d'où le classement adopté, classement qui est confirmé par l'introduction de la thèse.

## B.75 Charpentier

La thèse n'est pas directement référencée. Deux notes aux CRAS de l'auteur, qui se rapportent directement au sujet du Mémoire, qui sont publiées au même moment, nous servent à la classer en analyse, équations différentielles ordinaires, rubrique à laquelle appartient toutes les publications de l'auteur recensées par le *Jahrbuch* en 1930 et 1931 :

- *Sur les points de Peano d'une équation différentielle du premier ordre*, 1930, C. R. 191, 509-511 ;
- *Sur l'existence des points de Peano d'une équation différentielle du premier ordre*, 1930, C. R. 191, 912-914.

## B.76 Rambaud

Aucune parution de l'auteur n'est recensé dans le *Jahrbuch*. Une recherche sur les termes du titre "points singuliers", "équation linéaire" fait apparaître la publication : Hukuhara, M., *Sur les points singuliers d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. I, II, III, IV*, 1937 Mem. Fac. Engin., Kyushu, Imp. Univ. Fukuoko 8 ; 1938, 203-247. Proc. physic.-math. Soc. Japan (3) 20 ; 167-189, 409-441, 865-907 ; classée en analyse, équations différentielles ordinaires. Cette rubrique étant restée stable entre 1932 et 1937, j'y classe la thèse de Rambaud.

## B.77 Grouyitch

Aucune publication de l'auteur n'est recensée dans le *Jahrbuch*. Une recherche sur le terme "occulation", "étoiles" ne donne aucun résultat. Par analogie, et compte-tenu de la rubrique en 1933, j'ai classé la thèse en géodésie et géophysique, astronomie.

## B.78 Tchou-Yun

Aucune production mathématique de l'auteur n'est référencé dans les deux répertoires bibliographiques. En effectuant une recherche sur les termes "inégalité différentielle", on trouve une note au CRAS de Carleman, T., *Sur une inégalité différentielle dans la théorie des fonctions analytiques*, 1933, C. R. 196, 995-997, classée en analyse, théorie des fonctions analytiques. En regardant l'introduction de la thèse, il semble que Tchou-Yun traite davantage de fonctions réelles, d'où le classement de la thèse en analyse, théorie des fonctions réelles.

## B.79 Brunold

Le *Zentralblatt* classe la thèse en "set theory", "real function" d'où la rubrique choisie, compte tenu également de la classification dans cette rubrique par le *Jahrbuch* de la publication suivante : Sierpinski, W., *Sur un ensemble linéaire non dénombrable qui est de première catégorie sur ensemble parfait*, 1934, C. R. Soc. Sc. Varsovie 25, 102-105.

## B.80 Liao

En 1935, la section astronomie a disparu de la classification du *Jahrbuch*. En effectuant une recherche sur le terme "photométrie", on trouve un article de Schoenberg, E., *Photometrie der Gestirne*<sup>3</sup>, 1933, 21 Fig. Leipzig, B. G. Teubner (Encyclopédie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen VI 2, 27; S. 831-986), référencé en géodésie et géophysique, astronomie, astronomie. C'est donc ce classement que j'adopte.

## B.81 Shih-Ky

La thèse n'est pas directement référencée. Deux notes aux CRAS de l'auteur le sont *Diffusion de la lumière stellaire*, 1936, C. R. Acad. Sci., Paris 202, 284-286; et *Diffusion de la lumière dans la galaxie*, 1935, C. R. 201, 1326-1328. Elles sont toutes les deux classées en analyse, équations intégrales. Cependant par une recherche sur les termes "diffusions" de la lumière, on trouve des publications contemporaines, qui hormes celles de Shih-Ky, sont toutes référencées en physique mathématique, théorie des quantas (Landsberg, G., *La diffusion de la lumière. Phénomène de modulation*, 1933, Scientia 54, 159-170; Yvon, J., *Recherches sur la théorie cinétique des liquides. I. Fluctuations en densité. II. La propagation et la diffusion de la lumière*, 1937, 63p.; 73 p. Actual. sci. industr. 542, 543 (Théories mécaniques VII, VIII)). Ce classement est confirmé par l'auteur dans l'introduction de son mémoire.

## B.82 Bergeot

Les seules publications de l'auteur qui sont référencées dans le *Jahrbuch* et dans le *Zentralblatt* datent de 1934 et ne semblent pas concerner directement le sujet de la thèse. En faisant une recherche sur les termes "intégration approchée", on trouve une publication de Gelfond, A., *Intégration approchée des systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre*, 1938, Bull. Acad. Sci. URSS, Moscou, Cl. Sci. math. natur. Sér. math. 1938, 583-594, classé en analyse, analyse pratique.

## B.83 (Taghi)' Bodagh

Aucune publication de l'auteur n'est référencé dans aucun des répertoires bibliographiques. En faisant une recherche dans le *Jahrbuch* sur le terme virage, on trouve l'article suivant : Turrière, É., *Sur les courbes de transition dans les virages*, 1938, An.

---

3. Photométrie des Etoiles



Fac. Ci. Pôrto 23, 19-32, classé en géométrie, géométrie différentielle ; et sur le terme "radioïde" : Turrière, E., *Une nouvelle courbe de transition pour les raccordements progressifs : La radioïde pseudo-elliptique*, 1939, Bull. Soc. math. France 67, 62-99, classée en géométrie, géométrie appliquée. L'organisation du *Jahrbuch*s'étant profondément modifié entre 1938 et 1939, j'ai classé la thèse en géométrie, géométrie appliquée.

## B.84 Grouiller

Par analogie avec le sujet de la thèse de Ssu-Pin Liao, de 1935, j'ai choisi le même classement, le section astronomie n'existant plus alors dans le *Jahrbuch*.

## B.85 Youtévong

La thèse n'est pas référencée dans le *Jahrbuch*. Dans l'introduction de son mémoire, l'auteur évoque la continuation des travaux de Turrière. Une des publications de l'auteur, à laquelle il se réfère et qui est recensée par le *Jahrbuch* est la suivante : Turrière, E., *Courbes de voûtes surbaissées en maçonnerie. I, II, III.*, 1939, Bul. Soc. politecn. România 53, 987-1042, 1077-1107, 1230-1254, classée en géométrie, géométrie différentielle dans les espaces euclidiens. C'est donc ce classement que j'adopte.

## B.86 Mao-Lin

La thèse n'est pas référencée dans les répertoires bibliographiques. Dans l'introduction de son mémoire, l'auteur fait référence à des recherches photométriques du spectre de l'étoile. Par analogie avec les thèses de Grouiller et de Liao, j'ai opté pour le même classement.

## B.87 Lamson

Aucune publication de l'auteur n'est référencée dans les répertoires bibliographiques. Dans l'avant-propos de sa thèse, l'auteur évoque l'étude de forces agissant sur les surfaces et les propriétés de certaines surfaces. Il se réfère également notamment à la thèse de Youtévong ainsi qu'à des recherches de Turrière :

- *Étude mécanique des câbles de téléphérique. La flèche en charge des câbles aériens*, 1939, An. Fac. Ci. Pôrto 24, 129-171, 193-213, classée en physique mathématique, mécanique des corps solides ;

- *Sur une congruence de droites associée au réseau conjugué d'une surface, orthogonal en projection sur un plan*, 1913, Nouv. Ann. (4) 13, 163-176, classée en géométrie, géométrie analytique.

Ces deux classements illustrant deux domaines que semble étudier Lamson, je les mentionne toutes les deux.

## B.88 Mandel

La thèse n'est pas référencée directement dans les répertoires. Dans le *Jahrbuch*, sont recensées deux notes aux CRAS de l'auteur qui se rapporte au sujet du mémoire :

- *Sur les équilibres par tranches parallèles des milieux plastiques à la limite d'écoulement et en particulier des terres et des métaux ductiles*, 1938, C. R. Acad. Sci., Paris, 206, 317-318 ;
- *Sur les équilibres par tranches parallèles des terres et des milieux plastiques à la limite d'écoulement* C. R. Acad. Sci., Paris, 206, 583-585.

Elles sont classées toutes les deux en mécanique, mécanique des fluides, classement que j'ai adopté.

## B.89 Cailliate

La thèse n'est pas référencée. D'après l'auteur, dans l'introduction de son mémoire, il s'agit d'une thèse d'astronomie, d'où le classement.

## B.90 Cazenave

La thèse n'est référencée dans aucun des répertoires, comme aucune production de l'auteur. En effectuant une recherche sur les termes "champ" et "ondes", on trouve les trois articles suivants :

- Sevin, É., *Sur l'action réciproque des ondes et des particules dans un champ constant*, 1934, C. R. 198, 1309-1311 ;
- Cotton, A., *Sur la surface des ondes dans un liquide soumis à l'action d'un champ magnétique*, 1933, Annales de physique (10) 19, 47-58 ;
- Géhéniau, J., *Sur les ondes de L. de Broglie dans un champ gravifique et électromagnétique quelconque*, 1933, C. R. 197, 1305-1307.

Ils sont référencés en physique mathématique, théorie des quantas, rubrique qui existe encore à la fin du *Jahrbuch*. L'introduction de l'auteur dans son mémoire confirme ce classement.

## B.91 Braconnier

La thèse de l'auteur est référencée dans le *Zentralblatt* et le mot-clé "théorie des groupes" lui est associé. En effectuant dans le *Jahrbuch* une recherche sur les termes "groupes topologiques", la publication la plus récente obtenue est la suivante : Bourbaki, N., *Éléments de mathématique. Les structures fondamentales de l'analyse. III : Topologie générale. III. Groupes topologiques (théorie élémentaire). IV. Nombres réels.*, 1942, Actual. sci. industr. 916, 162 p., classée en géométrie, topologie.

# Annexe C

## Tableaux de l'analyse quantitative

### C.1 Évolution globale du nombre de thèses entre 1900 et 1945

#### C.1.1 Dans toute la France

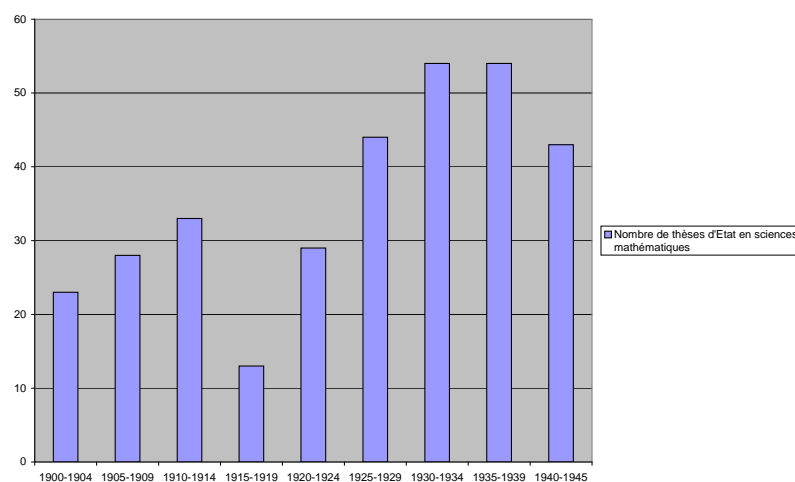


FIGURE C.1 – Évolution du nombre de doctorats d'Etat soutenus dans les universités françaises.

#### C.1.2 À Paris

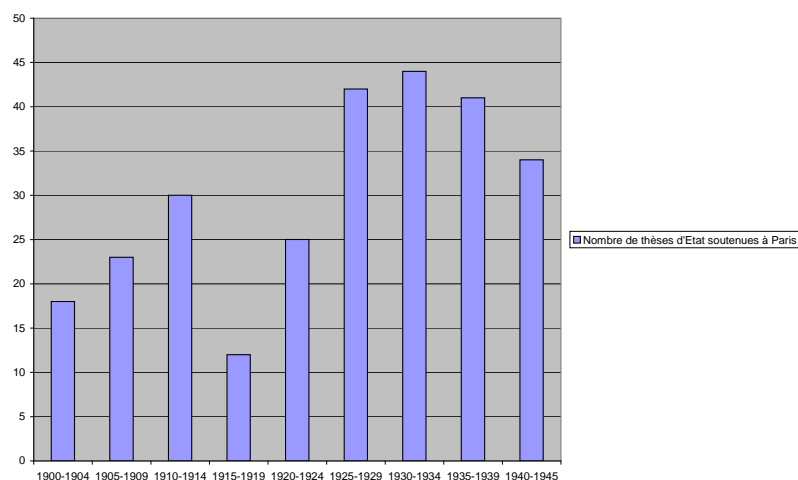


FIGURE C.2 – Évolution du nombre de doctorats d'Etat soutenus à la faculté des sciences de Paris

## C.2 Évolution des sujets des thèses d'État entre 1900 et 1945

### C.2.1 Pour toute la France

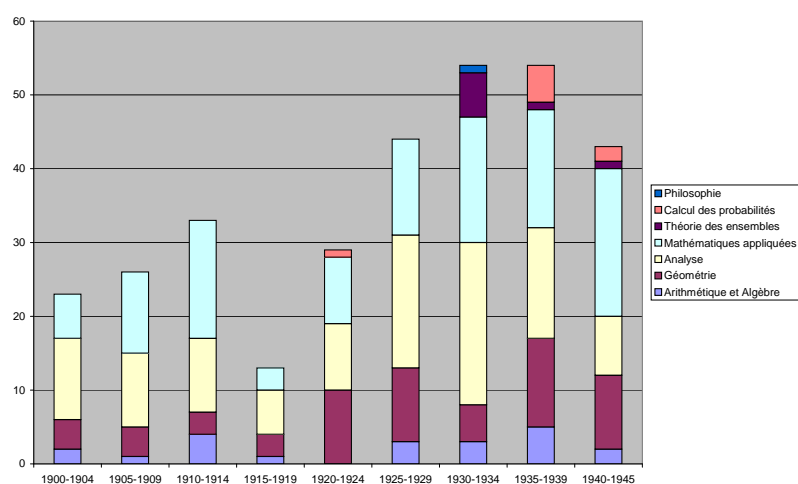


FIGURE C.3 – Évolution des sujets des thèses d'État soutenues dans toutes les facultés françaises entre 1900 et 1945

## C.2.2 Pour Paris

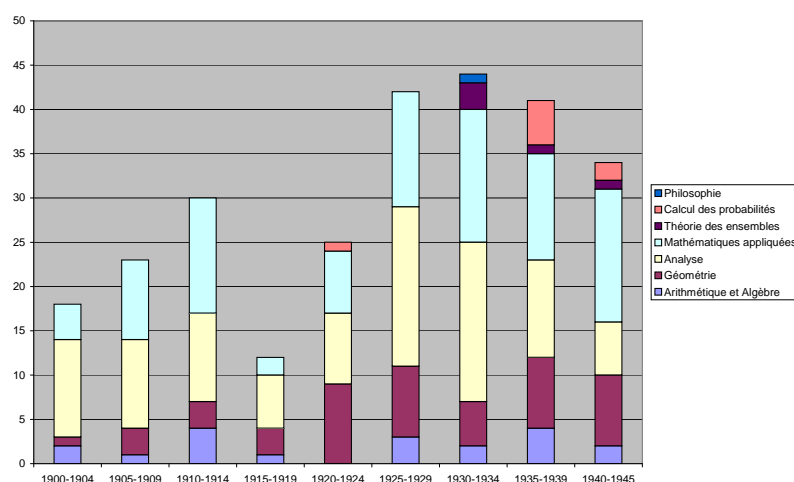


FIGURE C.4 – Évolution des sujets des thèses d'État soutenues à la faculté des sciences de Paris entre 1900 et 1945

## C.3 Évolution du nombre de pages des doctorats

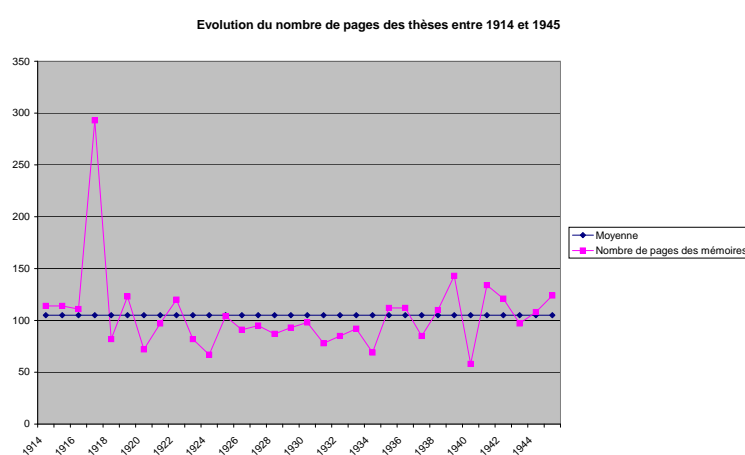


FIGURE C.5 – Évolution du nombre de pages des doctorats



## Annexe D

# Bibliographies de mathématiciens français, professeurs pendant l'entre-deux-guerres

### D.1 Bibliographies de deux géomètres, Claude Guichard et Bertrand Gambier, pendant l'entre-deux-guerres

#### D.1.1 Publications de Claude Guichard

Le recensement des publications de Claude Guichard entre 1914 et 1926 a été fait à partir du Répertoire bibliographique du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Il est présenté par ordre anti-chronologique de 1926 à 1900.

- « Sur les systèmes d'asymptotiques qui correspondent à des réseaux  $N$  dont l'équation est intégrable par la méthode de Laplace », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 178, 440-442, 1924.
- « Image en un point et image dans un plan des réseaux et congruences d'un espace d'ordre six. Application aux congruences », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 178, 1247-1251, 1924.
- « Sur une classe particulière de réseaux », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 178, 601-604, 1924.
- « Sur les systèmes de sphères qui sont osculatrices aux lignes de courbure de deux surfaces », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 178, 982-984, 1924.
- « Sur quelques propriétés des traces des tangentes asymptotiques d'une surface en un plan fixe », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 177, 1177-1180, 1923.



- « Sur les systèmes triplement indéterminés de sphères, de cercles et de deux-points », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 176, 808-811, 1923.
- « Sur les systèmes triplement indéterminés de cercles  $\Omega$  », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 176, 1109-1111, 1923.
- « Sur les figures polaires reciproques par rapport à une sphère », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 176, 217-219, 1923.
- « Sur deux systèmes triples orthogonaux qui se correspondent de telle sorte que les premières tangentes aux deux systèmes soient polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 176, 1587-1590, 1923.
- « Sur les systèmes triples orthogonaux de M. Bianchi. Application à un problème sur les polaires reciproques par rapport à une sphère », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 176, 1353-1356, 1923.
- « Sur deux systèmes triples orthogonaux qui se correspondent de telle sorte que la seconde tangente de l'un soit polaire réciproque de la troisième tangente de l'autre par rapport à un complexe linéaire », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 176, 425-428, 1923.
- « Sur les réseaux qui sont conjugués à des congruences polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 175, 1374-1378, 1922.
- « Sur les réseaux  $\Omega_{00}$  », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 174, 138-141, 1922.
- « Sur les réseaux qui sont plusieurs fois  $\Omega_{00}$  », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 174, 362-365, 1922.
- « Sur les réseaux qui sont harmoniques à une congruence C. L. et conjugués à une autre congruence C. L. », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 174, 718-722, 1922.
- « Sur les lignes asymptotiques de surfaces. Étude d'un cas particulier », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 174, 1215-1220, 1922.
- « Sur la géométrie infinitésimale du complexe linéaire », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 173, 1145-1147, 1921.
- « Sur les couples de deux congruences  $O_1$  polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 172, 141-143, 1921.
- « Sur les systèmes triplement indéterminés de droites et leurs conjugués par rapport à un complexe linéaire », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 172, 1005-1009, 1921.
- « Sur les systèmes 3  $I$  dont toutes les droites appartiennent à un complexe linéaire », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 172, 1275-1277, 1921.

- 
- « Sur les réseaux qui comprennent une famille de géodésiques et tels que leur polaire réciproque par rapport à un complexe linéaire soit un réseau  $O$  », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 171, 1187-1190, 1920.
  - « Sur une propriété caractéristique des congruences qui appartiennent à un complexe linéaire », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 170, 552-554, 1920.
  - « Sur les réseaux et les congruences conjuguées par rapport à un complexe linéaire », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 170, 1093-1096, 1920.
  - « Sur les congruences qui appartiennent à un complexe linéaire et telles que les lignes de courbure de se correspondent sur les deux surfaces focales », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 170, 1230-1233, 1920.
  - « Détermination des congruences  $C$  et des congruences  $20$  qui appartiennent à un complexe linéaire », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 170, 1429-1433, 1920.
  - « Sur une série de surfaces à courbure totale constante telles que leurs lignes de courbure forment un réseau du type  $pA'$ ,  $-(p+1)B'$  », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 168, 36-40, 1919.
  - « Sur la déformation des quadriques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 168, 200-204, 1919.
  - « Sur un mode de génération des surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 168, 982-984, 1919.
  - « Sur les surfaces isothermiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 168, 1185-1188, 1919.
  - « Sur une série de surfaces à courbure totale constante telles que leur lignes de courbure forment un réseau du type  $PA'$ ,  $-pB'$  », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 167, 1017-1022, 1918.
  - « Sur les réseaux  $C$  tels que l'équation de *Laplace* qui y correspond soit intégrable », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 165, 755-758, 1917.
  - « Sur les surfaces telles que l'équation de *Laplace* du réseau formé par les lignes de courbure soit intégrable », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 164, 935-938, 1917.
  - « Sur les réseaux  $O$  de *Monge* dans un espace d'ordre quelconque », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 164, 680-683, 1917.
  - « Sur les réseaux  $K$  d'une quadrique de révolution », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 163, 649-653, 1916.
  - « Sur les réseaux plans qui peuvent, d'une infinité de manières, être considérés comme la projection orthogonale des lignes de courbure d'une surface », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 162, 308-312, 1916.

- « Sur les réseaux plans qui sont à la fois projection orthogonale d'un réseau  $O$  et projection orthogonale d'un réseau  $G$  », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 162, 548-551, 1916.
- « Sur les réseaux plans qui peuvent, d'une infinité de manières être considérés comme la projection orthogonale des lignes de courbure d'une surface », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 162, 308-312, 1916.
- « Sur les réseaux plans qui sont à la fois projection orthogonale d'un réseau  $O$  et projection orthogonale d'un réseau  $G$  », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 162, 548-551, 1916.
- « Sur les congruences  $C$  dont l'une des surfaces focales est une quadrique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 162, 741-746, 1916.
- « Sur une classe particulière de congruences de cercles », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 162, 906-908, 1916.
- « Sur une série de surfaces et sur les équations de *Laplace* qui se reproduisent par une transformation  $(m, n)$  de *M. Darboux* », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 160, 495-500, 1915.
- « Sur les surfaces telles que le lieu des centres des sphères osculatrices aux lignes de courbure d'une série soit un paraboloïde de révolution », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 160, 89-93, 1915.
- « Sur les surfaces telles que les lignes de courbure se correspondent sur la surface primitive et sur la surface lieu des centres des sphères osculatrices aux lignes de courbure d'une série de la surface primitive », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 160, 222-227, 1915.
- « Sur les congruences  $W$  qui appartiennent à un complexe du second ordre. Cas où l'équation en  $S$  a une racine triple », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 160, 751-755, 1915.
- « Sur les congruences  $W$  qui appartiennent à un complexe du second ordre. Cas où l'équation en  $S$  a une racine double », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 160, 834-837, 1915.
- « Sur une série de surfaces et sur les équations de *Laplace* qui se reproduisent par une transformation  $(m, n)$  de *M. Darboux* », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 160, 495-500, 1915.
- « Sur les surfaces telles que le lieu des centres des sphères osculatrices aux lignes de courbure d'une série soit un paraboloïde de révolution », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 160, 89-93, 1915.
- « Sur les surfaces telles que les lignes de courbure se correspondent sur la surface primitive et sur la surface lieu des centres des sphères osculatrices aux lignes de courbure d'une série de la surface primitive », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 160, 222-227, 1915.

- « Sur les surfaces telles que les sphères osculatrices aux lignes de courbure d'une série forment un système 0 ou un système  $2I$  », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 158, 1967-1969, 1914.
- « Sur les réseaux et les congruences asymptotiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 158, 772-775, 1914.
- « Sur certaines congruences spéciales de cercles et de sphères », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 158, 1247-1249, 1914.
- « Sur une classe particulière d'équations de *M. Moutard* », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 166, 748-751, 1913.
- *Traité de mécanique à l'usage des élèves de mathématiques A et B*, Vuibert, Paris, 7<sup>e</sup> édition, 1913.
- *Problèmes de mécanique et cours de cinématique*, Hermann, Paris, 1913.
- « Étude des propriétés métriques des courbes dans un espace d'ordre quelconque », *Bulletin de Darboux*, (2) 36, 25-30, 34-72, 1912.
- « Sur les cercles osculateurs et les sphères osculatrices aux lignes de courbure d'une surface », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 154, 677-679, 1912.
- « Sur les surfaces telles que les sphères osculatrices aux lignes de courbure d'une série soient tangentes à une sphère fixe », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 154, 1274-1277, 1912.
- « Sur une classe très étendue de systèmes triple-orthogonaux », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 153, 858-862, 1912.
- *Traité de géométrie. Tome I*, Vuibert, Paris, 4<sup>e</sup> édition, 1911.
- « Sur les surfaces dont les normales touchent une quadrique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 152, 117-121, 1911.
- « Sur la déformation des quadriques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 152, 349-353, 1911.
- « Sur les réseaux  $C$  tels que les lignes d'une série soient des courbes planes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 152, 834-837, 1911.
- « Sur certains systèmes triple-orthogonaux qui se déduisent de courbes plusieurs fois isotropes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 152, 1726-1730, 1911.
- « Sur les surfaces à courbure totale constante qui correspondent à des systèmes singuliers d'ordre quelconque », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 150, 76-80, 1910.
- « Sur un mode de génération des systèmes triple-orthogonaux à lignes de courbure sphériques dans un seul système », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 150, 1090-1094, 1910.
- « Sur les transformations des réseaux  $O$  associés », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 148, 974-978, 1909.

- « Sur les systèmes singuliers de réseaux  $O$  associés », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 148, 1146-1149, 1909.
- « Sur les surfaces à courbure totale constante », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 148, 1294-1298, 1909.
- « Sur les congruences dont les deux surfaces focales sont des quadriques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 148, 1496-1499, 1909.
- « Sur les surfaces telles que les tangentes à une série de lignes de courbure touchent une quadrique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 149, 1030-1034, 1910.
- « Mémoire sur la déformation des quadriques », *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, (2) 34, 1909.
- *Traité de mécanique à l'usage des élèves de mathématiques A et B*, Vuibert et Nony, Paris, 6<sup>e</sup> édition, 1909.
- *Traité de géométrie. Volume I, à l'usage des classes de seconde et première C et D et mathématiques A et B*, Vuibert, Paris, 3<sup>e</sup> édition, conforme au programme du 27 juillet 1905, 1908.
- *Traité de mécanique à l'usage des élèves de mathématiques A et B et des candidats aux écoles*, Vuibert, Paris, 5<sup>e</sup> édition, conforme au programme du 27 juillet 1905, 1908.
- *Traité de mécanique. Première partie : Cinématique, à l'usage des élèves des classes de première C et D*, Vuibert, Paris, 4<sup>e</sup> édition, 1906.
- « Sur certains systèmes de cercles et de sphères qui se présentent dans la déformation des quadriques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 142, 261-264, 1906.
- « Sur la déformation des quadriques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 142, 22-25, 1906.
- « Sur les variétés doublement infinies de points d'une quadrique de l'espace à quatre dimensions applicables sur un plan », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 142, 982-986, 1906.
- *Traité de mécanique. 2<sup>e</sup> partie : Cinématique, statique, dynamique, à l'usage des élèves des classes de mathématiques A et B*, Vuibert, Paris, 2<sup>e</sup> édition, 1906.
- *Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux*, Gauthier-Villars, Paris, Scientia (25), 1905.
- « Sur la déformation des quadriques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 141, 932-936, 1906.
- « Sur les propriétés infinitésimales de l'espace non-euclidien », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 141, 170-175, 1906.
- *Traité de mécanique. I<sup>re</sup> partie. Cinématique, à l'usage des élèves des classes de première C et D*, Vuibert et Nony, Paris, 3<sup>e</sup> édition, 1905.

- 
- *Traité de mécanique. II<sup>e</sup> partie : Cinématique, statique, dynamique, à l'usage des classes de mathématiques A et B*, Vuibert et Nony, Paris, 1905.
  - « Sur les systèmes de deux surfaces dont les lignes de courbure se projettent sur un plan suivant les mêmes courbes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 138, 258-260, 1904.
  - « Sur un groupe de problèmes de géométrie », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 138, 466-469, 1904.
  - *Traité de mécanique. Première partie : Cinématique, à l'usage des élèves des classes de première C et D*, Vuibert et Nony, Paris, 2<sup>e</sup> édition, 1904.
  - « Au sujet d'un théorème relatif aux lignes de courbure des surfaces », *Nouvelles Annales*, (4) 3, 515, 1903.
  - « Sur les surfaces qui se correspondent avec parallélisme des plans tangents et conservation des aires », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 136, 151-153, 1903.
  - « Sur une classe particulière de systèmes triple-orthogonaux », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 136, 490-492, 1903.
  - « Sur une transformation d'une classe particulière de systèmes triple-orthogonaux », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 136, 597-600, 1903.
  - « Sur une nouvelle transformation des surfaces à courbure totale constante », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 186, 879-880, 1903.
  - « Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, (3) 20, 75-132, 181-240, 241-288, 1903.
  - *Traité de mécanique. Première partie : Cinématique, à l'usage des élèves des classes de première C et D*, Nony, Paris, 1903.
  - « Sur la déformation du paraboléide quelconque », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 132, 398-401, 1901.
  - « Sur les réseaux qui, par la méthode de *Laplace*, se transforment des deux côtés en réseaux orthogonaux », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 132, 249-251, 1901.
  - « Sur certaines équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 131, 100-103, 1901.
  - « Sur les congruences dont les deux réseaux focaux sont cycliques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 131, 1177-1179, 1901.
  - « Sur les surfaces isothermiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 130, 159-162, 1900.
  - « Sur une transformation des surfaces isothermiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 130, 477-480, 1900.
  - « Sur les congruences de cercles et de sphères qui sont plusieurs fois cycliques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 130, 1533-1535, 1900.

### D.1.2 Publications de Bertrand Gambier

Le recensement des publications de Bertrand Gambier entre 1914 et 1954, (il est mort en 1953) a été fait à partir du Répertoire bibliographique du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* et du *Zentralblatt*. Il est présenté par ordre anti-chronologique.

- « Épi- ou hypocycloïdes tangentes à 3 droites », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (9) 33, p.1-28, 1954.
- « Potentiels circulaires. Faisceaux de cercles ; points de Poncelet », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (9) 32 p.185-201. 1953.
- « Sur une propriété projective d'un couple de coniques », *Università Politecnica Torino, Rend. Sem. Mat.* (11), p.337-341. 1952.
- « Étude d'un cercle de grandeur constante glissant sur les arêtes d'un trièdre trirectangle fixe », *Mathesis* (59), p. 18-38, 1950.
- Gambier, B. et Hocquenghem, A., « Ellipses ayant deux sommets consécutifs donnés », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (29), 9<sup>e</sup> série, p.275-311, 1950.
- « Points et tangentes d'inflexion d'une cubique plane de genre un », *Boll. Unione Mat. Ital.*, III. Ser. 4, 13-16, 1949.
- « Sur les tétraèdres dont certaines bihauteurs se rencontrent », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (77), p. 139-140, 1949.
- « Courbes algébriques de classe  $p$  dont une  $p$ -sectrice de chaque système de tangentes concourantes passe par un point fixe », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (66), 3<sup>e</sup> série, p.1-17, 1949.
- « Sur les tétraèdres dont certaines bihauteurs se rencontrent », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (76), p. 79-94, 1948.
- « Cercles focaux d'une conique », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (25), 9<sup>e</sup> série, p. 241-255, 1947.
- « Courbes planes de classe  $p$  dont tous les systèmes de tangentes concourantes ont les mêmes directions de  $p$ -sectrices », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (71), 2<sup>e</sup> série, p.232-246, 1947.
- « Quelques réflexions à propos de la parataxie », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (63), 3<sup>e</sup> série, p.23-44, 1946.
- « Sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales. Systèmes cycliques », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (23), 9<sup>e</sup> série, p.249-304, 1944.
- *Cycles paratactiques*, Paris, Gauthier-Villars, Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 104, 1944.

- 
- *Configurations recurrentes, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (61), 3<sup>e</sup> série, p.199-230, 1944.
  - « Système aux dérivées partielles dont la surface de translation générale est solution, *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (216), p.244-245, 1943.
  - « Système d'équations aux dérivées partielles d'ordre cinq vérifié par la surface générale de translation », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (71), p.1-19, 1943.
  - « Triangles en position isogonale », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (70), p.31-39, 1942.
  - « Tétraèdres inscrits dans une biquadratique et circonscrits à une quadrique  $\Sigma$  », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (11), 9<sup>e</sup> série, p.199-265, 1942.
  - « Sur un principe de géométrie énumérative basé sur le théorème de d'Alembert », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (65), . (French) Bull. Sci. Math., 2<sup>e</sup> série, p.264-279, 1941.
  - « Étude d'un espace à quatre dimensions décomposable en la somme de deux espaces à deux dimensions », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (19), 9<sup>e</sup> série, p.237-260, 1940.
  - « Surfaces admettant plusieurs réseaux conjugués coniques », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (19), 9<sup>e</sup> série, p. 63-82, 1940.
  - « Application du théorème de d'Alembert à l'étude de configurations géométriques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (210), p.523-525, 1940.
  - « Couples de tétraèdres de Möbius », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (56), 3<sup>e</sup> série, p. 71-118, 1939.
  - Gambier, Bertrand et Labrousse, A., « Tétraèdres inscrits dans une biquadratique et conjugués par rapport à une quadrique », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (67), p.177-222, 1939.
  - « Sur une configuration de trois coniques. II », *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, (25), 5<sup>e</sup> série, p.25-27, 1939.
  - « Cercles perpendiculaires et un paradoxe relatif aux imaginaires », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (63), 2<sup>e</sup> série, p.233-238, 1939.
  - « Transformations homographiques planes conservant la droite de l'infini et un point à distance finie », *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, (2), 4<sup>e</sup> série, p.155-175, 1938.
  - « Surfaces admettant plusieurs réseaux de translation. Réseaux coniques », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (55), 3<sup>e</sup> série, p.83-118, 1938.
  - « Sur une configuration de trois coniques. I. », *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, (24), 5<sup>e</sup> série, p.765-780, 1938.



- « Tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique et dont les arêtes touchent une autre quadrique. Tétraèdres dont les arêtes touchent deux quadriques. », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (17), 9<sup>e</sup> série, p.291-326, 1938.
- « Triangles homologues, tétraèdres homologues, tétraèdres en situation hyperboloïdale », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (66), p.8-47, 1938.
- « Couple de tetraedres de Möbius », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (62), 2<sup>e</sup> série, p.72-83, 1938.
- « Trisectrices des angles d'un triangle », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (61), 2<sup>e</sup> série, p.360-368, 1937.
- « Représentation des déplacements autour d'un point fixe (dans l'espace à trois dimensions) par un couple de points de cet espace », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (16), 9<sup>e</sup> série, p.345-348, 1937.
- « Surface de Jonas et surfaces  $R$  », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (204), p.1858-1859, 1937.
- Gambier, Bertrand et Rowe, Charles H., « Lieu des points dont les rapports des distances à trois droites fixes restent constants : Biquadratiques, cubiques gauches et dégénérescences », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (53), 3<sup>e</sup> série, p.329-386, 1936.
- « Surfaces réglées osculatrices à une surface le long d'une courbe », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (15), 9<sup>e</sup> série, p. 151-162, 1936.
- « Coniques (quadriques) harmoniquement circonscrites à une autre. Configurations projectives et anallagmatiques », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (64), p.174-196, 1936.
- « Surfaces dont les asymptotiques de l'un ou l'autre système appartiennent aux complexes linéaires », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (203), p.971-973, 1936.
- « Surfaces dont les asymptotiques de l'un ou l'autre système appartiennent à des complexes linéaires », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (203), p.700-702, 1936.
- « Étude des surfaces cubiques admettant des points d'Eckardt », *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, (22), 5<sup>e</sup> série, p.591-605, 1936.
- *Enveloppe d'une famille de quadriques à un paramètre*, Paris, Gauthier-Villars, 1936.
- « Étude des surfaces cubiques admettant des points d'Eckardt », *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, (22), 5<sup>e</sup> série, p.510-524, 1936.
- « Enveloppe d'une famille de quadriques à un paramètre », *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, (27), 3<sup>e</sup> série, p.201-240, 1935.
- « Points et plans tangents d'une surface de l'espace à trois dimensions », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (59), 2<sup>e</sup> série, p. 367-380, 1935.

- « Tétraèdres inscrits dans une cubique gauche (ou une biquadratique) et circonscrits à une développable de classe 3 (ou 4) ou à une quadrique », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (63), p.56-90, 1935.
- « Tétraèdres dont les sommets sont sur une quadrique  $\Sigma$  et dont les arêtes touchent une quadrique  $S$  », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (52), 3<sup>e</sup> série, p. 1-38, 1935.
- « Quadriques à un paramètre touchant leur enveloppe suivant deux coniques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (200), p.195-197, 1935.
- « Quadriques coupant deux autres chacune suivant quatre droites trois couples remarquables de deux quadriques », *Association Française pour l'Avancement des Sciences*, p.43-45, 1934.
- « Tétraèdres inscrits dans une quadrique  $\Sigma$  et d'arêtes tangentes à une quadrique  $S$  », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (199), p.10-12, 1934.
- *Polygones de Poncelet généralisés*, Paris, Gauthier-Villars, 1934.
- « Tétraèdres conjugués à une quadrique  $\Sigma$  et à arêtes tangentes à une quadrique  $S$ . Tétraèdres dont les arêtes sont tangentes à deux quadriques  $S, S'$  », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 198, p.1896-1898, 1934.
- « Tétraèdres inscrits dans une biquadratique et circonscrits à une développable de classe 4 et genre I ou à une quadrique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 198 (1934) 878-880.
- « Tétraèdres inscrits dans une cubique gauche et circonscrits à une développable de classe 3 ou à une quadrique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 198 (1934) 532-535.
- « Théorèmes de Meusnier et Moutard ; surfaces algébriques osculatrices à une surface », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 198 (1934) 37-39.
- *Cercles tangents dans le plan ou paratactiques dans l'espace. Pyramide inscrite et circonscrite à une quadrique de l'espace à quatre dimensions*, Paris, Gauthier-Villars, 1934.
- Finikoff, S. et Gambier, B., *Surfaces dont les lignes de courbure se correspondent avec égalité des rayons de courbure principaux*, Paris, Gauthier-Villars, 1934.
- « Sur certaines variétés de l'espace à quatre dimensions », *Association Française pour l'Avancement des Sciences* (1933) 36-38.
- « Sur une congruence de cercles osculateurs aux lignes de courbure  $u = \text{const.}$  d'une surface  $S_1$  et  $v = \text{const.}$  d'une surface  $S_2$  », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (196), p. 1275-1277, 1933.
- « Congruences de cercles ; points focaux », *Annales de la faculté des sciences de l'université de Toulouse*, (25), 3<sup>e</sup> série, p. 69-114, 1933.
- « Surfaces réglées algébriques. Singularités », *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques*, (11), p.35-53, 1933.

- « Lignes de raccord de surfaces ; lignes géodésiques, lignes ombilicales, lignes de courbure », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (197), p. 1274-1276, 1933.
- « Transformations homographiques changeant une biquadratique en elle-meme. Polygones de Poncelet », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (12), 9<sup>e</sup> série, p.309-336, 1933.
- « Cycles orthogonaux à une même sphère et configuration de Petersen-Morley », *JMPA*, (11), 9<sup>e</sup> série, p.377-384, 1932.
- « Congruence de cercles : points focaux et surfaces focales », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (195), p. 928-930, 1932.
- « Intersection de deux courbes planes algébriques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (195), p. 1057-1059, 1932.
- « Surfaces réglées algébriques et leurs singularités », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (195), p. 745-747, 1932.
- « Points de contact d'une courbe algébrique et de son enveloppe », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (194), p.578-580, 1932.
- « Transformation d'une famille simplement infinie de géodésiques et de la famille de courbes conjuguées », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (194), p. 32-35, 1932.
- « Intégrales quadratiques de l'équation  $\frac{\delta^2 \Theta}{\delta u \delta v} + \frac{n(n+1)\Theta}{(u-v)^2} = 0$  », *Annales Scientifiques de l'université de Jassy*, Sect. I, Math. 16, p. 301-338, 1931.
- « Systèmes de trois cercles ou de dix cercles. Invariants allagmatiques de trois cercles », *Roczn. Polsk. Towarz. Mat.*, (9), p.72-96, 1931.
- « Surfaces de Voss-Guichard », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (48), 3<sup>e</sup> série, p.359-368, p.369-396, 1931.
- « Intégration simultanée de deux équations différentielles du premier ordre », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (193), p. 509-512, 1931.
- « Propriétés quadratiques et leurs cas d'exception. Cycles tangents dans le plan ou paratactiques dans l'espace », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (55), 2<sup>e</sup> série, p. 75-96, 1931.
- « Invariants anallagmatiques de trois cercles », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (191), p.1044-1046, 1930.
- « Cycles orthogonaux à une même sphère. Congruences et opérations paratactiques. Applications », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (9), 9<sup>e</sup> série, p. 179-199, 1930.
- « Systèmes de cercles, de sphères, d'hypersphères », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (190), p. 157-159, 1930.

- 
- « Deformation d'une surface avec un réseau conjugué formé de lignes coniques ou cylindriques et remarques sur un article de M. Liebmann », *Mathematische Zeitschrift*, (32), p. 291-314, 1930.
  - « Surfaces de Voss-Guichard », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (191), p.1280-1282, 1930.
  - *Agrégation des sciences mathématiques 1928, Calcul différentiel et intégral, l'Enseignement Mathématique*, (28), p.239-257, 1930.
  - « Sur une formule déduite de la théorie des cubiques planes », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (58), p.220-223, 1930.
  - « Configurations », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (190), p.344-346, 1930.
  - « Invariants projectifs de quatre droites. Sous-groupe du groupe des homographies », *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques*, (8), p.10-34, 1930.
  - « Sur quelques propriétés des cercles », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (190), p.564-567, 1930.
  - « Configurations remarquables de quatre tangentes à une même courbe gauche », *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques*, (8), p. 35-67, 1930.
  - « Courbes gauches de degré 4 tracées sur le tore », *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, (21), 3<sup>e</sup> série, p. 223-246, 1929.
  - « Polygones de Poncelet généralisés », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (46), 3<sup>e</sup> série, p. 55-71, 1929.
  - « Groupes de transformation et théorèmes géométriques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (188), p. 1219-1221, 1929.
  - « Déformées imaginaires de surfaces réelles ; systèmes cycliques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (188), p.758-761, 1929.
  - « Solutions quadratiques des équations de Moutard », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (188), p. 605-607, 1929.
  - « Sur les équations de Moutard à intégrales quadratiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (188), p. 1078-1081, 1929.
  - « Surfaces réglées algébriques ; singularités ; classification », *Annales Société Polonaise de Mathématiques*, (7), p. 148-212, 1929.
  - « Configurations géométriques de droites ou cercles », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (188), p.1645-1647, 1929.
  - « Systèmes remarquables de 10 droites ou 20 cercles. Cycles orthogonaux à une même sphère. Congruences paratactiques », *Recueil mathématique de Moscou*, (36), p.189-203, 1929.
  - « Sections paraboliques de la sphère. Application au tore », *Comptes Rendus du congrès des sociétés savantes*, (11), 1928.

- *Applicabilité des surfaces étudiée au point de vue fini*, Paris, Gauthier-Villars, Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 31, 1928.
- « Classification des courbes gauches (ou planes) unicursales », *Annales de Jassy*, (15), p. 338-358, 1928.
- « Configurations remarquables de quatre droites tangentes à certaines courbes gauches », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (187), p. 591-593, 1928
- « Sous-groupes du groupe des homographies. Application à l'étude des courbes gauches », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (187), p. 749-751, 1928.
- « Équation intrinsèque d'une surface », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (187), p. 872-875, 1928
- « Surfaces fermées convexes ;  $ds^2$  de Liouville ; antipodes géodésiques. », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (186), p. 828-830, 1928.
- « Lignes géodésiques, lignes de longueur nulle, lignes de courbure totale constante », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (186), p.1184-1186, 1928.
- « Surfaces réglées algébriques : singularités et classification », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (186), p. 1342-1344, 1928.
- « Contact des courbes gauches. Théorème de Meusnier et généralisations. Équation intrinsèque d'une surface », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (7), 9<sup>e</sup> série, p. 75-91, 1928.
- « Élément linéaire de Liouville », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (52), 2<sup>e</sup> série, p.161-176, 1928.
- « Sur quelques cas méconnus de la déformation des surfaces », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (56), p. 224-239, 1928.
- « L'équation différentielle linéaire du second ordre  $y'' + A(x) \cdot y = 0$ , *Nouvelles Annales*, (2), 6<sup>e</sup> série, p. 2-23, 1927.
- « Agrégation des sciences mathématiques (1927). Solution de la question de géométrie », *Nouvelles Annales*, (2), 6<sup>e</sup> série, p. 243-252, 1927.
- « Agrégation des sciences mathématiques (1927). Solution de la question de mathématiques spéciales », *Nouvelles Annales*, (2), 6<sup>e</sup> série, p. 272-287, 1927.
- « Contact des courbes gauches. Théorème de Meusnier et généralisation. Équation intrinsèque d'une surface », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (185), p. 921-923, 1927.
- *Déformation des surfaces étudiée du point de vue infinitésimal*, Paris, Gauthier-Villars, (Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 26), 1927.
- « Surfaces de Voss et Guichard ; surfaces associées et adjointes. Déformation avec réseau conjugué permanent », *Acta Mathematica*, (51), p. 83-131, 1927.
- « Surfaces se déformant de sorte que les lignes de niveau restent lignes de niveau », *Nouvelles Annales*, (6) 2, 137-147, 1927.

- 
- « Surfaces de Weingarten : Cas d'intégrabilité partielle ou totale de leur équation aux dérivées partielles », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (51), 2<sup>e</sup> série, p. 347-368, 1927.
  - « Surfaces ayant un  $ds^2$  de Liouville et leurs géodésiques fermées. Antipodes géodésiques. Points géodésiquement symétriques », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (44), 3<sup>e</sup> série, p. 213-288, 1927.
  - « Sur des surfaces qui ne sont pas de révolution et ont leurs géodésiques fermées », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (184), p. 257-259, 1927.
  - « Surfaces ayant un  $ds^2$  de Liouville et leurs géodésiques fermées », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (184), p. 357-360, p. 659-661, 1927.
  - « Conditions cinématiques de l'égalité de deux courbes », *Comptes Rendus du congrès des sociétés savantes 1926*, p.55-58, 1927.
  - *Les courbes de Bertrand*, Paris, Gauthier-Villars (Travaux et Mémoires de l'université de Lille ; nouvelle série, section médecine-sciences, vol. 4), 1926.
  - « Sur les faisceaux de courbes planes d'ordre  $3m$  ayant neuf points multiples d'ordre  $m$  et leur lien avec la surface cubique générale », *Mathesis*, (40), p.49-56, 1926.
  - « Sur quelques formules déduites de la théorie des cubiques planes », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (54), p.38-52, 1926.
  - « Sur certains réseaux conjugués », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (54), p. 41-42, 1926.
  - « Sur l'applicabilité de deux surfaces », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (54), p. 40-41, 1926.
  - « Déformation des surfaces et méthode de Weingarten », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (183), p. 838-840, 1926.
  - « Déformation des surfaces et équations de Gauss-Codazzi », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (183), p. 1079-108, 1926.
  - « Déformation d'une surface avec conservation d'un réseau conjugué », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (182), p. 1312-1314, 1926.
  - « Déformation des surfaces tétraédrales, avec conservation d'un réseau conjugué et rigidité d'une asymptotique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (182), p. 913-916, 1926.
  - « Surfaces de Voss-Guichard », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (182), p. 1453-1455, 1926.
  - « Déformation continue d'un hélicoïde en hélicoïde avec réseau conjugué permanent. Surface de Voss-Guichard », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (50), 2<sup>e</sup> série, p. 308-328, p. 335-342, 1926.
  - « Courbure et torsion des courbes d'un complexe linéaire ou non linéaire », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (50), 2<sup>e</sup> série, p. 43-50, 1926.

- « Déformation des surfaces tétraédrales », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (5), 9<sup>e</sup> série, p.227-295, 1926.
- « Surfaces isothermiques à représentation sphérique isotherme. », *Bulletin de l'Académie Polonaise*, p. 133-183, 1926.
- « Lösung einer Aufgabe zur Agrégation des sciences mathématiques », *Nouvelles Annales*, (1), 6<sup>e</sup> série, p. 74-87, 1925.
- « Problème de Poncelet et problème analogue », *Nouvelles Annales*, (3), 5<sup>e</sup> série, p. 256-276, p. 281-293, 1925.
- « Courbure et torsion des courbes appartenant à un complexe linéaire ou non », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (181), p. 18-20, 1925.
- « Sur une généralisation du théorème du reste de Brill et Noether. Application aux groupes de points surabondants », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (180), p. 897-899, 1925.
- « Invariants de Gauss, Beltrami et Minding », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (180), p. 107-109, 1925.
- « Surfaces de translation de Sophus Lie », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (180), p. 1195-1196, 1925.
- « Surfaces dont un nombre fini ou infini d'asymptotiques appartiennent à un complexe linéaire », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (180), p. 1813-1816, 1925.
- « Déformation continue des surfaces, isométrie et applicabilité », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (180), p. 248-251, 1925.
- « Transformations asymptotique de M. Bianchi et courbe de M. Picard sur les surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (180), p. 1567-1570, 1925.
- « Théorème du reste de Brill et Noether. Systèmes linéaires de courbes algébriques et groupes des points surabondants », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (42), 3<sup>e</sup> série, p. 217-291, 1925.
- « Surfaces à lignes géodésiques toutes fermées ; étude spéciale de celles qui sont de révolution », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (49), 2<sup>e</sup> série, p. 57-64, p. 74-96, p. 104-128, 1925.
- « Asymptotiques d'une surface. Formules de Lelievre, *Nouvelles Annales*, (1), 6<sup>e</sup> série, p.1-13, 1925.
- « Sur une généralisation des polygones de Poncelet », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (179), p. 745-747, 1924.
- « Sur les polygones de Poncelet généralisés », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (179), p. 878-881, 1924.
- « Sur les polygones de Poncelet généralisés », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (179), p. 1241-1243, 1924.

- 
- « Sur les polygones de Poncelet », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (178), p. 837, 1924.
  - « Surfaces à géodésiques toutes fermées », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (178), p. 446-449, 1924.
  - « Surfaces de révolution à géodésiques toutes fermées », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (178), p. 614-617, 1924.
  - « Système linéaire de courbes algébriques de degré donné admettant un groupe donné de points bases », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (41), 3<sup>e</sup> série, p. 147-264, 1924.
  - « Asymptotiques non rectilignes d'une surface réglée et équation de Riccati correspondante », *Nouvelles Annales*, (2), 5<sup>e</sup> série, p. 321-324, 1924.
  - « Réduction des systèmes algébriques de points appartenant à une même courbe algébrique. Théorème d'Abel », *Bulletin de Darboux*, (47), 2<sup>e</sup> série, p. 76-96, 1923.
  - « Courbes de Bertrand et déformation des quadriques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (177), p. 20-23, 1923.
  - « Systèmes de points surabondants dans le plan ; application à l'étude de certaines surfaces », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (176), p. 1287-1289, 1923.
  - « Sur les courbes de Bertrand et en particulier sur celles qui sont algébriques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (176), p. 1594-1597, 1923.
  - « Courbes minima ; courbes à torsion constante ; courbes de Bertrand. Déformation du paraboloid de révolution », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (176), p. 1785-1788, 1923.
  - « Sur les courbes de Bertrand et sur les transformations involutives permutable », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (176), p. 27-30, 1923.
  - « Déformation du paraboloid de révolution : cubique de M. Lyon et congruences de M. Thybaut », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (50), p. 153-219, 1922.
  - « Mécanismes transformables ou déformables. Couples de surfaces qui s'en déduisent », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (1), 9<sup>e</sup> série, p. 19-76, 1922.
  - « Systèmes linéaires de courbes planes admettant un système donné de points-bases », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (175), p. 1384-1387, 1922.
  - « Surfaces et variétés de translation de Sophus Lie », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (174), p. 98-100, 1922.
  - « Correspondance ponctuelle entre deux surfaces avec échange des réseaux conjugués en réseaux orthogonaux et vice versa », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (174), p. 523-526, 1922.



- « Correspondances ponctuelles déduites de l'étude des trois formes quadratiques fondamentales de deux surfaces », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (174), p. 661-663, 1922.
- « Surfaces isothermiques à représentation sphérique isotherme », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (174), p. 921-924, 1922.
- « Sur les correspondances ponctuelles de deux surfaces et sur une classe de surfaces analogues aux surfaces isothermiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (174), p. 1110-1113, 1922.
- « Surfaces applicables avec égalité des rayons de courbure principaux », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (174), p. 1613-1615, 1922.
- « Représentation conforme avec conservation des lignes de courbure et de la valeur absolue du rapport des rayons de courbure principaux. Surfaces de révolution ; surfaces minima ; surfaces isothermiques ; hélicoidales et spirales », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (39), 3<sup>e</sup> série, p. 217-271, 1922.
- « Surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (49), p. 150-205, 1921.
- « Correspondance conforme entre deux surfaces avec conservation des lignes de courbure et de la valeur absolue du rapport des rayons de courbure principaux », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (173), p. 763-766, 1921.
- « Surfaces imaginaires applicables sur une surface de révolution ou une surface moulure réelle ; systèmes cycliques réels correspondants », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (173), p. 22-25, 1921.
- « Sur les systèmes articulés déformables ou transformables », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (172), p. 363-366, 1921.
- « Systèmes articulés déformables et couples de surfaces qui s'en déduisent », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (172), p. 570-573, 1921.
- « Courbes algébriques non unicursales à torsion constante », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (172), p. 953-956, 1921.
- « Courbes algébriques réelles non unicursales à torsion constante », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (172), p. 1158-1161, 1921.
- « Sur les surfaces applicables et l'équation de Laplace », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (172), p. 1397-1400, 1921.
- « Déformation des surfaces et équations de Laplace », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (172), p. 1568-1570, 1921.
- « Applicabilité des surfaces réelles. Étude spéciale de la correspondance entre point réel et point imaginaire. Systèmes cycliques réels et systèmes triples orthogonaux correspondants », *Bulletin de Darboux*, (45), 2<sup>e</sup> série, p. 137-152, p. 156-184, p. 189-205, 1921.

- 
- « Couples de deux surfaces minima se correspondant comme focales d'une congruence rectiligne, avec conservation des lignes asymptotiques et des lignes de longueur nulle », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (171), p. 842-845, 1920.
  - « Application imaginaire de deux surfaces réelles ou imaginaires. Systèmes cycliques ou systèmes triples orthogonaux réels correspondants », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (171), p. 1049-1052, 1920.
  - « Surfaces de translation de Sophus Lie », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (170), p. 1371-1374, 1920.
  - « Surfaces de translation applicables l'une sur l'autre », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (170), p. 560-563, 1920.
  - « Sur les surfaces applicables », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (170), p. 645-647, 1920.
  - « Surfaces de translation applicables l'une sur l'autre », *Nouvelles Annales*, (20), 4<sup>e</sup> série, p. 281-295, p. 321-341, p. 361-372, 1920.
  - « Étude des surfaces de translation de Sophus Lie », *Nouvelles Annales*, (20), 4<sup>e</sup> série, p. 401-424, p. 454-479, 1920.
  - « Application de deux surfaces l'une sur l'autre », *Bulletin de Darboux*, (44), 2<sup>e</sup> série, p. 65-72, p. 76-91, 1920.
  - « Sur les courbes à torsion constante », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (36), 3<sup>e</sup> série, p. 263-409, 1919 ; (37), p. 117-164, 1920.
  - « Sur l'identité de Bézout, *Nouvelles Annales*, (19), 4<sup>e</sup> série, p. 284-297, 1919.
  - « Surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (168), p. 674-677, 1919.
  - « Surfaces applicables l'une sur l'autre », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (168), p. 537-539, 1919.
  - « Sur les courbes à torsion constante », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (158), p. 97-99, 1914.
  - « Sur les courbes de *Bertrand* et les courbes à courbure constante, *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (158), p. 236-238, 1914.
  - « Sur les courbes algébriques à torsion constante, de genre non nul, *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (158), p. 321-324, 1914.
  - « Sur les courbes algébriques à torsion constante, réelles et non unicursales, *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (158), p. 613-615, 1914.
  - « Sur les surfaces susceptibles d'être engendrées de plusieurs façons différentes par le déplacement d'une courbe invariable, *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (158), p. 1155-1157, 1914.
  - « Relation d'*Euler* entre le cercle circonscrit à un triangle et les cercles tangents aux trois côtés de ce triangle », *Nouvelles Annales*, (14), 4<sup>e</sup> série, 366-368, 1914.

- *Le mathématicien François Viète. Généalogie de sa famille*, La Rochelle, Texier, 1911.
- « Sur les intégrales singulières de certaines équations différentielles algébriques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (149), p.21-22, 1910.
- « Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes », *Acta Mathematica*, (33), p.1-55, 1909.
- « Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (144), p. 962-964, 1907.
- « Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (143), p. 741-743, 1907.
- « Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (142), p. 266-269, 1906.
- « Sur les équations différentielles du deuxième ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est uniforme », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (142), p. 1403-1406, p. 1497-1500, 1906.

## D.2 Bibliographie de Paul Montel, Georges Valiron et Arnaud Denjoy : mathématiciens analystes spécialistes de théorie des fonctions professeurs à la Sorbonne pendant l'entre-deux-guerres

### D.2.1 Publications de Paul Montel

Le recensement des publications de Paul Montel entre 1914 et 1945 a été fait à partir de plusieurs ouvrages :

- le Répertoire bibliographique du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*,
- le *Zentralblatt*,
- les notices sur travaux de Paul Montel,
- le *Selecta, cinquantenaire scientifique de Paul Montel, 1897-1947*, MONTEL (1947b).

Il est présenté par ordre anti-chronologique de 1945 à 1914.

#### 1945

- « Sur les fonctions analytiques dont les valeurs couvrent un domaine d'aire bornée », *Publicaciones del Instituto de Matematica*, Universidad Nacional del Litoral VI 1-16. Rosario, hommage à Jules Rey Pastor.
- « Charles Fabry », *Revue générale des Sciences pures et appliquées* 52 205.

#### 1943

- « Sur les rapports entre les dérivées et les différences divisées », *Mathematica* 19 1-11. Hommage à D. Pompeiu.

#### 1942

- « Sur le nombre des combinaisons avec répétitions limitées », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 214 139-141.
- « Sur les combinaisons avec répétitions limitées », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 66 86-103.
- « Sur les différences divisées », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 215 193-195.
- « Sur la dispersion des points singuliers des courbes algébriques », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 66 27-31.
- « La vie et l'oeuvre d'Émile Picard », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 66 3-17.
- « Analyse du livre de H. Lebesgue : *Les coniques* », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 66 109.

#### 1941

- « Sur les valeurs algébriques d'une fonction entière ou méromorphe », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (9) 20 305-324.
- « Henri Lebesgue », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 213 197-200.

### 1940

- « Observations sur une Communication de M. P. Sergescu », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 210 654-655.
- « Sur les points où une fonction analytique est égale à une fonction algébrique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 211 217-220.
- « Sur les fonctions analytiques égales à une fonction algébrique en un nombre borné de points », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 211 370-374.
- « Sur la distance des points en lesquels une fonction analytique prend des valeurs données », *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, Festschrift Rudolf Fueter 85 31-39.
- « L'itération », *Publicationes de la Facultad de Ciencias fisicomatematicas* (2) 3 201-211.
- « Sur quelques propriétés des couples de fonctions uniformisantes », *Sbornik Pamjati D. A. Gravé* 166-171.
- « Harmonische und subharmonische Funktionen », *Publ. Inst. Mat.* 2 1-23. (en espagnol)
- « Sur les ensembles de fonctions », Note dans *Curs de Algebra Superioară de M. Anghelutza* 1 292-314.
- « Tziteica si Frantza », *Natura* (29) 3 103.

### 1939

- « Sobre la cuadratura del círculo », *Anales de la Sociedad científica Argentina* (6) 128 324-330.
- « Sur les valeurs des fonctions holomorphes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 20 963-967.
- « La Géométrie des polynômes », *Comptes rendus du Congrès des sciences mathématiques de Liège* 9-19.
- « Sur les suites de fonctions non bornées dans leur ensemble », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 67 42-55.
- « Sur une formule de M. Michel Petrovitch », *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, « Hommage à Michel Petrovitch ».

### 1938

- « Sur quelques interpolations spéciales », *Revue mathématique de l'Union inter-balkanique* 2 107-115.
- « Sur certains cas d'univalence ou de multivalence locales », *Mathematica* 14 190-195.

- « Sur les familles de fonctions holomorphes non uniformément bornées », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 207 605-607.
- « Sur un problème de J. Bertrand », *Bulletin de mathématiques et de physiques pures et appliquées de l'Ecole polytechnique Roi Carol II* (9) 1-7.
- « O funkcjach jedno-i wielowartwowych », (« Sur les fonctions univalentes et multivalentes »), *Mathesis Polska* 11 1-19. (En polonais).

## 1937

- « Sur une formule de M. Michel Petrovitch », *Publications mathématiques de l'université de Belgrade* 6-7 174-182.
- *Lectiuni despre functiunile aproape-periodice*, Cluj, Monografii mat., Fasc. I.
- « Sur quelques propriétés des différences divisées », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (9) 16 219-231. Hommage à Jacques Hadamard.
- « Sur les fonctions localement univalentes ou multivalentes », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 54, pp. 39-54.
- « Sur une équation fonctionnelle », *Mathematica* 13 5-15.
- « Sur les relations de Cauchy », *Bulletin mathématique de la Société Roumaine des sciences* 38 pp. 97-99.
- « Sur quelques séries à coefficients récurrents », *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques* 15 54-72.
- « Sur quelques propriétés des couples de fonctions uniformisantes », *Recueil de l'Académie des sciences de Kieff*.
- « Les fonctions de variables complexes » dans *Encyclopédie française* I p.72-2 à 74-12.
- « Harmonischni i podharmonichni functii », *Spisanie na Physico-mathematischeskoto Drygestvo* 23 30-43 et 112-114. (En bulgare).
- « Quelques tendances dans les mathématiques contemporaines », *Science*.

## 1936

- « Sur les bornes des modules des zéros des polynomes », *The Tohoku Mathematical Journal* 41 311-316.
- « Sur les critères de familles normales », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 60 240-246.
- « Sur les fonctions définies par des séries à coefficients récurrents », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 203 655-657.
- « Sur l'univalence ou la multivalence locale », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 203 579-581.
- « Sur quelques extensions d'un théorème de Jacobi », *Prace Matematyczno-Fizyczne*, 44 315-329.

- *Fonctions périodiques et fonctions presque périodiques*, Leçons à la faculté des sciences de Cluj. (Traduites en roumain).
- *Sur les méthodes récentes pour l'étude des singularités des fonctions analytiques*. (En russe).

## 1935

- « Sur un théorème de Jacobi », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 201 586-588.
- « Sur une formule de Weierstrass », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 201 322-324.
- « Sur les fonctions harmoniques positives », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 201 119-121.
- « Sur quelques familles de fonctions harmoniques », *Fundamenta Mathematicae* 25 388-407.
- « Sur quelques rapports nouveaux entre l'algèbre et la théorie des fonctions », *Mathematica* 9 47-55.
- « Sur un théorème de M. Pompeiu », *Mathematica* 9 182-183.
- « Sur la séparation des racines d'une équation algébrique », *Revue de l'Enseignement Scientifique* (8) 100.
- *Sur une équation fonctionnelle de Cauchy*, *Revue de l'Enseignement Scientifique* (9) 65.
- « Sur l'iteration », Conférence à la Société des sciences et des Lettres de Pologne, *Wiadomosci Matematyczne*, Warszawa. 40 217-230. (En polonais)

## 1934

- « Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynômes », *Commentarii Mathematici*, 7 178-200.
- « Sur quelques limitations pour les modules des zéros des polynômes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 199 651-653.
- « Sur quelques nouvelles limitations des modules des zéros des polynômes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 199 760-762.
- « Le rôle des familles normales », Conférences à la Société mathématique suisse dans l'*Enseignement mathématique* 33 5-21.

## 1933

- « Sur les fonctions méromorphes limites de fractions rationnelles à termes entrelacés », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 50 171-196.
- *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes*, Recueillies et rédigées par F. Marty, Avec une note de H. Cartan, Collection Borel, Paris, Gauthier-Villars.
- « Sur le principe de correspondance et une démonstration de Fatou », *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Paris (2) 57 151-156.

- « Sur un théorème de M. Pompeiu », *Bulletin mathématique de la Société Roumaine des sciences* 35 179-181.
- « Sur un théorème de M. Tzitzeica », *Bulletin mathématique de la Société Roumaine des sciences* 35 183-184.
- « Sur les définitions du plan osculateur », *Rev. Enseignement Sc.* (7).
- « La Mathématique » dans la *Science française*, en collaboration avec P. Appell, Paris, Larousse.

## 1932

- « Sur une formule de Darboux », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 194 1205-1207.
- « Sur un théorème de Rouché », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 195 1214-1216.
- « Sur une classe de fonctions méromorphes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 195 643-645.
- « Sur les fonctions harmoniques qui admettent des valeurs exceptionnelles », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 194 40-41.
- « Sur une formule de Darboux et les polynômes d'interpolation », *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa* (2) 1 1-14.
- « Sur les séries de fractions rationnelles », *Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade* 1 157-169.
- « Sur les méthodes récentes pour l'étude des singularités des fonctions analytiques », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 56 219-232.
- « Sur les rapports entre l'algèbre et la théorie des fonctions », Conférences au Congrès de Turnu-Severin.
- « Sur l'itération et sur la géométrie finie », Conférences à l'Université de Clermont-Ferrand.
- « La naissance d'une doctrine mathématique », *Le Mois* (novembre 1932) 267.

## 1931

- « Sur la limite supérieure du module des racines d'une équation algébrique », *Societas Scientiarum ac Litteratum Varsoviensis* (3) 24 317-326.
- *Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes professées à l'Université de Cluj*, Recueillies et rédigées par P. Sergescu, Paris, Gauthier-Villars. (Publications du Séminaire mathématique de l'Université de Cluj).
- « Sur une limite supérieure du module des zéros des polynômes », *Comptes Rendus des Séances de la Société Mathématique de France* 38-39.
- « Sur la limite supérieure des modules des zéros des polynômes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 193 974-976.



- « Sur les couples de polynômes dont les zéros sont entrelacés », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 192 1014-1015.
- « Sur les fonctions de plusieurs variables linéairement dépendantes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 192 1694-1696.
- « Sur les fractions rationnelles à termes entrelacés », *Mathematica* 5 110-129.
- « Sur les solutions linéairement indépendantes des équations aux dérivées partielles », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (9) 10 415-438.
- « Sur les fonctions doublement convexes et les fonctions doublement sous-harmoniques », *Praktika de l'Académie d'Athènes* 6 374-385.
- « Sur les fonctions de variables réelles qui admettent un théorème d'addition algébrique », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 48 65-94.

## 1930

- « Sur le théorème de Rolle », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (2) 58 43-44.
- « Sur un système gauche de cinq droites », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (2) 58 21.
- « Sur les zéros des dérivées des fonctions analytiques », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 58 105-126.
- « Sur quelques conséquences du théorème de Rolle », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 191 511-513.
- « Sur les fonctions sous-harmoniques », *Mathematica* 3 29.
- « Sur des propriétés finies caractérisant des courbes et des surfaces », *Rev. Enseign. Sc.* (3) 200.
- « Sur l'étude des points singuliers », *Conférence au Congrès international des mathématiciens de l'U.R.S.S. à Kharkow* (1930).

## 1929

- « Sur une équation fonctionnelle », *Praktika de l'Académie d'Athènes* 4 384-386.
- « Sur les domaines formés par les points représentatifs des valeurs d'une fonction analytique », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 46 1-23.
- « Équivalence et identité », *Rev. Enseign. Sc.* (3) 38.

## 1928

- « Sur les familles de fonctions analytiques dont aucune fonction limite n'est constante », *Bulletin de la Société Scientifique de Chuj* 4 125-128.
- « Sur les fonctions continues d'une variable réelle qui admettent un théorème d'addition algébrique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 186 672-674.
- « Sur les fonctions convexes et les fonctions sous-harmoniques », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (9) 7 29-60.

- *Cours de mécanique rationnelle*, Tomes I et II, Professé à la faculté des sciences de Paris, Recueilli et rédigé par J. Renaud et A. Robba, 2<sup>e</sup> éd. (I : Théorie des vecteurs. Mécanique du point. Mécanique des systèmes).
- « Sur les récréations mathématiques », *Rev. Enseign. Sc.* (1) 236.
- *Éléments de la théorie mathématique de l'élasticité*, Paris, Librairie de l'Enseignement Technique.

## 1927

- *Cours de mécanique rationnelle*, Tomes I et II, Professé à la faculté des sciences de Paris, Recueilli et rédigé par J. Renaud et A. Robba, 2<sup>e</sup> éd. (II : Mécanique analytique. Mécanique des fluides. Potentiel), Paris, Librairie de l'Enseignement technique, (1927,1928).
- « Sur une équation fonctionnelle », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (2) 55 31-32.
- *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Recueillies et rédigées par J. Barbotte, Collection Borel, Paris, Gauthier-Villars.
- « Sur les fonctions sous-harmoniques et leurs rapports avec les fonctions convexes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 185 633-635.
- « Sur quelques fonctions convexes ou sous-harmoniques », *Bulletin de la Société Mathématique Roumaine des sciences* 30 62-66.

## 1926

- « Sur les modules des zéros des polynômes », *Bollettino U. M. I.* 5 182-185.
- « Sur le domaine correspondant aux valeurs d'une fonction analytique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 183 940-942.
- « Sur les domaines correspondants aux valeurs des fonctions analytiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 183 1081-1083.
- « Sur les séries de fonctions méromorphes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 183 1323-1324.
- « Sur les familles complexes et leurs applications », *Acta Mathematica* 49 115-161.
- « Sur certaines suites de fonctions holomorphes », *Bulletin de la Société Mathématique de France* (2) 54 19-20.
- « Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 50 205-217.

## 1925

- « Sur les suites de fonctions analytiques qui ont pour limite une constante », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 53 246-257.
- « Sur les involutions exceptionnelles des fonctions algébroides », *Mathesis* 39 Supplément 9-10.

- « Théorèmes récents sur les polynomes », *Comptes rendus de la Société Mathématique de France* 53 20.
- « Sur les fonctions multivalentes », *Comptes rendus de la Société Mathématique de France* 53 20.
- « Sur les séries de Taylor présentant des lacunes », *Comptes rendus de la Société Mathématique de France* 53 33.
- « Sur les involutions exceptionnelles des fonctions algébroides », *Comptes rendus de la Société Mathématique de France* 53 45.
- *Mécanique rationnelle*, Cours professé à la faculté des sciences de Paris, 3 éditions, Paris, Librairie de l'Enseignement Technique.

## 1924

- « Sur les involutions exceptionnelles des fonctions algébroides », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 179 803-805.
- « Sur les familles complexes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 179 660-662.
- « Sur quelques familles complexes particulières », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 179 1385-1387.
- « Sur les familles quasi-normales de fonctions analytiques », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 52 85-114.
- « Sur la géométrie finie et les travaux de M. Juel », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 48 109-128.
- *Statique et résistance des matériaux*, Paris, Gauthier-Villars.

## 1923

- « Sur les modules des zéros des polynomes », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 41 1-34.
- « Sur les relations algébriques de genre un ou zéro », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 176 1687-1689.
- « Sur la représentation conforme », Note insérée au tome III du Cours d'Analyse de M. Goursat, 1923.

## 1922

- « Sur les ombilics », *Nouvelles Annales de Mathématiques* (5) 1 21-23.
- « Sur les familles quasi-normales de fonctions holomorphes », *Mémoire de l'Académie royale de Belgique*, (2), 6, pp. 1-41. (Mémoire couronné).
- « Sur un théorème d'algèbre », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 174 850-852.
- « Sur un nouveau théorème d'algèbre », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 174 1220-1222.

- « Sur les familles quasi-normales », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 174 22-24.
- « Sur une extension d'un théorème de M. Landau », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 174 133-134.
- « Sur les familles quasi-normales de fonctions méromorphes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 175 516-519.
- « Sur les fonctions entières de genre fini », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 46 252-265.

## 1921

- *Éléments de Mécanique, Cours de mathématiques générales professé à la faculté des sciences de Paris en 1919-1920*, Paris, Librairie de l'Enseignement technique.

## 1920

- « Sur la composition des vitesses et celle des accélérations », *Rev. Enseign. des sciences* (14) 196.

## 1919

- « Sur les polynômes d'approximation et l'existence des dérivées », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 168 215-217.
- « Sur les polynômes d'approximation », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 46 151-192.
- « Sur une forme quadratique », *Comptes rendus de la Société Mathématique de France* 47 42.
- « Sur les fonctions linéairement distinctes », *Rev. Enseign. des sciences* (13) 180-190.
- « Sur la surface du triangle », *Rev. Enseign. des sciences* (13) 190-197.

## 1918

- « Un nouveau théorème sur la convergence des séries de fonctions analytiques », *Comptes rendus de la Société Mathématique de France* 46 25.

## 1917

- « Sur la représentation conforme », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 164. 879-881.
- « Sur la représentation conforme », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (7) 3 1-54.
- « Sur les limites de fonctions périodiques », *Rev. Enseign. des sciences* (11) 71-77.
- « Sur les suites récurrentes », *Rev. Enseign. des sciences* (11) 135-152.

## 1916

- « Sur les familles normales de fonctions analytiques », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 33 223-302.
- « Sur une définition qualitative des cercles osculateurs et des lignes de courbure », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 44 27.
- « Sur une définition qualitative des cercles osculateurs et des lignes de courbure », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 40 210-212.
- « Sur la règle de trois », *Rev. Enseign. des sciences* (10) 221.

### 1915

- « Sur les quadrilatères de *Poncelet* », *Nouvelles Annales de Mathématiques* (4) 15 57-64.
- « Sur une transformation géométrique », *Rev. Enseign. des sciences* (9) 12.

### 1914

- « Sur le flambage des pièces comprimées et le mouvement du pendule », *Comptes rendus de la Société Mathématique de France* 42 24.
- « Sur un problème de minimum », *Rev. Enseign. des sciences* (8) 157.

## D.2.2 Publications de Georges Valiron

Le recensement des publications de Georges Valiron entre 1914 et 1945 a été fait à partir de plusieurs ouvrages :

- le Répertoire bibliographique du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*,
- le *Zentralblatt*,
- la *Notice sur travaux de Georges Valiron*, VALIRON (1952).

Il est présenté par ordre anti-chronologique de 1945 à 1914.

### 1945

- « Les travaux d'Analyse publiés pendant l'occupation », *Comptes rendus du Congrès de l'Association Française pour l'avancement des sciences* 2 11-24.
- *Cours d'analyse mathématique : Équations fonctionnelles. Applications*, Paris, Masson.

### 1944

- « Remarques sur l'approximation des nombres réels et sur un théorème de M. Teissier du Cros », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 219 45-47.

### 1942

- *Cours d'analyse mathématique. I. Théorie des fonctions*, Paris, Masson.

### 1940

- « Sur le domaine couvert par les valeurs d'une fonction algébrique » *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 64 199-206.

- « Division en feuillets de la surface de Riemann définie par  $w = \frac{e^z - 1}{z} + h$  », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (9) 19 339-358.
- *Fonctions de variables réelles*, Paris, Tournier et Constans.
- « Commentaire sur les fonctions entières », in *Selecta Borel*, 1940, p. 121-124.

### 1939

- « Remarque sur les domaines complets d'univalence des fonctions entières » *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 63 132-138.
- « Sur les surfaces de Riemann définies par certaines fonctions entières » *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 208 711-713.
- « Remarques sur un théorème de M. Mandelbrojt » *Comptes rendus de la Société Mathématique de France* (1938) 26-28.

### 1938

- *Cours de mathématiques générales. Analyse mathématique. À l'usage des candidats au certificat de mathématiques générales et aux grandes écoles. D'après les cours professés à l'École centrale des arts et manufactures et à la Sorbonne. 5<sup>e</sup> édition entièrement refondue par G. Valiron. Tome II : Équations différentielles. Développements en séries. Nombres complexes. Intégrales multiples*, Paris, Gauthier-Villars.
- « Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre infini » *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 206 575-577.
- « Sur les directions de Borel des fonctions algébroides méromorphes d'ordre infini » *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 206 735-737.
- « Sur une équation fonctionnelle et certaines suites de facteurs » *Journal des mathématiques pures et appliquées* 17 405-425.
- « Remarques sur un théorème de M. Mandelbrojt » *Comptes rendus de la Société Mathématique de France* 26-28.
- *Directions de Borel des fonctions méromorphes*, Paris, Gauthier-Villars, *Mémoires des Sciences mathématiques*, fasc. 89.

### 1937

- « Sur les singularités des fonctions définies par les séries de Taylor », *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade* 6-7 283-289.
- « Sur les variations du module des fonctions entières ou méromorphes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 204 33-35.
- « Sur les courbes de module constant des fonctions entières », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 204 402-404.
- « Sur un critère de famille normale », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 205 890-892.

- *Cours de mathématiques générales. Analyse mathématique. À l'usage des candidats au certificat de mathématiques générales et aux grandes écoles. D'après les cours professés à l'École Centrale des Arts et Manufactures et à la Sorbonne, 5<sup>e</sup> édition entièrement refondue par G. Valiron. Tome I : Analyse des courbes, surfaces et fonctions usuelles. Intégrales simples*, Paris, Gauthier-Villars.
- « Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées », *Actualités scientifiques et industrielles* 570 1-53.

### 1936

- « Sur les domaines d'univalence des fonctions entières d'ordre nul », *Compositio mathematica* 3 129-135.
- « Sur les singularités de certaines fonctions holomorphes et de leurs inverses », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (9) 15 423-435.
- « Sur un problème élémentaire de probabilités arithmétiques », *Bulletin mathématique des Facultés des sciences et des Grandes Ecoles* 3 135-140.

### 1935

- « Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre nul », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 200 1008-1010.
- « Sur les systèmes de fonctions entières », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 200 520-523.
- « Sur le nombre des singularités transcendantes des fonctions inverses d'une classe d'algébroïdes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 200 713-715.
- « Sur une généralisation du théorème de Schottky », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 200 1825-1828.
- « Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre nul », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 59 298-320.
- « Remarques sur un critère de normalité de M. Minetti », *Rendiconti delle R. Accademia Nazionale dei Lincei* (6) 21 145-148.
- « Sur le minimum du module des fonctions entières d'ordre inférieur à un », *Mathematica* 11 264-269.
- « Les théorèmes de M. Bloch sur la cyclide de Dupin », *Bulletin mathématique des Facultés des sciences et des Grandes Ecoles* 1 293-303.

### 1934

- « Sur une classe de développements en série », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 58 22-40.
- « Sur les singularités des fonctions holomorphes dans un cercle », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 198 2065-2067.
- « Entire functions and Borel's directions », *Proceedings of the national Academy of Sciences* 20 211-215. (En anglais, USA).

- « Sur une classe de fonctions entières admettant deux directions de Borel d'ordre divergent », *Compositio Mathematica* 1 193-206.

### 1933

- « Généralisations de théorèmes de MM. Lindelöf et Phragmén », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 196 748-750.
- « Sur une classe de fonctions entières admettant deux directions de Borel d'ordre  $\rho$  divergent », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 196 1458-1460.
- « Croissance et zéros des fonctions entières définies par certaines séries d'exponentielles », *Tôhoku Journal of Mathematics* 38 358-374.
- « Méthodes de sommation et directions de Borel », *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa* (2) 2 355-380.
- « Remarques sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 57 71-86.

### 1932

- « Le théorème de Borel-Julia dans la théorie des fonctions méromorphes », *Verhandlungen Kongress Zürich* 1 270-279.
- « Sur les directions de Borel de certaines fonctions entières », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 194 1305-1308.
- « Sur les directions de Borel de certaines fonctions entières d'ordre infini », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 194 1552-1555.
- « Sur quelques conséquences d'un théorème de M. Ahlfors », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 194 1790-1792.
- « Fonctions convexes et fonctions entières », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 60 278-287.
- « Points de Picard et points de Borel des fonctions méromorphes dans un cercle », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 56 10-32.
- « Sur la dérivée angulaire dans la représentation conforme », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 56 208-211.

### 1931

- « Sur les directions de Borel des fonctions entières », *Annali di Matematica* (4) 9 273-285.
- « Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre fini », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (9) 10 457-480.
- « Sur une propriété générale des fonctions méromorphes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 192 269-271.
- « Remarques sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 192 476-478.



- « Sur la dérivée des fonctions algébroides », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 59 17-39.
- « Remarques sur certaines fonctions convexes », *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan* (3) 13 19-38.
- « Sur l'itération des fonctions holomorphes dans un demi-plan », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 55 105-128.

## 1930

- « Sur le théorème de Bloch », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 54 76-82.
- « Sur quelques propriétés des fonctions holomorphes et des fonctions entières », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 54 67-75.
- « Sur les familles normales de fonctions analytiques », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*(3) 47 79-92.
- « Sur les fonctions entières définies par une classe de séries de Dirichlet », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 190 617-619.
- « Sur une classe d'équations fonctionnelles », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 190 1111-1113.
- « Sur la dérivée des fonctions algébroides et sur une classe d'équations fonctionnelles », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 190 1223-1225.
- « Sur le domaine couvert par les valeurs d'une fonction algébroïde finie », *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan* (3) 12 64-70.
- « Sur le domaine riemannien couvert par les valeurs d'une fonction holomorphe », *Mathematica* 4 81-108.
- « Sur un théorème de M. Wiman » in *Opuscula mathematica A. Wiman dedicata*, Upsala, 1930, p.1-12.

## 1929

- « Sur les polynomes-sections des fonctions entières », *Tôhoku Journal of Mathematics* 32 144-151.
- Valiron, G. et Collingwood, E. F., « A theorem concerning integral functions of order less than unity », *Journal of the London mathematical Society* 4 210-213. (En anglais).
- Landau, E. et Valiron, G., « A deduction from Schwarz's lemma », *Journal of the London mathematical Society* 4 162-163. (En anglais).
- « Sur le théorème de M. Picard », *l'Enseignement mathématique* 28 55-59.
- « Sur les fonctions algébroides méromorphes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 189 729-731.
- « Sur les fonctions algébroides méromorphes du second degré », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 189 623-625.

- « Sur quelques propriétés des fonctions algébroides », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 189 824-826.
- « M. Young », *Revue internationale de l'Enseignement*, 83 180-182.
- « M. de la Vallée-Poussin », *Revue internationale de l'Enseignement* 83 371-374.
- *Familles normales et quasi-normales de fonctions méromorphes*, Paris, Gauthier-Villars, Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. 38.
- « Sur un théorème de M. Julia étendant le lemme de Schwarz », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 53 70-76.
- « Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constants », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 46 25-53.
- « Sur la croissance des fonctions entières », *Comptes-rendus du Congrès de l'Association Française pour l'avancement des sciences* 53 110-113.

## 1928

- *Familles normales et quasi normales de fonctions méromorphes*, Mémorial des sciences mathématiques, Paris, Gauthier-Villars, fasc. 38.
- « Remarques sur le principe de la symétrie de Schwarz », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 52 289-292.
- « Le théorème de M. Picard et le complément de M. Julia », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (9) 7 113-136.
- « Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes », *Acta Mathematica* 52 67-92.
- « Sur les valeurs d'une fonction méromorphe dans le voisinage d'une singularité », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 187 803-805.
- « Un théorème général sur les fonctions méromorphes d'ordre positif », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 186 26-28.
- « Sur quelques propriétés des fonctions méromorphes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 186 935-936.
- « Sur les cercles de remplissage des fonctions méromorphes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 186 1189-1191.
- « Sur une généralisation d'un théorème de M. Landau », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 186 1815-1817.
- « Sur la convergence des suites de fonctions quasi-analytiques », *l'Enseignement Mathématique* 27 71-76.
- « Sur l'uniformisation des courbes de genre zéro ou un », *Comptes-rendus du Congrès de l'Association Française pour l'avancement des sciences* 52 56-58.

- « Sur quelques propriétés des fonctions analytiques dans le voisinage de leurs singularités » *Comptes-rendus du Congrès International des Mathématiciens de Bologne* 3 261-267 (*Atti Congresso Bologna*, 3, parus en 1930).

## 1927

- « Sur les courbes continues qui admettent une tangente en chaque point », *Nouvelles Annales de Mathématiques* (6) 2 46-51.
- Collingwood, E. F. et Valiron, G., « Theorems concerning an analytic function which is bounded upon a simple curve passing through an isolated essential singularity », *Proceedings of the London Mathematical Society* (2) 26 169-184. (En anglais)
- « Sur les coefficients des séries de Taylor usuelles », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 185 831-833.
- « Sur quelques propriétés des fonctions entières », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 185 1439-1441.
- « Compléments au théorème de Picard-Julia », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 51 167-183.
- « Sur un théorème de MM. Koebe et Landau », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 51 34-42.
- « Sur les fonctions méromorphes qui admettent des valeurs quasi-exceptionnelles », *Association Française*, Lyon, 1926 (1927) 82-85.
- « Calcul des trajectoires d'après les méthodes anglaises de Portsmouth », *Mémorial de l'Artillerie française*, 7 487-527.
- Valiron G. et Dodier, « Calcul des trajectoires d'après les méthodes américaines », *Mémorial de l'Artillerie française*, 7 425-471.
- *Notice sur les travaux scientifiques de G. Valiron*, Toulouse.

## 1926

- « Sur un point du programme de la classe de mathématiques », *Nouvelles Annales de Mathématiques* (6) 1 290-292.
- « Sur un théorème de M. P. Lévy », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 182 202-204.
- « Sur les fonctions méromorphes sans valeurs asymptotiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 182 1266-1268.
- « Sur les théorèmes de MM. Bloch, Landau, Montel et Schottky », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 183 728-730.
- « Sur les valeurs des fonctions holomorphes dans un cercle », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 183 1256-1258.
- *Théorie générale des séries de Dirichlet*, Paris, Gauthier-Villars, Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. 17.

- « Sur les solutions d'une équation différentielle fonctionnelle », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 54 53-68.
- « Sur les surfaces qui admettent un plan tangent en chaque point », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 54 190-198.
- « Remarques sur la convergence des suites de fonctions holomorphes », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 50 200-205.
- « Sur une propriété des fonctions méromorphes d'ordre positif », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 50 168-174.
- « Sur les fonctions méromorphes qui admettent des valeurs quasi-exceptionnelles », *Comptes rendus des Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences*, Lyon 82-85.

## 1925

- *Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable*, Paris, Gauthier-Villars, Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 2.
- « Sur les fonctions entières d'ordre nul et les équations différentielles », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 53 34-42.
- « Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes », *Acta Mathematica* 47 117-142.
- « Sur une fonction entière d'ordre nul qui est solution d'une équation différentielle algébrique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 180 571-572.
- « Sur les fonctions méromorphes qui sont exceptionnelles relativement au théorème de M. Julia », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 180 1895-1896.
- « Sur une classe de développements en série », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 181 763-765.
- « Sur la formule d'interpolation de Lagrange », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 49 181-192 et pp. 203-224.
- « Remarque sur un théorème de M. Julia », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 49 68-73.
- « Supplément à la note « Remarque sur un théorème de M. Julia » », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 49 270-275.
- « Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions méromorphes », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 49 415-421.
- « Sur la valeur des séries de Dirichlet dans le voisinage de l'abscisse de convergence », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 49 292-298.
- « Sur une classe de fonctions entières », *Nouvelles Annales de Mathématiques* (5) 3 361-365.
- « Sur la décomposition en facteurs de  $\sin \pi z$  et de  $\Gamma(z)$  », *Nouvelles Annales de Mathématiques* (5) 3 241-245.

**1924**

- « Compléments aux théorèmes de Picard-Borel », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 179 740-743.
- « Sur les solutions de l'équation fonctionnelle d'Abel », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 48 260-265.
- « A propos d'un mémoire de M. Pólya », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 48 9-12.
- « Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 52 166-174.

**1923**

- « Sur les fonctions entières vérifiant une classe d'équations différentielles », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 51 33-45.
- « Remarque sur un théorème de M. Carleman », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 176 943-944.
- « Sur un théorème de M. Hadamard », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 47 177-192.
- « Sur les fonctions analytiques d'une variable réelle », *Nouvelles Annales de Mathématiques* (5) 1 321-329.
- « Sur un problème particulier de variations », *Nouvelles Annales de Mathématiques* (5) 1 196-200.
- *Lectures on the general Theory of integral functions, übers. v. E. F. Collingwood, mit einem Vorwort von W. H. Young*, Cambridge, Deighton, Bell and Co. (En anglais).

**1922**

- « Sur les fonctions entières », *l'Enseignement Mathématique* 22 61-62.
- « Recherches sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions entières », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 39 317-341.
- « Sur un théorème de M. Fatou », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 46 200-208.
- « Le théorème de Laguerre-Borel dans la théorie des fonctions entières », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 46 432-445.
- « Sur la méthode d'approximation d'Hermite », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 174 1530-1533.
- « Sur les fonctions entières d'ordre entier », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 174 1054-1056.
- « Remarques sur le problème de l'ogive de moindre résistance », *Mémorial de l'Artillerie française*, 1 283-298.

**1921**

- « Sur les zéros des fonctions entières d'ordre infini », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 172 741-744.
- « Sur les fonctions entières d'ordre fini », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 172 1226-1227.
- « Sur les fonctions entières et leurs fonctions inverses », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 173 1059-1061.
- « Le théorème de Picard-Borel dans la théorie des fonctions entières », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 173 573-576.
- « Recherches sur le théorème de M. Picard », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 38 389-429.
- « Sur les fonctions entières d'ordre fini », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 45 258-270.
- « Note sur les progrès de la théorie des fonctions entières depuis 1900 », deuxième édition des *Leçons sur les fonctions entières de M. Borel* 124-160.

## 1920

- « Sur le maximum et le minimum des fonctions de deux variables », *Nouvelles Annales de Mathématiques* (4) 20 149-161.
- « Remarques sur le théorème de M. Picard », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 44 91-104.
- « Les fonctions entières de deux variables et les ensembles de mesure nulle », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 44 112-125.
- « Sur les zéros des fonctions entières d'ordre entier », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 44 250-260.
- « Les théorèmes généraux de M. Borel dans la théorie des fonctions entières », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 37 219-253.
- « Le théorème de M. Picard et les généralisations de M. Borel », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 170 167-169.
- « Sur la théorie des fonctions entières », *Comptes rendus du Congrès International des Mathématiciens*, 1920, Strasbourg, 323-328.

## 1919

- « Sur les zéros des fonctions entières d'ordre fini », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 43 255-268.
- « Sur les ensembles réguliers de mesure nulle », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 169 1078-1081.

## 1918

- « Sur le maximum du module des fonctions entières », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 166 605-608.

- « Démonstration de l'existence pour les fonctions entières de chemins de détermination infinie », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 166 382-384.
- « Les propriétés générales des fonctions entières et le théorème de M. Picard », 167 988-991.

## 1917

- « Sur les chemins de détermination des fonctions entières », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 45 153-161.
- « Remarques sur la sommation des séries divergentes par les méthodes de M. Borel », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 42 267-284.

## 1916

- « Sur la croissance du module maximum des séries entières », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 44 45-64.
- « Sur l'interpolation des fonctions entières », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 44 103-119.

## 1914

- *Sur les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul et en particulier les fonctions à correspondance régulière*, Thèse, Paris, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, (3) 5 117-257.
- « Sur quelques théorèmes de M. Borel », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 42 247-252.
- « Sur le calcul approché de certaines fonctions entières », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 42 252-264.

### D.2.3 Publications d'Arnaud Denjoy

Le recensement des publications d'Arnaud Denjoy entre 1914 et 1945 a été fait à partir de plusieurs ouvrages :

- le Répertoire bibliographique du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*,
- le *Zentralblatt*,
- les notices sur travaux d'Arnaud Denjoy, DENJOY (1934), DENJOY (1942),
- *Arnaud Denjoy, évocation de l'homme et de l'oeuvre*, SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE (1975).

Il est présenté par ordre anti-chronologique de 1945 à 1914.

## 1945

- « Sur les ensembles cartésiens », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 221 679-682.
- « La mesure euclidienne », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 221 477-480.

- « Figuration des nombres transfinis de la classe II », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 221 429-432.

## 1944

- « Sur la représentation conforme », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 219 11-14.
- « Sur la représentation conforme des aires planes », *Mathematica* 20 73-89.

## 1943

- « Les permutations spéciales de la suite normale des entiers positifs », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 217 121-124.

## 1942

- « Les continus cycliques et la représentation conforme », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 70 97-124.

## 1941

- « Sur les nombres transfinis », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 213 430-433.
- « Représentation conjointe de l'ordination et de l'énumération d'un ensemble dénombrable, par un nombre ou par une figure plane », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 212 885-888.
- « Représentation conforme des aires limitées par des continus cycliques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 213 975-977.
- « Sur la représentation conforme », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 212 1071-1074
- « Sur la représentation conforme », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 213 15-17.
- « Les continus frontières d'une région et la représentation conforme », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 213 115-117.
- *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique*, « I : La différentiation seconde mixte et son application aux séries trigonométriques. II : Métrique et topologie d'ensembles parfaits et de fonctions. III : Détermination d'une fonction continue par ses nombres dérivés seconds généralisés extrêmes finis », Paris, Gauthier-Villars, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, publiée sous la direction de É. Borel.

## 1940

- « Totalisation simple des fonctions ramenée à celle des séries », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 210 73-76.
- « Exemples de séries trigonométriques non sommables », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 210 94-97.



- « La convergence en moyenne absolue des séries trigonométriques », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 64 147-153.
- « Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (9) 19 45-49.

### 1939

- « Totalisation des séries », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 209 825-828.
- « Sur certaines séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure essentielle », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 209 373-374.
- « Topological and metrical points of view in the theory of sets and functions of real variables », *Duke mathematical Journal* 5 806-813.

### 1938

- « Sur une fonction réelle de Minkowski », *Journal des mathématiques pures et appliquées* 17 105-151, 210-213 et 316-318.
- « Sur le prolongement analytique de Weierstrass », *Mathematica* 14 7-14.
- « Étude sur la détermination des singularités de la fonction analytique définie par une série de Taylor », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 55 257-336.
- « Sur les singularités d'une fonction analytique définie par un élément », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 206 737-740.
- « Sur les singularités des fonctions analytiques des fonctions définies par un élément », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 206 1073-1076.
- « Sur la convergence des séries trigonométriques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 207, p. 210.
- « Sur la convergence des séries trigonométriques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 207, p. 316.

### 1937

- « Aspects actuels de la pensée mathématique, Conférence inaugurale de la Réunion internationale des Mathématiciens, 7 juillet 1937 », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* 1-12.
- « Introduction à la théorie des fonctions de variables réelles. I : Aperçu historique. Géométrie des ensembles cartésiens. Fonctions. Continuité et convergence. Dérivation », *Actualités scientifiques et industrielles*, 451.
- « Introduction à la théorie des fonctions de variables réelles. II : Intégration. Séries trigonométriques. Fonctions quasi-analytiques. Fonctionnelles et fonctions d'ensemble », *Actualités scientifiques et industrielles*, 452.
- « Sur l'approximation de certaines sommes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 204, p. 1396.

- « Sur un théorème de M. Mandelbrojt », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 204 1611-1613.
- « Sur les singularités de la fonction analytique définie par un élément de Weierstrass », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 205 453-455.
- « La part de l'empirisme dans la logique mathématique », *Actualités scientifiques et industrielles* 535 111-120.

## 1936

- « Sur les fractions continues », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 202 371-374.
- « Sur une formule de Gauss », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 202 537-540.
- « Sur les groupes homographiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 202 905-908.
- « Physique et métrique des ensembles. À propos d'une note de M. Paul Lévy », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 202 1140-1142.
- « Sur les extensions de continu », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 203 1220-1222.
- « Le facteur primaire de Weierstrass », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (9) 15 285-292.
- « Sur une propriété des groupes homographiques », *Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris* (2) 60 302-308.
- « L'objet et le sens des extensions de la notion d'intégrale depuis Lebesgue » dans *Travaux du Premier Congrès des mathématiciens de l'U.R.S.S.*, Kharkow, 1930, publié en 1936 132-143.

## 1935

- « Sur l'intégration des différentielles totales », *Mathematica* 10 117-124.
- « Sur l'intégration des coefficients différentiels d'ordre supérieur », *Fundamenta Mathematica* 25 273-326.
- « Sur les groupes de substitutions homographiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 201 468-470.
- « Sur la géométrie des groupes homographiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 201 497-499.
- « Sur les fonctions minkowskiennes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 201 584-586.

## 1934

- « Sur une fonction de Minkowski », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 198 44-47.

- « Sur l'intégration des différentielles totales », *Bulletin de la Société des Sciences de Cluj* 7 580-587.
- *Notice sur les travaux scientifiques de l'auteur*, Hermann, Paris.
- « Paul Painlevé », *Annales de l'Université de Paris* 1-22.

### 1933

- « Sur l'intégration des différentielles totales et la métrique des courbes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 196 838-841.
- « Sur l'intégration le long des ensembles fermés rectifiables », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 197 1576-1579.
- « Sur les variables pondérées multipliables de M. Cantelli », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 196 1712-1714.
- « Sur les polygones d'approximation d'une courbe rectifiable », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 196 29-32.
- « Sur les continus cycliques plans », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 197, 570-572.
- « Sur l'intégration le long des continus cycliques rectifiables », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 197 1087-1089.
- « Sur les courbes rectifiables », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 196 1358-1360.
- « Sur le calcul des coefficients des séries trigonométriques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 196 237-239.
- « Sur une extension de la formule de Jensen », *Mathematica* 7 129-135.
- « L'additivité métrique vectorielle des ensembles et les discontinuités tangentielles sur les courbes rectifiables », *Bulletin mathématique de la Société Roumaine des Sciences* 35 83-105.
- Wolff, J. et Denjoy, A., « Sur la division d'une sphère en trois ensembles », *l'Enseignement Mathématique* 32 66-68.

### 1932

- « Sur quelques points de la théorie des fonctions », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 194 44-46.
- « Sur la continuité des fonctions analytiques singulières », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 194 1428-1430.
- « Sur les caractéristiques à la surface du tore », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 194 830-833.
- « Sur les caractéristiques du tore », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 194 2014-2016.
- « Sur les caractéristiques du tore », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 195 934-936.

- « Sur la continuité des fonctions analytiques singulières », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 60 27-105.
- « Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore », *Journal des mathématiques pures et appliquées* (9) 11 333-375.

### 1931

- « Sur les ensembles ordonnés », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 192 1011-1014.
- « L'hypothèse de Riemann sur la distribution des zéros de  $\zeta(s)$ , reliée à la théorie des probabilités », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 192 656-658.
- « Sur la définition riemannienne de l'intégrale de Lebesgue », *Comptes rendus de l'Académie des sciences C. R.* 193 695-698
- « Sur un théorème de Wiman », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 193 828-830.

### 1930

- « Sur une classe de fonctions analytiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 190 960-965.

### 1929

- « Sur une classe de fonctions analytiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 188 140-142.
- « Sur une classe de fonctions analytiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 188 1084-1086.

### 1928

- « Sur les séries de fractions rationnelles », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 186 1191-1194.

### 1926

- « Sur les singularités des séries de fractions rationnelles », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 50.
- « Sur l'itération des fonctions analytiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 182 255-257.

### 1925

- « Sur les séries de fractions rationnelles », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 179 867-870.
- « Sur les singularités des séries de fractions rationnelles », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 179 958-960.

### 1924

- « Sur les séries de fractions rationnelles », *Bulletin de la Société Mathématique de France* 52 418-484.

- »Sur les séries de fractions rationnelles », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 179 867-870.
- « Sur les singularités des séries de fractions rationnelles », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 179 958-960.

## 1922

- « Sur les fonctions définies par des séries de fractions rationnelles », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 174, 95-98.

## 1921

- « Sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 173 1329-1331.
- « Sur un mode d'intégration progressif et les caractères d'intégrabilité correspondants », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 173 127-129.
- « Caractères de certaines fonctions intégrables et opérations correspondantes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 172 903-906.
- « Calcul des coefficients d'une série trigonométrique convergente quelconque dont la somme est donnée », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 172 1218-1221.
- « Sur la détermination des fonctions présentant un certain caractère complexe de résolubilité », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 172 833-835.
- « Sur un calcul de totalisation à deux degrés », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 172 653-655.
- *Calcul des coefficients de la série trigonométrique convergente la plus générale dont la somme est une fonction donnée*, Paris, Gauthier-Villars.
- *Notice sur les travaux scientifiques*, Privat, Toulouse ; (en dépôt chez Hermann, Paris).
- « Recherches récentes sur les séries trigonométriques », *Verslagen van de Koninklijke Akademie von Wetenschappen*, Amsterdam (30) 4 et 5.

## 1920

- « Sur une classe d'ensembles parfaits discontinus en relation avec les fonctions admettant une dérivée seconde généralisée », *Comptes rendus du congrès international des mathématiques* 1920 189-198.
- « Sur une classe d'ensembles parfaits discontinus », *Rendiconti delle R. Accademia Nazionale dei Lincei* (2) 29 291-294.
- « Sur les ensembles parfaits présentant le caractère (A) », *Rendiconti delle R. Accademia Nazionale dei Lincei* (2) 29 316-318.
- « Les rapports des ensembles parfaits présentant le caractère (A) et des fonctions admettant une dérivée seconde généralisée », *Rendiconti delle R. Accademia Nazionale dei Lincei* (2) 29 350-353.

- « Sur les ensembles clairsemés », *Verslagen van de Koninklijke Akademie von Wetenschappen*, Amsterdam 28 1100-1108.
- « Sur une classe de fonctions admettant une dérivée seconde généralisée », *Verslagen van de Koninklijke Akademie von Wetenschappen*, Amsterdam 29 331-340.
- « Sur une propriété de séries trigonométriques », *Verslagen van de Koninklijke Akademie von Wetenschappen*, Amsterdam 29 628-639.
- « Un savant français : Henri Poincaré », *Revue philosophique*.

## 1919

- « L'orientation actuelle des mathématiques », *La Revue du Mois* 20 18-28.
- « Sur l'intégration riemannienne », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 169 219-221.
- « Sur une propriété des fonctions de variable complexe », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 168 387-389.
- « Sur la vraie valeur des intégrales définies », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 168 848-851.

## 1918

- « Sur la dérivation et son calcul inverse », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 167 377-380.
- « Sur une propriété générale des fonctions analytiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 166 31-33.
- « Sur les courbes de *M. Jordan* », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 166 207-209.
- « Démonstration de la propriété fondamentale des courbes de *M. Jordan* », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 167 389-391.
- « Nouvelle démonstration du théorème de Jordan sur les courbes planes », *Verslagen van de Koninklijke Akademie von Wetenschappen*, Amsterdam 27 146-151.

## 1917

- « Mémoire sur la totalisation des nombres dérivées non sommables », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 34 181-236.
- « Sur une propriété des fonctions de variable complexe », *Verslagen van de Koninklijke Akademie von Wetenschappen*, Amsterdam 26 1063-1068.

## 1916

- « Mémoire sur la totalisation des nombres dérivées non sommables », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 33, 127-222.
- « Sur certaines classes de fonctions de variables réelles », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 162 868-870.
- « Sur la dérivation et son calcul inverse », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 162 377.

- « Sur les propriétés des fonctions dérivées », *l'Enseignement mathématique* 18 320-328.

## 1915

- « Les quatre cas fondamentaux des nombres dérivés », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 161 124-127.
- « Sur la théorie descriptive des nombres dérivés d'une fonction continue », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 160 707-709.
- « Sur les nombres dérivés », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 160 753-756.
- « Sur les fonctions dérivées sommables » ; *Bulletin de la Société Mathématique de France* 43 161-248.
- « Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues », *Journal des mathématiques pures et appliquées* 7 105-240.

## 1914

- « Sur une propriété des fonctions à nombres dérivés finis », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 158 99-101.
- « Exemples de fonctions dérivées », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 158 1003-1006.

## Annexe E

### Articles de calcul des probabilités dans le journal *Les Annales de l'Institut Henri Poincaré* de 1930 à 1945

- Pólya, G., 1930, « Sur quelques points de la théorie des probabilités », vol.1 (2), p. 117-161.
- Lévy, Paul, 1930, « Le Théorème fondamental de la théorie des erreurs », vol.1 (2), p. 163-175.
- Hostinský, B., 1932, « Application du Calcul des Probabilités à la Théorie du mouvement Brownien », vol.3 (1), p. 1-74.
- Mises, Richard von, 1932, « Théorie des probabilités. Fondements et applications », vol.3 (2), p. 137-190.
- Darmois, G., 1932, « La méthode statistique dans les sciences d'observation », vol.3 (2), p. 191-228.
- Guldberg, Alf, 1933, « Les fonctions de fréquence discontinues et les séries statistiques », vol.3 (3), p. 229-278.
- Steffensen, J.F., 1933, « Deux problèmes du Calcul des Probabilités », vol.3 (3), p. 319-344.
- Mises, R. v., 1933, « Théorie des Probabilités. Fondements et applications », vol.3 (3), p. 345-345.
- Castelnuovo, G., 1933, « Sur quelques problèmes se rattachant au Calcul des Probabilités », vol.3 (4), p. 465-490.
- Steffensen, G.F., 1933, « Deux problèmes du Calcul des Probabilités », vol.3 (4), p. 513-513.
- Cantelli, F.P., 1935, « Considérations sur la convergence dans le Calcul des probabilités », vol.5 (1), p. 3-50.



- Cantelli, F.P., 1935, « Considérations sur la convergence dans le Calcul des probabilités », vol.5 (1), p. 263-264.
- Gumbel, E.J., 1935, « Les valeurs extrêmes des distributions statistiques », vol.5 (2), p. 115-158.
- Guldberg, Alf, 1935, « Sur les lois de probabilités et la corrélation », vol.5 (2), p. 159-176.
- Lévy, Paul, 1936, « Sur quelques points de la théorie des probabilités dénombrables », vol.6 (2), p. 153-184.
- Misés, R. de, 1936, « Les lois de probabilité pour les fonctions statistiques », vol. 6 (3-4), p. 185-212.
- de Finetti, Bruno, 1937, « La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives », vol.7 (1), p. 1-68.
- Hostinský, B., 1937, « Sur les probabilités relatives aux variables aléatoires liées entre elles. Applications diverses », vol.7 (2), p. 69-119.
- Reichenbach, Hans, 1937, « Les fondements logiques du calcul des probabilités », vol.7 (5), p. 267-348.
- Ullmo, Jean, 1938, « Recherches sur l'équilibre économique », vol.8 (1), p. 1-62.
- Tricomi, F., 1938, « Les transformations de Fourier, Laplace, Gauss, et leurs applications au calcul des probabilités et à la statistique », vol.8 (3), p. 111-149.

## Annexe F

# Mathématiciens chargés du Cours Peccot au Collège de France pendant l'entre-deux-guerres

Cette liste a été établie à partir de l'*Annuaire du Collège de France* pour toutes les années entre 1914 et 1945.

Année scolaire	Chargé(s) de cours	Thème du cours
1914 - 1915	René Garnier	Systèmes différentiels dont les intégrales ont leur point critique fixe
1915 - 1916	Pas de cours	
1916 - 1917	Pas de cours	
1917 - 1918	Gaston Julia	Théorie des nombres
1918 - 1919	Georges Giraud	Sur les fonctions automorphes d'un nombre quelconque de variables
	Paul Lévy	Sur les fonctions de lignes et les équations aux dérivées fonctionnelles
1919 - 1920	Léon Brillouin	Théorie des solides et des liquides, en liaison avec la théorie du corps noir
	Gaston Julia	Étude des points singuliers essentiels isolés des fonctions uniformes
1920 - 1921	Maurice Janet	Théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles
1921 - 1922	R. Thiry	Dynamique des fluides
1922 - 1923	Carleman	Fonctions quasi-analytiques
Suite page suivante ...		

Année scolaire	Chargé(s) de cours	Thème du cours
1923 - 1924	Robert Deltheil	Probabilités
1924 - 1925	René Lagrange	Étude géométrique des Systèmes de points dans un plan. Application à la théorie des courbes gauches algébriques.
1925 - 1926	Marcel Légaut	
1926 - 1927	Milloux	
1927 - 1928	Kampé de Fériet	
	M. Rocard	
1928 - 1929	Szolem Mandelbrojt	Quelques recherches modernes dans la théorie des fonctions analytiques
1929 - 1930	Jean Favard	
1930 - 1931	Wladimir Bernstein	Distribution des singularités des séries de Dirichlet
1931 - 1932	Delsarte	Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert
1932 - 1933	Henri Cartan	
	André Weil	
1933 - 1934	Jean Dieudonné	Recherches modernes sur les zéros des polynômes
	P. Dubreuil	Quelques propriétés générales des variétés algébriques
1934 - 1935	Jean Leray	Équations fonctionnelles
	René de Possel	Sur certaines théories de la mesure et de l'intégrale
1935 - 1936	Marie Dubreil Jacotin	Les ondes de type permanent à deux dimensions dans les fluides incompressibles
1936 - 1937	Georges Bourion	Séries de Taylor à structure lacunaire
	Jean-L. Destouches	Mécanique des systèmes ; théorie ondulatoire relativiste
1937 - 1938	Jacques Solomon	Problèmes récents de la théorie des quanta : neutrons, neutrinos et photons
	Claude Chevalley	Théorie des corps et systèmes hypercomplexes
Suite page suivante ...		

Année scolaire	Chargé(s) de cours	Thème du cours
1938 - 1939	Frédéric Marty	La théorie des hypergroupes et ses applications récentes
1939 - 1940	Frédéric Roger	Cours faits ultérieurement
	Charles Pisot	
1940 - 1941	Claude Chabauty	Équations diophantiennes
1941 - 1942	Daniel Dugué	Étude de quelques équations d'ondes corpusculaires
	Gérard Pétiau	
1942 - 1943	Jean Ville	
	Mlle M. A. Tonnelat	
1943 - 1944	Hubert Delange	
	Jacques Dufresnoy	
1944 - 1945	André Lichnerowicz	Sur l'intégration des équations d'Einstein

TABLE F.1 – Liste des chargés du cours Peccot au Collège de France entre 1914 et 1945.



# Bibliographie

- ABIR-AM Pnina G. (ed.), 1998, *La mise en mémoire de la science. Pour une ethnographie historique des rites commémoratifs*. Amsterdam : Éditions des archives contemporaines.
- ACADÉMIE DES SCIENCES, 1972, « Remise de l'épée d'Académicien à André Blanc-Lapierre ».
- ADAD Henri, 1935, *Recherches sur les surfaces plusieurs fois cerclées*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- AHLFORS Lars, 1932a, « Quelques propriétés des surfaces de Riemann relatives aux fonctions méromorphes ». *Bulletin de la Société Mathématique de France*, (60), p. 197–207.
- AHLFORS Lars, 1932b, « Sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes ». *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, (194), p. 1145–1147.
- AHLFORS Lars, 1932c, « Sur une généralisation du théorème de Picard ». *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, (194), p. 245–247.
- AHLFORS Lars, 1933, « Sur les domaines dans lesquels une fonction méromorphe prend des valeurs appartenant à une région donnée ». *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*.
- AHLFORS Lars, 1935, « Zur Theorie der Überlagerungsflächen ». *Acta Mathematica*, vol. 1 (65), p. 157–194.
- AKIVIS Maks Ajzиковich et ROSENFELD Boris Abramovich, 1993, *Élie Cartan (1869-1951), Translations of Mathematical Monographs*, vol. 123. Providence RI : American Mathematical Society.
- ALDRICH John, 2007, « The Mathematics PhD in the United Kingdom ». [http ://www.economics.soton.ac.uk/staff/aldrich/PhD.htm](http://www.economics.soton.ac.uk/staff/aldrich/PhD.htm). University of Southampton, Southampton, UK.

- ALEXANDER Daniel S., 1994, *A History of Complex Dynamics From Schröder to Fatou and Julia*. Aspects of Mathematics, Braunschweig/Wiesbaden : Friedr. Vieweg.
- ANDLER Martin, 1994, « Les mathématiques à l'Ecole normale supérieure au XXème siècle : une esquisse ». Dans SIRINELLI Jean-François (ed.), *Ecole Normale Supérieure Le livre du bicentenaire*, Presses universitaires de France, p. 351–405.
- ANGELESCO A., 1916, *Sur les polynômes généralisant les polynômes de Legendre et d'Hermite et sur le calcul approché des intégrales multiples*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- APPELL P. et KAMPÉ DE FÉRIET J., 1926, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite*. Paris.
- APPELL Paul, 1915, « Sur l'inversion approchée de certaines intégrales réelles et sur l'extension de l'équation de Képler et des fonctions de Bessel ». *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, (160), p. 419–423.
- APPELL Paul, 1925, « Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, les polynômes d'Hermite et autres fonctions sphériques dans l'hyperespace ». Dans VILLAT Henri (ed.), *Mémorial des sciences mathématiques*, Fascicule III, Paris : Gauthier-Villars.
- APPERT Antoine, 1934a, *Propriétés des espaces abstraits*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- APPERT Antoine, 1934b, *Propriétés des espaces abstraits les plus généraux. Compacité, séparabilité, transformations et fonctionnelles*. Actualités scientifiques et industrielles, Paris : Hermann.
- APPERT Antoine, 1934c, *Propriétés des espaces abstraits les plus généraux. Ensembles ouverts, fermés, denses en soi, clairsemés. Connexion*. Actualités scientifiques et industrielles, Paris : Hermann.
- ARBOLEDA Luis Carlos, 1981, « Rapport sur l'inventaire et l'analyse des papiers du Fonds-Fréchet dans les archives de l'Académie des Sciences de Paris ». *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, vol. 2, p. 9–17.
- ARMATTE Michel, 2001, « Maurice Fréchet statisticien, enquêteur et agitateur public ». *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 7, p. 7–65.
- ARMATTE Michel, à paraître, « Les Probabilités et les Statistiques dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées* : promesses et déceptions ». Dans

- GISPERT Hélène et GOLDSTEIN Catherine (eds), *L'Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*.
- ARONSZAJN Nachman, 19, *Sur les décompositions de fonctions analytiques uniformes et sur leurs applications*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- ATTEN Michel, DU CASTEL François et PIERRE Marie (eds), 1999, *Les « Télécoms » : histoire des écoles supérieures des télécommunications (1840-1997)*. Paris : Hachette.
- AUDIN Michèle, 2007, « Une histoire de Jacques Feldbau ». <http://www.irma.u-strasbourg.fr/~maudin>.
- AUDIN Michèle, septembre 2004, « Topologie, revêtements et groupe fondamental, cours de Magistère 2e année ». <Http://www-irma.u-strasbg.fr/maudin/courstopalg.pdf>.
- AUDOIN-ROUZEAU Stéphane et BECKER Jean-Jacques (eds), 2004, *Encyclopédie de la Grande Guerre 1914-1918. Guerre et culture*. Paris : Bayard.
- AZYK Gorny, 1939, *Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- BARBUT Marc, LOCKER Bernard et MAZLIAK Laurent (eds), 2004, *Paul Lévy, Maurice Fréchet : 50 ans de correspondance mathématique*. Collection Histoire de la pensée, Paris : Hermann.
- BARONE Jack et NOVIKOFF Albert, 1978, « A History of the Axiomatic Formulation of Probability from Borel to Kolmogorov : Part 1 ». *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 18 (2), p. 123–190.
- BARUCH Marc Olivier, 2006, « De la synthèse républicaine à la synthèse moderne. La mémoire des années 1930-1950 dans la France contemporaine ». Dans *Colloque : « Expériences et mémoires : partager en français la diversité du monde »*, Bucarest. [Http://www.celat.ulaval.ca/histoire.memoire/colloques/colloque\\_bucarest\\_2006.htm](Http://www.celat.ulaval.ca/histoire.memoire/colloques/colloque_bucarest_2006.htm).
- BASS Jean, 1961, *Cours de Mathématiques*, vol. Tome II. Paris : Masson, 2<sup>e</sup> édition.
- DE BEAUCHAMP Alphonse, 1909, *Recueil des lois et règlements sur l'enseignement supérieur*, vol. VI. Paris : Delalain Frères.
- BEAULIEU Liliane, 1990, *Bourbaki, Une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses travaux (1934-1944)*. Thèse de doctorat, Université de Montréal, Institut d'histoire et de sociopolitique des sciences.
- BEAULIEU Liliane, 1993, « A Parisian Café and Ten Proto-Bourbaki Meetings (1934-1935) ». *The Mathematical Intelligencer*, vol. 15 (1).



- BEAULIEU Liliane, 1998, « Jeux d'esprit et jeux de mémoire chez N. Bourbaki ». Dans ABIR-AM Pnina G. (ed.), *La mise en mémoire de la science. Pour une ethnographie historique des rites commémoratifs*, Amsterdam : Éditions des archives contemporaines, p. 75–123.
- BEAULIEU Liliane, 1999, « Bourbaki's Art of Memory ». *Osiris*, (14), p. 219–251.
- BECKER Jean-Jacques (ed.), 2005, *Histoire culturelle de la Grande Guerre*. Paris : Armand-Colin.
- BELHOSTE Bruno, DAHAN-DALMEDICO Amy, PESTRE Dominique et PICON Antoine (eds), 1995, *La France des X, deux siècles d'histoires*. Paris : Economica.
- BELHOSTE Bruno, DAHAN-DALMEDICO Amy et PICON Antoine (eds), 1994, *La Formation polytechnicienne 1794-1994*. Paris : Dunod.
- BENNETON Gaston, 1943, *Sur l'arithmétique des quaternions et des biquaternions*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- BENSA Alban, 1996, « De la micro-histoire vers une anthropologie critique ». Dans REVEL Jacques (ed.), *Jeux d'échelles. La micro-analyse à l'expérience*, Hautes études, Gallimard Le Seuil, p. 37–70.
- BENZECRI Jean-Paul, 1988, « Dugué (Daniel) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 73–74.
- BERNARD Picinbono et TORTRAT Albert, 2003, « Blanc-Lapierre (André) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 55–60.
- BERNSTEIN Vladimir, 1930, *Sur les singularités des séries de Dirichlet*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- BIEBERBACH Ludwig, 1919, « Über eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung ». *Mathematische Zeitschriften*, (3), p. 175–190.
- BIERNACKI Miécislas, 1928, *Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- BILODEAU Bénédicte et HULIN Nicole, 1997, « Les premiers doctorats féminins à la faculté des sciences de Paris (1888-1920) à travers les rapports de thèses ». *Archives internationales d'Histoire des sciences*, vol. 47 (139), p. 295–315.
- BIRCK F. et GRELON A. (eds), 1998, *Des ingénieurs pour la Lorraine - Enseignements industriels et formations technico-scientifiques supérieures, XIXe-XXe siècles*. Éditions Serpenoise. Actes du colloque de Metz (décembre 1995).

- BIRCK Françoise et GRELON André (eds), 2006, *Un siècle de formation des ingénieurs électriciens, Ancrage local et dynamique européenne, l'exemple de Nancy*. Maison des sciences de l'homme.
- BKHOUCHE Rudolf, 1991, « Variations autour de la réforme de 1902/1905 ». Dans *La France mathématique La société mathématique de France (1870-1914)*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des sciences, Société Mathématique de France, p. 181–214.
- BLANC Charles, 1937, *Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- BLANC Eugène, 1938, *Les espaces métriques quasi-convexes*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- BLANC-LAPIERRE André, 1945, *Sur certaines fonctions aléatoires stationnaires. Application à l'étude des fluctuations dues à la structure électronique de l'électricité*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- BLANC-LAPIERRE André et FERRAND Jacqueline, 1999, « Fortet (Robert) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 46–49.
- BLANC-LAPIERRE André, MOUNIER-KUHN Pierre-Eric et SÉGAL Jérôme, 1997, « Blanc-Lapierre, André ». <http://www.mpiwg-berlin.mpg.de/staff/segal/thesis/thesehtm/entret/blancclap.htm> (15 janvier 2009).
- BLOCH André, 1926, « Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires ». *Annales scientifiques de l'E.N.S.*, (43), p. 309–362. 3<sup>e</sup> série.
- BOOS Pierre, 1936, *Propriétés caractéristiques de courbes ou de surfaces*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- BOREL Émile, 1897, « Sur les zéros des fonctions entières ». *Acta mathematica*, (20), p. 357–396.
- BOREL Émile, 1905, « Remarques sur certaines questions de probabilités ». *Bulletin de la Société mathématique de France*, vol. 33, p. 123–128.
- BOREL Émile, 1906a, « La valeur pratique du calcul des probabilités ». *La Revue du mois*, vol. 1, p. 424–437.
- BOREL Émile, 1906b, « Sur les principes de la théorie cinétique des gaz ». *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, vol. 23, p. 9–32.
- BOREL Émile, 1909, *Éléments de la théorie des probabilités*. Paris : Hermann.

- BOREL Émile, 1914a, *Introduction géométrique à quelques théories physiques*. Paris : Gauthier-Villars.
- BOREL Émile, 1914b, *Le Hasard*. Paris : Alcan.
- BOREL Émile, 1918, « Sur la répartition probable et les fluctuations des distances mutuelles d'un nombre fini de points, droites et plans ». *Bulletin de la Société mathématique de France*, vol. 46, p. 105–120.
- BOREL Émile et DELTHEIL Robert, 1923, *Probabilités, Erreurs*. Éditions Armand Colin.
- BOREL Émile et DELTHEIL Robert, 1931, *La géométrie et les imaginaires*. Éditions Albin Michel.
- BOULIGAND Georges, 1931, « Sur l'idée d'ensemble d'accumulation ». *L'Enseignement Mathématique*, (30), p. 243–249.
- BOULIGAND Georges, 1932, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*. Paris : Librairie Vuibert.
- BOURBAKI Nicolas, 1984, *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris : Masson.
- BOURDIEU Pierre, 2006, *Questions de sociologie*. Les Éditions de Minuit. 1<sup>ère</sup> édition en 1984.
- BOURION Georges, 1933, *Recherches sur l'ultraconvergence*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- BOUTROUX Pierre, 1908, « Sur l'indétermination d'une fonction uniforme au voisinage d'une singularité transcendante ». *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, (25), p. 319–370. 3<sup>e</sup> série.
- BRECHENMACHER Frédéric, 2008, « Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques ». Prépublication, [http://hal.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=hureeg89uvj6f5m05inf8b2np5%&view\\_this\\_doc=hal-00339082&version=1](http://hal.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=hureeg89uvj6f5m05inf8b2np5%&view_this_doc=hal-00339082&version=1).
- BRIGAGLIA Aldo et CILIBERTO Ciro, 1995, *Italian algebraic geometry between the two world wars, Queen's papers on pure and applied mathematics*, vol. 100. Kingston, Ontario : Queen's University.
- BRU Bernard, 1992, « La vie et l'oeuvre de W. Doeblin (1915-1940) d'après les archives parisiennes ». *Mathématiques et sciences humaines*, vol. 119, p. 5–51.

- BRU Bernard, 1993, « Doebelin's life and work from his correspondence ». Dans COHN Harry (ed.), *Doebelin and modern probability*, Providence : American Mathematical Society, p. 1–64.
- BRU Bernard, 1999a, « Borel, Lévy, Neyman, Pearson et les autres ». *Mataphi*, vol. 60, p. 51–60.
- BRU Bernard, 1999b, « Émile Borel et le calcul des probabilités ». Notes de travail. Colloque Émile Borel.
- BRU Bernard, 2002, « L'oeuvre scientifique de Robert Fortet ». Dans BRISSAUD Marcel (textes réunis par) (ed.), *Écrits sur les processus aléatoires, mélanges en hommage à Robert Fortet*, Paris : Hermès Science Publications, p. 19–50.
- BRU Bernard, 2003, « Souvenirs de Bologne ». *Journal de la Société française de statistique*, vol. 144 (1-2), p. 135–226.
- BRU Bernard, BRU Marie-France et LAI Chung Kai, 1999, « Borel et la martingale de Saint-Petersbourg ». *Revue d'Histoire des mathématiques*, vol. 5, p. 181–247.
- BRU Bernard et NEVEU Jacques, 1998, « Robert Fortet (1912-1998) ». *Gazette des mathématiciens*, (78).
- BRU Bernard et YOR Marc, 2002, « Comments on the life and mathematical legacy of Wolfgang Doebelin ». *Finance and Stochastics*, vol. 6, p. 3–37.
- BRUNHOLD Ch., 1934, *Contribution à l'étude de quelques catégories d'ensembles totalement discontinus définis par des conditions géométriques*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Toulouse.
- BURK Frank, 1998, *Lebesgue measure and integration : an introduction*. New York ; Chichester ; Weinheim : Wiley-Interscience.
- CALUGARÉANO Georges, 1928, « Sur les fonctions polygènes d'une variable complexe ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, (186), p. 930–932.
- CANTELLI P., FELLER W., FRÉCHET M., DE MISES R., STEFFENSEN J.F. et WALD A., 1938, « Deuxième Partie. Les fondements du calcul des probabilités ». Dans *Colloque consacré à la théorie des probabilités*, Paris : Hermann.
- CAPOULADE J., 1934, *Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique à coefficients singuliers*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Poitiers.

- CARTAN Élie, 1919, « Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien ». *Bulletin de la Société mathématique de France*, (47).
- CARTAN Élie, 1920a, « Sur la déformation projective des Surfaces ». *Annales de l'École normale supérieure*, (37).
- CARTAN Élie, 1920b, « Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien ». *Bulletin de la Société mathématique de France*, (48).
- CARTAN Élie, 1922, *Leçons sur les invariants intégraux*. Paris : Hermann.
- CARTAN Élie, 1923, « Les espaces à connexion conforme ». *Annales de la Société polonaise de mathématiques*, (2), p. 171–221.
- CARTAN Élie, 1924, « Sur les variétés à connexion projective ». *Bulletin de la Société mathématique de France*, (52).
- CARTAN Élie, 1925, *La géométrie des espaces de Riemann*. Numéro 9 dans *Memorial des sciences mathématiques*, Paris : Gauthier-Villars.
- CARTAN Élie, 1931, *Leçons sur la géométrie projective complexe*. Paris : Gauthier-Villars.
- CARTAN Élie, 1935, « La méthode du repère mobile. La théorie des groupes continus et les espaces généralisés ». Dans *Actualités scientifiques et industrielles*, numéro 194 dans *Exposés de géométrie*, Paris : Hermann.
- CARTAN Élie, 1939, *Jubilé scientifique de M. Élie Cartan*. Paris : Gauthier-Villars.
- CARTAN Henri, 1928, *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- CARTAN Henri, 1972, « Blanc (Eugène) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 78–80.
- CARTAN Henri, 1976, « Montel, Paul ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 33–35.
- CARTAN Henri et FERRAND Jacqueline, 1988, « Le cas André Bloch ». *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, (tome 9), p. 211–219.
- CATELLIER Rémi, 2008, *Le renouveau des mathématiques de l'aléatoire en France dans l'entre-deux-guerres. Les nouveaux instituts et la statistique mathématique*. L3 mathématiques, École normale supérieure de Lyon. Directeur de stage : Laurent Mazliak.

- CATELLIER Rémi et MAZLIAK Laurent, 2010, « The emergence of French statistics. How mathematics entered the world of statistics in France during the 1920s ». To appear.
- CAUCHON Gérard, 2002, « Léonce Lesieur (1914-2002) ». *Gazette des Mathématiciens*, (93), p. 119–120.
- CAVAILLÈS Jean, 1940, « Du collectif au pari. A propos de quelques théories récentes sur les probabilités. » *Revue de métaphysique et de morale*, vol. 47, p. 139–163.
- CERCLE VAUDOIS DE GÉNÉALOGIE, 2006, « Charles Blanc (1910-2006) ». *Nouvelles du cercle*, (60), p. 3.
- CERF G., 1970, « Thiry (René) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 34–37.
- CHABAUTY Claude, 1938, *Sur les équations diophantiennes liées aux unités d'un corps de nombres algébriques fini*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- CHAMARD Lucien, 1933, *Sur les propriétés de la distance à un ensemble ponctuel*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Poitiers.
- CHAPELON Jacques, 1914, *Sur les relations entre les nombres des classes de formes quadratiques binaires de déterminant négatif*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- CHAPELON Jacques, 1922, *Notions sur le calcul des probabilités et la statistique*. Paris : École polytechnique.
- CHARLE Christophe et TELKES Eva, 1988, *Les Professeurs du Collège de France*. Paris : Institut national de recherche pédagogique ; Ed. du CNRS.
- CHARLE Christophe et TELKES Eva, 1989, *Les Professeurs de la Faculté des sciences de Paris : dictionnaire biographique (1901-1939)*. Paris : Institut National de Recherche Pédagogique.
- CHARPENTIER Marie, 1931, *Sur les points de Peano d'une équation différentielle du premier ordre*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Poitiers, Cluj, Institutul de Arte Grafice "Ardealul".
- CHAZY et MICHEL, 1928, « Vie de la Société ». *Bulletin de la Société Mathématique de France*, (56), p. 1–50. (supplément spécial).
- CHERN Shiing-Shen et CHEVALLEY Claude, 1952, « Élie Cartan and his Mathematical Work ». *Bulletin of the American Mathematical Society*, (58), p. 217–250.

- CHEVALLEY Claude, 1934, *Sur la théorie des corps de classes dans les corps finis et les corps locaux*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- CHEVALLEY Claude et LAUTMAN Albert, 1932, « Herbrand (Jacques) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 66–68.
- CHOUCHAN Michèle, 1995, *Nicolas Bourbaki. Faits et légendes*.
- CHOW Shao-Lien, 1936, *Problèmes de raréfaction et de localisation des ensembles*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Poitiers.
- CHUANG Chi-tai, 1938, *Étude sur les familles normales et les familles quasi-normales de fonctions méromorphes*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- CHÂTELET François, 1944, *Variations sur un thème d'H. Poincaré*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- CLAPIER, 1919, *Sur les surfaces minima ou ellasoïdes*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- COHN Harry (ed.), 1993, *Doebelin and modern probability*. Providence : American Mathematical Society.
- COLASSE Bernard et PAVÉ Francis, 2002, « L'Institut Henri Poincaré aux sources de la recherche opérationnelle. Entretien avec Bernard Bru ». *Gérer et Comprendre*, vol. 67, p. 76–91.
- COLMEZ Jean, BOUZITAT Jean et FERRAND Jacqueline, 1990, « Dufresnoy (Jacques) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 67–71.
- COUTY R., GLAESER G. et PÉROL Ch., 1995, « L'essor des mathématiques à Clermont entre 1940 et 1945 ». *Gazette des mathématiciens*, (65), p. 19–24.
- CROFTON Morgan W., 1885, « Probability ». Dans *Encyclopedia Britannica*, Cambridge : Cambridge University Press. 9th edition.
- CROWFORD E. et OLFF-NATHAN Josiane (eds), 2005, *La science sous influence : l'université de Strasbourg, enjeux des conflits franco-allemands, 1872-1945*. Strasbourg : La nuée bleue.
- CRÉPEL Pierre, 1984, « Quelques matériaux pour l'histoire de la théorie des martingales (1920-1940) ». *Publications des séminaires de mathématiques. Séminaires de probabilités*, p. 1–66.

- CRÉPEL Pierre, 2009, « Jean Ville's recollections, in 1984 and 1985 concerning his work on martingales ». *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, vol. 5 (1). Translation from the French by Glenn Shafer.
- DAHAN-DALMEDICO Amy, 1999, « Pur versus appliqué ? Un point de vue d'historien sur une « guerre d'images » ». *Gazette des mathématiciens*, (80).
- DARBOUX Gaston, 1894, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, vol. 3 - Lignes géodésiques et courbure géodésique : paramètres différentiels : déformation des surfaces. Paris : Gauthier-Villars.
- DARBOUX Gaston, 1896, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, vol. 4- Déformation infiniment petite et représentation sphérique. Paris : Gauthier-Villars.
- DARBOUX Gaston, 1914, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, vol. 1 - coordonnées curvilignes : surfaces minima. Paris : Gauthier-Villars, 2<sup>e</sup> édition.
- DARBOUX Gaston, 1915, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, vol. 2 - Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles : les lignes tracées sur les surfaces. Paris : Gauthier-Villars, 2<sup>e</sup> édition.
- DARMOIS Georges, 1919, « Sur les courbes algébriques à torsion constante ». *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, (11), p. 67–189. Sér. 3.
- DARMOIS Georges, 1921, *Sur les courbes algébriques à torsion constante*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- DARMOIS Georges, 1935, « Sur les lois de probabilités à estimation exhaustive ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 200, p. 1265.
- DAY Charles, 1991, *Les Écoles d'arts et métiers : l'enseignement technique en France XIX<sup>ième</sup>-XX<sup>ième</sup> siècles*. Paris : Belin.
- DE RHAM Georges, 1931, *Sur l'analysis situs des variétés à  $n$  dimensions*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- DE RHAM Georges, 1980, « Quelques souvenirs des années 1925-1950 ». *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, (1), p. 19–36.
- DECUYPER Marcel, 1947, « Sur quelques congruences attachées à une surface ». *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (26), p. 15–98.



- DELANGE Hubert, 1939, *Sur la convergence de séries de polynômes de la forme  $\sum a_n P_n(z)$  et sur certaines suites de polynômes*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- DELENS Paul, 1927, *Méthodes et problèmes de géométrie différentielle conforme*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- DELLACHERIE Claude, 1978, « Nombres au hasard. De Borel à Martin Löf ». *Gazette des mathématiciens*, vol. 11, p. 23–58.
- DELTHEIL Robert, 1920, *Sur la théorie des probabilités géométriques*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- DELTHEIL Robert, 1926, *Probabilités Géométriques*. Gauthier-Villars.
- DELTHEIL Robert, 1930, *Erreurs et moindres carrés*. Gauthier-Villars.
- DENJOY Arnaud, 1934, *Notice sur les travaux scientifiques de M. Arnaud Denjoy*. Paris : Hermann.
- DENJOY Arnaud, 1939, « Aspects actuels de la pensée mathématique ». *Bulletin de la Société Mathématique de France*, (67), p. 1–12. (supplément).
- DENJOY Arnaud, 1942, *Complément à la notice publiée en 1934 sur les travaux scientifiques de M. Arnaud Denjoy*. Hermann.
- DESFORGE Julien, 1979, « Julia (Gaston) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 59–67.
- DICKSON L.E., 1919-1923, *History of the Theory of Numbers*. Washington : Carnegie Institute of Washington. Réimpression : Chelsea, New York, 1952.
- DIEUDONNÉ Jean, 1931a, « Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe ». *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, (48), p. 247–358. 3<sup>e</sup> série.
- DIEUDONNÉ Jean, 1931b, *Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- DIEUDONNÉ Jean, 1977, *Panorama des mathématiques pures Le choix bourbachique*. Paris : Bordas.
- DIEUDONNÉ Jean, 1978, *Abrégé d'Histoire des mathématiques 1700-1900*. Paris : Hermann. En collaboration avec Dugac, Pierre, Elliquon, F., Ellison, W.J., Guerindon, Jean.

- DIEUDONNÉ Jean, 1981, « History of functional Analysis ». Dans *North-Holland mathematics Studies*, numéro 49 dans *Notas de Matematica*, no. 77, Amsterdam, New York, Oxford : North-Holland.
- DIEUDONNÉ Jean, 1985, *History of Algebraic Geometry, an Outline of the History and Developement of Algebraic Geometry*. Monterey : Wadsworth. Sally, Judith D. (trad.).
- DIEUDONNÉ Jean, 1986, « Chevalley (Claude) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 83–91.
- DIEUDONNÉ Jean, 1989, *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900-1960*. Boston : Birkhäuser.
- DIEUDONNÉ Jean, 1994, « Dieudonné (Jean) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 428–429.
- DIEUDONNÉ Jean et CHOQUET Gustave, 1980, « Ehresmann (Charles) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 68–71.
- DOEBLIN Wolfgang, 1937, « Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types de chaînes simples ». *Bulletin mathématique de la Société roumaine des sciences*, vol. 39. No.1, p.57-115 et No.2, p3-61.
- DOEBLIN Wolfgang, 1938a, « Exposé de la théorie des Chaînes simples constantes de Markoff à un nombre fini d'états ». *Revue mathématique de l'Union Interbalkanique*, vol. 2, p. 77–105.
- DOEBLIN Wolfgang, 1938b, *Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types de chaînes simples*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- DOEBLIN Wolfgang, 1940, « Éléments d'une théorie générale des chaînes simples constantes de Markoff ». *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, vol. 57, p. 61–111.
- DOEBLIN Wolfgang, 2000, *Sur l'équation de Kolmogoroff*, *Pli cacheté à l'Académie des sciences*, vol. 331. Numéro spécial des CRAS Paris, série 1.
- DOEBLIN Wolfgang, 2007, « Wolfgang Doeblin-Bouhslav Hostinsky : Correspondance (1936-1938) ». *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, vol. 3 (1). Partie *Traces et mémoires*.
- DOEBLIN Wolfgang et FORTET Robert, 1937a, « Sur des chaînes à liaisons complètes ». *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 65, p. 132–148.

- DOEBLIN Wolfgang et FORTET Robert, 1937b, « Sur deux notes de MM. Kryloff et Bogoliouboff ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 204, p. 1699–1701.
- DOOB J. L., 1939, « Review : Jean Ville, Étude Critique de la Notion de Collectif ». *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 45 (11), p. 824.
- DOOB Joseph Leo, 1934, « Probability and Statistics ». *Transactions of American Mathematical Society*, vol. 36 (4), p. 759–775.
- DOOB Joseph Leo, 1944, « The elementary Gaussian processes ». *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 15, p. 229–282.
- D'ORGEVAL Bernard, 1943, *Sur les surfaces algébriques dont tous les genres sont 1*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- D'ORGEVAL Bernard, 1992, « Ville (Jean) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 388–389.
- DUBOURDIEU Jules, 1929, *Sur les réseaux de courbes et de surfaces*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- DUBREIL Daniel, 1975, « Boos (Pierre) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 102–107.
- DUBREIL Paul, 1930, *Recherches sur la valeur des exposants des composants primaires des idéaux de polynômes*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- DUBREIL Paul, 1981, « Apparition et premiers développements de la théorie des demi-groupes en France ». *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, (2), p. 59–65.
- DUBREIL Paul, 1982, « L'algèbre, en France, de 1900 à 1935 ». *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, (3), p. 69–81.
- DUBREIL Paul, 1983, « Souvenirs d'un boursier Rockefeller 1929-1931 ». *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, (4), p. 61–73.
- DUCASSE André, 1974, « Marchaud (André) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 54–63.
- DUDA Roman, 1996, « *Fundamenta Mathematicae* and the Warsaw school of mathematics ». Dans GOLDSTEIN Catherine, GRAY Jeremy et RITTER Jim (eds), *L'Europe Mathématique*, Paris : Éditions de la Maison des sciences de l'homme, p. 479–498.

- DUFRESNOY Jacques, 1941a, « Sur les domaines couverts par les valeurs d'une fonction méromorphe ou algébroïde ». *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, (58), p. 179–259. 3<sup>e</sup> série.
- DUFRESNOY Jacques, 1941b, *Sur les domaines couverts par les valeurs d'une fonction méromorphe ou algébroïde*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- DUGAC Pierre, 1995, *Jean Dieudonné Mathématicien complet*. Éditions Jacques Gabay.
- DUGUÉ Daniel, 1937, *Application des propriétés de la limite au sens du calcul des probabilités à l'étude de diverses questions d'estimation*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- DUGUÉ Daniel, 1961, « Georges Darmon, 1888-1960 ». *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 32 (2), p. 357–360.
- DUGUÉ Daniel, 1986, « Féraud (Lucien) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 51–53.
- DULIEU Louis, 1981, *La Faculté des sciences de Montpellier : de ses origines à nos jours*. Avignon : Les Presses Universelles.
- DURAND Georges, 1931, *Sur une généralisation des surfaces convexes*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- DÉCAILLOT Anne-Marie, 2002, « L'AFAS : l'originalité d'une démarche mathématique ». Dans GISPÉRT Hélène (ed.), *Par la science, pour la patrie - L'Association française pour l'avancement des Sciences (1872-1914). Un projet politique pour une société savante*, Collection Carnot, Rennes : Presses universitaires de Rennes, p. 205–214.
- EGER Max, 1943, *Les systèmes canoniques d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- EGNELL Axel, 1919, *Géométrie infinitésimale vectorielle*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- EHRESMANN Charles, 1934a, « Sur la topologie de certains espaces homogènes ». *Annals of Mathematics*, (35), p. 396–443.
- EHRESMANN Charles, 1934b, *Sur la topologie de certains espaces homogènes*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.

- EHRHARDT Caroline, 2007, *Évariste Galois et la théorie des groupes. Fortune et réélaborations (1811-1910)*. Thèse de doctorat, École des hautes études en sciences sociales.
- ELIAS Norbert, 2003, *La dynamique de l'Occident*. Pocket. Traduction française de 1975 publiée chez Calmann-Lévy.
- EPPERSON Bryan K., 1999, « Gustave Malécot, 1911-1998 : Population Genetics Founding Father ». *Genetics*, vol. 152, p. 477–484.
- FAN Ky, 1941, *Sur quelques notions fondamentales de l'Analyse générale*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- FANTAPPIÈ Luigi, 1934, « Überblick über die Theorie der analytischen Funktione und ihre Anwendungen ». Dans *Jahresbericht der Deutsche Mathematische Vereinigung*, 43, Leipzig - Berlin : Teubner, p. 1–25.
- FAVARD Jean, 1927, *Sur les fonctions hares presque périodiques*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- FAYET-SCRIBE Sophie, 2000, *Histoire de la documentation en France ; Culture, science et technologie de l'information ; 1895-1937*. CNRS Éditions.
- FENSTER Della, 1998, « Leonard Eugene Dickson and his Work in the Arithmetics of Algebras ». *Archive for History of Exact Sciences*, (52), p. 119–159.
- FERRAND Jacqueline, 1942a, *Étude de la représentation conforme au voisinage de la frontière*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- FERRAND Jacqueline, 1942b, « Étude de la représentation conforme au voisinage de la frontière ». *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, (59), p. 43–106. 3<sup>e</sup> série.
- FERRAND Jacqueline, 2005, « Delange, Hubert ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 52–55.
- FERRY Jules, 1880, « Lettre au recteur du 8 mai 1880 ». *Bulletin administratif*, (23), p. 475–476.
- DE FINETTI Bruno, 1939, « Huitième Partie. Compte rendu critique du colloque de Genève sur la théorie des probabilités ». Dans *Colloque consacré à la théorie des probabilités*, Paris : Hermann.

- FISHER Ronald Aymler, 1918, « The correlation between relatives on the supposition of Mendelian inheritance ». *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 52, p. 399–433.
- FISHER Ronald Aymler, 1925, « Theory of statistical estimation ». *Proceedings of the Cambridge philosophical Society*, vol. 22, p. 700–725.
- FLAMANT Paul, 1924, *Sur une équation différentielle fonctionnelle linéaire*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Strasbourg, Palerme. Tipografia matematica G. Senatore.
- FOLTA Jaroslav et NOVÝ Lubos, 1965, « Sur la question des méthodes quantitatives dans l'histoire des mathématiques ». *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum*, (1), p. 3–35.
- FONTAINE André, 1974, « Deltheil (Robert) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 67–70.
- FONTANON Claudine et FRANCK Robert (eds), 2005, *Paul Painlevé (1863-1933). Un savant en politique*. Presses Universitaires de Rennes.
- FORTET Robert, 1935, « Sur des probabilités en chaîne ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 201, p. 184–186.
- FORTET Robert, 1936, « Sur des probabilités en chaîne ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 202, p. 1362–1364.
- FORTET Robert, 1939, *Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et ses applications à la théorie des probabilités en chaîne*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- FOUILLADE André, 1937, *Recherches sur l'itération des substitutions fonctionnelles linéaires*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Poitiers.
- FRICKE Robert et KLEIN Felix, 1890-1892, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*. Leipzig.
- FRICKE Robert et KLEIN Felix, 1897-1912, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen*. Leipzig.
- FRODA Alexandre, 1929, *Sur la distribution des propriétés de voisinage des fonctions de variables réelles*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- FRÉCHET Maurice, 1928, *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*. Paris : Gauthier-Villars.

- FRÉCHET Maurice, 1930, « Sur certaines décompositions de la fonction complexe uniforme la plus générale ». *Acta Mathematica*, (54), p. 37–79.
- FRÉCHET Maurice, 1933a, « Compléments à la théorie des probabilités discontinues "en chaîne" ». *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, vol. II, p. 131–164. Sér. II.
- FRÉCHET Maurice, 1933b, « Les probabilités en chaîne ». *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 5, p. 170–245.
- FRÉCHET Maurice, 1934a, « Sur l'allure asymptotique de la suite des itérées d'un noyau de Fredholm ». *The Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 5 (18).
- FRÉCHET Maurice, 1934b, « Sur l'allure asymptotique des densités itérées dans le problème des probabilités « en chaîne » ». *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 62, p. 68–83.
- FRÉCHET Maurice, 1936, « Une expression générale du  $n^{\text{ième}}$  itéré d'un noyau de Fredholm en fonction de  $n$  ». *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, vol. 15, p. 251. 9<sup>ième</sup> série.
- FRÉCHET Maurice, 1937, *Recherches théoriques Modernes sur le calcul des probabilités. Premier livre : Généralités sur les probabilités. Éléments aléatoires*. Paris : Gauthier-Villars.
- FRÉCHET Maurice, 1938, *Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*. Paris : Gauthier-Villars.
- FRÉCHET Maurice, 1939, « Les principaux courants dans l'évolution récente des recherches sur le Calcul des Probabilités ». Dans *Colloque consacré à la théorie des probabilités*, Paris : Hermann. Fasc.1.
- FÉLIX Lucienne, 1974, *Message d'un mathématicien : Henri Lebesgue ; pour le centenaire de sa naissance*. Paris : Librairie scientifique et Technique Albert Blanchard.
- FÉRAUD Lucien, 1927, « Sur une généralisation des correspondances ponctuelles qui établissent l'applicabilité projective ». (184), p. 1630–1632.
- FÉRAUD Lucien, 1928, *Sur une généralisation des correspondances ponctuelles qui établissent l'applicabilité projective*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- KAMPÉ DE FÉRIET J., 1915, *Sur les fonctions hypersphériques*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.

- GAIER Dieter, 1990, « Über die Entwicklung der Funktionentheorie in Deutschland von 1890 bis 1950 ». Dans FISHER Gerd, HIRZEBRUCH Friedrich, SCHARLAU Winfried et TÖRNIG Willi (eds), *Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV*, Braunschweig, Wiesbaden : Deutsche Mathematiker Vereinigung Friedr. Vieweg & Sohn, p. 361–420.
- GALLISSOT Ch., 1922, *La photométrie du point lumineux appliquée aux déterminations des éclats stellaires – Absorption atmosphérique – scintillation colorations et températures*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Lyon.
- GALVANI Octave, 1944, *Sur la réalisation des espaces ponctuels à torsion en géométrie euclidienne*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- GAUTHIER Luc, 1944, *Sur certains systèmes linéaires de droites hyperspatiaux*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- GAUTHIER Sébastien, 2007, *La géométrie des nombres comme discipline (1890-1945)*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.
- GERMAIN Paul, 1982, « Gauthier (Luc) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 57–61.
- GHICA Alexandre, 1929, *Sur les fonctions de carré sommable le long des contours de leurs domaines d'holomorphisme et leurs applications aux équations différentielles linéaires d'ordre infini*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- GIBBS J.W., 1902, *Elementary Principles in Statistical Mechanics, Developed with Especial References to the Rational Foundations of Thermodynamics*. Yale bicentennial Publications, New-York : Scribner. Traduction française par F. Cosserat et complétée par J. Rossignol, avec une préface de M. Brillouin. Paris, Hermann, 1926.
- GILLOIS Michel, 1999, « L'oeuvre scientifique de Gustave Malécot 1911-1998 ». *Société Française de Génétique*, vol. 15, p. 1–8.
- GIRAUD Georges, 1916, *Sur une classe de groupes discontinus de transformations birationnelles quadratiques et sur les fonctions de trois variables indépendantes restant invariables par ces transformations*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- GISPERT Hélène, 1991, « La société mathématique de France (1870-1914) ». Dans *La France mathématique, La société mathématique de France (1870-1914)*, 34, Société Française d'Histoire des Sciences et des Techniques et Société Mathématique de France.



- GISPERT Hélène, 1993, « Le milieu mathématique français et ses journaux en France et en Europe ». Dans ELENA AUSEJO Mariano Hormigon (ed.), *Messengers of Mathematics : European Mathematical Journals (1800-1946)*, Siglo XXI de España Editores, p. 133–158.
- GISPERT Hélène, 1994, « De Bertrand à Hadamard : quel enseignement d'analyse pour les polytechniciens ? » Dans BELHOSTE BRUNO Picon Antoine, Dahan-Dalmedico Amy (ed.), *La formation polytechnicienne : 1794-1994*, Paris : Dunod, p. 181–197.
- GISPERT Hélène, 1995a, « La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 : Baire, Borel, Lebesgue ... et tous les autres ». *Revue d'histoire des mathématiques*, (1), p. 39–81.
- GISPERT Hélène, 1995b, « Les doctorats : objet pertinent en histoire des sciences. L'exemple des thèses mathématiques ». Dans *Histoire du doctorat*, ANDÈS. Extrait des actes de la journée du 17 novembre 1995, consacré au doctorat.
- GISPERT Hélène, 1999a, « Champs conceptuels et milieux mathématiques : objets et moyens d'études ; méthodes quantitatives en histoire des mathématiques ». *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum*, (28), p. 167–185.
- GISPERT Hélène, 1999b, « Réseaux mathématiques en France dans les débuts de la Troisième République ». *Archives Internationales d'Histoire des sciences*, (142), p. 122–149.
- GISPERT Hélène, 2001, « The German and French Editions of the Klein-Molk Encyclopedia : Contrasted Images ». Dans BOTTAZINI Amy, Umberto et Dahan Dalmedico (ed.), *Changing Images in Mathematics From the French Revolution to the New Millennium*, Londres : Routledge, p. 93–113.
- GISPERT Hélène, 2007, « Quelles lectures pour les conférences de mathématiques : savante, pédagogique, politique ? » Dans GISPERT H., HULIN N. et ROBIC M.-C. (eds), *Science et enseignement. L'exemple de la grande réforme des programmes du lycée au début du XXème siècle*, Paris : INRP-Vuibert.
- GODEMENT Roger, 2002, *Analyse mathématique*, vol. 3. «Fonctions analytiques différentielles et variétés, surfaces de Riemann». Berlin, Heidelberg : Springer.
- GOLDSTEIN Catherine, 1994, « La théorie des nombres dans les Notes aux comptes rendus de l'Académie des sciences (1870-1914) : un premier examen ». *Rivista di Storia della scienza*, (2).

- GOLDSTEIN Catherine, 1995, *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*. Presses universitaires de Vincennes.
- GOLDSTEIN Catherine, 1999, « Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914) ». *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum*, (28), p. 187–214.
- GOLDSTEIN Catherine, à paraître, 2009, « La théorie des nombres en France dans l'entre-deux-guerres : de quelques effets de la première guerre mondiale ». *Revue d'histoire des mathématiques*. Hors série : « Regards sur les mathématiques en France entre deux guerres ».
- GOLDSTEIN Catherine et MAZLIAK Laurent (eds), à paraître en 2010, *Mathématiques et Mathématiciens en France autour de la Première Guerre Mondiale*. indéterminé.
- GOLDSTEIN Catherine et RITTER Jim, 2003, « The Varieties of Unity : Sounding Unified Theories 1920-1930 ». Dans ASHTEKAR A., COHEN R.S, HOWARD D., RENN J., S. Sarkar et SHIMONY A. (eds), *Revisiting the Foundations of Relativistic Physics*, Springer, p. 93–149.
- GOLDSTEIN Catherine et SCHAPPACHER Norbert, 2007, « Several Disciplines and a book (1860-1901) ». Dans GOLDSTEIN Catherine, SCHAPPACHER N. et SCHWERMER N. (eds), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Heidelberg, Berlin : Springer, p. 67–103.
- GOT Th., 1914, *Questions diverses concernant certaines formes quadratiques ternaires indéfinies et les groupes fuchsien arithmétiques qui s'y rattachent*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- GOURSAT Édouard, 1918, *Cours d'analyse mathématique*, vol. II. Paris : Gauthier-Villars. Troisième édition.
- GÅRDING Lars, 1997, « Some Points of Analysis and Their History ». Dans *University Lecture Series*, 11, Providence, Rhode Island : American Mathematical Society.
- GRAY Jeremy, 1997, « Algebraic Geometry between Noether and Noether – a forgotten chapter in the history of Algebraic Geometry ». *Revue d'histoire des mathématiques*, (3), p. 1–48.
- GRELON André, 1989, « Les universités et la formation des ingénieurs en France (1870-1914) ». *Formation-Emploi*, (27-28), p. 65–88.
- GUEDJ Denis, 1985, « Nicholas Bourbaki, collective mathematician : An interview with Claude Chevalley ». *Mathematical Intelligencer*, vol. 7 (2), p. 18–22.

- GUICHARD Claude, 1897, « Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques ». *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, (14), p. 75–132 et 181–288. 3<sup>e</sup> série.
- GUICHARD Claude, 1898, « Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques ». *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, (15), p. 75–132 et 181–288. 3<sup>e</sup> série.
- GUICHARD Claude, 1903a, « Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques ». *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, (20), p. 75–132. 3<sup>e</sup> série.
- GUICHARD Claude, 1903b, « Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques ». *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, (20), p. 181–288. 3<sup>e</sup> série.
- HACHTROUDI Mohsen, 1937, *Les espaces d'éléments à connexion projective normale*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- HADAMARD Jacques, 1893, « Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann ». *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 4 (9), p. 171–216.
- HADAMARD Jacques, 1906, « Compte rendu et analyse de GIBBS 1902 ». *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 12, p. 194–210.
- HADAMARD Jacques, 1927, « Sur le battage des cartes ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 185, p. 5–9.
- HADAMARD Jacques, 1928a, « Sur le principe ergodique ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 186, p. 275–276.
- HADAMARD Jacques, 1928b, « Sur les opérations itérées du calcul des probabilités ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 186, p. 189–192.
- HALBWACHS Maurice, 1994, *Les cadres sociaux de la mémoire*. Albin Michel. Postface de Gérard Namer. 1<sup>ère</sup> édition en 1925.
- HALBWACHS Maurice, 1997, *La mémoire collective*. Albin Michel. 1<sup>ère</sup> édition aux Presses Universitaires de France en 1950.
- HARTOGS Fritz, 1906, « Über analytische Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen ». *Mathematische Annalen*, (62), p. 1–88.
- HAUMÉ-HÉROUARD Émile, 1920, *Contribution à l'étude des surfaces réelles rapportées aux coordonnées curvilignes de leurs lignes de courbure*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.

- HAVLOVA Veronika, MAZLIAK Laurent et SISMA Pavel, 2005, « Le début des relations mathématiques franco-tchécoslovaques vu à travers la correspondance Hostinsky-Fréchet ». *Journal Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, vol. 1 (1), p. 1–18.
- HAWKINS Thomas, 2002, *Lebesgue's theory of integration : its origin and development*. Providence : American mathematical society.
- HAYMAN Walter K., 1982, « Rolf Nevanlinna ». *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 5 (14), p. 419–436.
- HAYMAN Walter K., 1994, « Function theory 1900-1950 ». Dans *Development of mathematics 1900-1950*, Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, p. 369–384.
- HERBRAND Jacques, 1930, *Recherches sur la théorie de la démonstration*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- HERVÉ Michel (ed.), 1968, *Oeuvres de Gaston Julia*, vol. 1. Paris : Gauthier-Villars.
- HEYDE Christopher Charles et SENETA Eugène (eds), 2001, *Statisticians of the centuries*. New-York : Springer.
- HIBBERT Lucien, 1937, *Univalence et automorphie pour les polynômes et les fonctions entières*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- HIBBERT Lucien, 1938, « Univalence et automorphie pour les polynômes et les fonctions entières ». *Bulletin de la S.M.F.*, (66), p. 81–154.
- HIONG King-Lai, 1934, *Sur les fonctions entières et les fonctions méromorphes d'ordre infini*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- HIRIART-URRUTY Jean-Baptiste et CAUSSINUS Henri, 2005, « Sarrus, Borel, Deltheil. Le Rouergue et ses mathématiciens ». *Gazette des mathématiciens*, (104), p. 88–97.
- HOCQUENGHEM A., 1976, « Nicolesco (Miron) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 131–133.
- HOSTINSKY Bohuslav, 1929, « Sur les probabilités des phénomènes liés en chaînes de Markoff ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 189, p. 78–80.
- HOSTINSKY Bohuslav, 1931, *Méthodes générales du Calcul des probabilités*. Paris : Gauthier-Villars.
- HOSTINSKY Bohuslav, 1932, « Application du calcul des probabilités à la théorie du mouvement brownien ». *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, vol. 3, p. 1–74.

- HOUREFAR Taghi Bodagh, 1939, *Exposition des recherches de M. E. Turrière sur la théorie des virages dans les routes modernes et étude générale des radioïdes*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Montpellier.
- HOUZEL Christian, 1991, « Aux origines de la géométrie algébrique : les travaux de Picard sur les surfaces (1884-1905) ». Dans *La France mathématique La société mathématique de France (1870-1914)*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des sciences, Société Mathématique de France, p. 243–276.
- HULIN Nicole, 1990, « Les doctorats dans les disciplines scientifiques au XIXème siècle. » *Revue d'Histoire des sciences*, (43), p. 401–426.
- HULIN Nicole, 1995, « Les doctorats dans les disciplines scientifiques au XIXème siècle. Organisation, rôle et évolution ». Dans *Histoire du doctorat*, ANDÈS. Extrait des actes de la journée du 17 novembre 1995, consacré au doctorat.
- HURWITZ, 1896, *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen*. Berlin.
- JACKSON A, 1999, « Interview with Henri Cartan ». *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 46 (7), p. 782–788.
- JACQUES Raymond, 1922, *Sur les surfaces telles que les axes des cercles osculateurs à une famille de courbure appartiennent à un complexe linéaire*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- JAHNKE Hans Niels, 2003, « A History of Analysis ». Dans *History of mathematics*, 24, Providence, Rhode Island : American Mathematical Society.
- JAISSEON Marie, 1999, « Temps et espace chez Maurice Halbwachs ». *Revue d'histoire des sciences humaines*, vol. 1 (1), p. 163–178.
- JAISSEON Marie, 2007, « Mémoire collective et mémoire des musiciens chez Maurice Halbwachs ». *Dimensioni e problemi della ricerca storica*, (2), p. 65–72.
- JAMES Ioan Mackenzie (ed.), 1999, *Hystory of topology*. Amsterdam, New York : Elsevier Science B.V.
- JULIA Gaston, 1917, *Étude sur les formes binaires non quadratiques indéterminées réelles, ou complexes, ou à indéterminées conjuguées*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- JULIA Gaston, 1932, « Essai sur le développement de la théorie des fonctions de variables complexes ». Dans SAXER Walter (ed.), *Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932*, 1, Zürich - Leipzig : Orell Füssli, p. 102–127.

- KAHANE Jean-Pierre, 1991, « Séries de Fourier, séries de Taylor, séries de Dirichlet ; un aperçu de l'importance des travaux des mathématiciens français dans la période 1880-1910 ». Dans *La France mathématique, La société mathématique de France (1870-1914)*, numéro 34 dans Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, Paris : Société Française d'Histoire des Sciences et des Techniques et Société Mathématique de France, p. 415–430.
- KAHANE Jean-Pierre, 1994, « Des séries de Taylor au mouvement brownien, avec un aperçu sur le retour ». Dans PIER Jean-Paul (ed.), *Development of Mathematics 1900-1950*, Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, p. 415–430.
- KAHANE Jean-Pierre, 1998, « Le mouvement brownien. Un essai sur les origines de la théorie mathématique ». Dans *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle - Actes du colloque à la mémoire de Jean Dieudonné (Nice 1996), Séminaires et Congrès*, vol. 3, Société mathématique de France, p. 123–155.
- KAHANE Jean-Pierre, 2004, « L'intégrale de Lebesgue au cours du vingtième siècle ». *Panoramas et synthèses*, (18), p. 1–16. Société Mathématique de France.
- KAMLAH Andreas, 1987, « The Decline of the Laplacian Theory of Probability : A Study of Stumpf, von Kries, and Meinong ». Dans KRÜGER Lorenz, DASTON Lorraine J. et HEIDELBERGER Michael (eds), *The Probabilistic Revolution. Volume I : Ideas in History*, Massachusetts Institute of Technology, p. 91–116.
- KHINTCHINE A., 1929, « Sur la loi des grands nombres ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 188, p. 477–479.
- KOGBELIANTZ Ervand, 1923a, « Sur la sommabilité de la série ultrasphérique à l'intérieur de l'intervalle  $(-1, +1)$  par la méthode des moyennes arithmétiques. » *Bulletin de la Société Mathématique de France*, (51), p. 244–295.
- KOGBELIANTZ Ervand, 1923b, *Sur les séries trigonométriques et la série de Laplace*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- KOLMOGOROFF Andreï Nikolaïevich, 1933, « Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ». Dans *Ergebnisse der Mathematik*, vol. II, Springer.
- KOPAL Z., 1968, « Jean Dufay (1896-1967) ». *Astrophysics and Space Science*, (1), p. 409–410.
- KOSZUL Jean-Louis, TRAYNARD Philippe et FERRAND Jacqueline, 1993, « Galvani (Octave) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 400–401.

- KOUNEIHAR Joseph, FLAMENT Dominique, NABONNAND Philippe et JEAN-JACQUES Szczeciniarz (eds), 2005, *Géométrie au XX<sup>e</sup> siècle, Histoire et Horizons*. Paris : Hermann.
- KRASNER Marc, 1938, *Sur la théorie de la ramification des idéaux de corps non-galoisiens de nombres algébriques*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- KRYLOFF Nicolas et BOGOLIUBOFF Nicolas, 1936, « Sur les propriétés ergodiques de l'équation de Smoluchovsky ». *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 64, p. 49–56.
- KRYLOFF Nicolas et BOGOLIUBOFF Nicolas, 1937a, « Les propriétés ergodiques des suites de probabilités en chaîne ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 204, p. 1454–1456.
- KRYLOFF Nicolas et BOGOLIUBOFF Nicolas, 1937b, « Sur les probabilités en chaîne ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 204, p. 1386–1388.
- KUHN Thomas, 1983, *La Structure des révolutions scientifiques*. Flammarion. Traduction de : *The Structure of Scientific Revolutions*, 2<sup>e</sup> édition augmentée, The University of Chicago Press, Chicago, 1970.
- KUNTZMANN Jean, 1939, *Contribution à l'étude des systèmes multiformes*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- KUNUGUI Kinjiro, 1930, *Sur la théorie du nombre des dimensions*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- LAGRANGE René, 1923, *Sur le calcul différentiel absolu*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- LAKATOS Imre, 1978, *The Methodology of Scientific Research Programmes*. Numéro 1 dans *Philosophical Papers*, Cambridge : Cambridge University Press.
- LALAN Victor, 1924, *Sur les propriétés infinitésimales projectives des variétés à trois dimensions*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- LAMOTTE Maxime, 1999a, « Gustave Malécot 1911-1998 ». *Société Française de Génétique*, (15), p. 9.
- LAMOTTE Maxime, 1999b, « Malécot (Gustave) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 58–59.
- LAUDAL Olav Arfinn et PIENE Ragni (eds), 2004, *The legacy of Niels Henrik Abel : the Abel bicentennial, Oslo, 2002*, Berlin, New York, Paris : Springer.

- LE CORBEILLER Ph., 1926, *Contribution à l'étude des formes quadratiques à indéterminées conjuguées*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- LEBEL J., 1921, *Sur les surfaces isothermiques et les systèmes cycliques*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- LEBESGUE Henri, 1928, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au Collège de France*. Paris : Gauthier-Villars. 2<sup>e</sup> édition.
- LEBESGUE Henri, 2004, *Les lendemains de l'intégrale. Lettres à Émile Borel*. Paris : Vuibert.
- LEFEBVRE Eloi, 1939, *Propriétés d'une famille de fonctions à une infinité de branches*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- LEFORT Jean, 2007, « Louis Antoine, géomètre aveugle ». *Pour la science*, (352), p. 16–21.
- LELONG Pierre, 1941, *Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- LELOUP Juliette, 2004, *Les dynamiques de recherche mathématique de l'entre-deux-guerres à partir de l'étude des thèses mathématiques soutenues en France*. Mémoire de dea, EHESS.
- LELOUP Juliette et GISPERT Hélène, prévu pour 2009, « Des patrons des mathématiques en France dans l'entre-deux-guerres ». à paraître dans la *Revue d'histoire des sciences*.
- LEPETIT Bernard, 1996, « De l'échelle en histoire ». Dans REVEL Jacques (ed.), *Jeux d'échelles. La micro-analyse à l'expérience*, Hautes études, Gallimard Le Seuil, p. 71–94.
- LESIEUR Léonce, 1945, *Sur la rationalité et la géométrie des intersections d'hyperquadrriques*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- LESIEUR Léonce, 1995, « Dubreuil, Paul ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 83–88.
- LI Wenlin et MARTZLOFF Jean-Claude, 1998, « Aperçu sur les échanges mathématiques entre la Chine et la France (1880-1949) ». *Archive for History of Exact Sciences*, (53), p. 181–200.
- LOCKER Bernard, 2001, *Paul Lévy, la période de guerre. Mouvement brownien et intégrales stochastiques*. Doctorat, Université Paris Descartes.



- LOEVE Michel, 1941a, *Étude asymptotique des sommes de variables aléatoires liées*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- LOEVE Michel, 1941b, « La loi des grands nombres pour des événements liés ou des variables aléatoires liées ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 212, p. 810–813.
- LOEVE Michel, 1941c, « La loi forte des grands nombres pour des variables aléatoires liées ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 212. Séance du 4 juin 1941.
- LOEVE Michel, 1941d, « La tendance centrales pour des variables aléatoires liées ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 212. Séance du 16 juin 1941.
- LONG Louis, 1926, *Sur certaines transformations par polaires réciproques relativement au complexe linéaire et à la sphère*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- LÉGAUT Marcel, 1925, *Sur les systèmes de points du plan. Applications aux courbes gauches algébriques*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- LÉVY Paul, 1935, « Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchaînées ». *Bulletin des sciences mathématiques*, vol. 59, p. 84–96 et 109–128.
- LÉVY Paul, 1936, « La loi forte des grands nombres pour les variables enchaînées ». *Journal des Mathématiques pures et appliquées*, p. 11–24.
- LÉVY Paul, 1937, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gauthier-Villars.
- LÉVY Paul, 1955, « Wolfgang Doeblin (Vincent Doblin) (1915-1940) ». *Revue d'histoire des sciences*, vol. 8 (2), p. 107–115.
- LÉVY Paul, 1967, « Les Mathématiques ». Dans *Institut de France, Académie des sciences, Troisième centenaire, 1666-1966*, 1, Paris : Gauthier-Villars, p. 143–212.
- LÉVY Paul, 1970, *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*. Paris : A. Blanchard.
- MALÉCOT Gustave, 1939, *Théorie mathématique de l'hérédité mendélienne généralisée*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- MANDELBROJT Benoît, 1985, « Entretien à bâtons rompus avec Szolem Mandelbrojt ». Dans *Publications du Séminaire d'Histoire des Mathématiques de l'Université de Paris*, 6.
- MANDELBROJT Szolem, 1923, *Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.

- MANSUY Roger, 2005, « Histoire de martingales ». *Mathématiques et sciences humaines*, vol. 169. [En ligne], mis en ligne le 28 mars 2006. URL : <http://msh.revues.org/document2945.html>.
- MARBO Camille, 1967, *À travers deux siècles, souvenirs et rencontres (1883-1967)*. Paris : Grasset.
- MARCHAUD André, 1927, *Sur les dérivées et les différences des fonctions de variables réelles*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- MARKOV Andrei Andreyevich, 1907, « Extension de la loi des grands nombres aux événements dépendants les uns des autres ». *Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan*, vol. 15, p. 135.
- MARTIN Yves, 1972, « Antoine, Louis ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 44–47.
- MARTY F., 1931a, « Recherches sur la répartition des valeurs d'une fonction méromorphe ». *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, (23), p. 183–261. 3<sup>e</sup> série.
- MARTY F., 1931b, *Recherches sur la répartition des valeurs d'une fonction méromorphe*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- MARTY Frédéric, 1936, « Sur les groupes et hypergroupes attachés à une fraction rationnelle ». *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, (53), p. 83–123. 3<sup>e</sup> série.
- MAURAIN Charles, 1940, *La Faculté des sciences de l'Université de Paris de 1906 à 1940*. Presses Universitaires de France.
- MAZLIAK Laurent, 2007, « On the exchanges between W. Doeblin and B. Hostinský ». *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 13 (1), p. 155–180.
- MAZLIAK Laurent, 2008, « La France de l'entre-deux-guerres et les mathématiques du hasard : Borel, L'IHP et les Statistiques ». Notes de l'exposé donné à l'IHP à l'occasion du 80<sup>ième</sup> anniversaire de l'IHP, 15 novembre 2008.
- MAZLIAK Laurent, 2009a, « How Paul Lévy saw Jean Ville and Martingales ». *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, vol. 5 (1).
- MAZLIAK Laurent, 2009b, « Les fantômes de l'École normale. Vie mort et destin de René Gateaux ». Dans GOLDSTEIN Catherine et MAZLIAK Laurent (eds), *Mathématiques et Mathématiciens en France autour de la Première Guerre Mondiale*. à paraître.

- MAZLIAK Laurent et SHAFER Glenn, 2008, « Why did the Germans arrest and release Émile Borel in 1941 ? » [http ://www.proba.jussieu.fr/users/lma/MazliakShafer.pdf](http://www.proba.jussieu.fr/users/lma/MazliakShafer.pdf).
- MAZLIAK Laurent et TAZZIOLI Rossana, 2009, « Volterra and his french colleagues in world war one ». Dans *Mathematicians at war*, Springer. Coll. Archimedes.
- MAZ'YA Vladimir et SHAPOSHNIKOVA Tatyana, 2005, *Jacques Hadamard, un mathématicien universel*. Les Ulis : EDP sciences, édition française édition.
- MEMBRES DU COMITÉ D'ORGANISATION DE L'INAUGURATION DU CENTRE UNIVERSITAIRE ALBERT CHÂTELET, 1963, « Hommage à Albert Châtelet ». Edité par Du Centre.
- MENTRÉ Paul, 1923, *Les variétés de l'espace réglé étudiées dans leurs propriétés infinitésimales projectives*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- MEUSNIER Norbert, 2004, « Sur l'histoire de l'enseignement des probabilités et des statistiques ». Dans BARBIN Évelyne et LAMARCHE Jean-Pierre (eds), *Histoires de probabilités et de statistiques*, IREM - Histoire des mathématiques, Paris : Ellipses, p. 237–274.
- MICHEL Alain, 1992, *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*. Paris : Jean Vrin.
- MILLOUX Henri, 1924a, *Le théorème de M. Picard. Suite de fonctions holomorphes. Fonctions méromorphes et fonctions entières*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- MILLOUX Henri, 1924b, « Le théorème de M. Picard. Suite de fonctions holomorphes. Fonctions méromorphes et fonctions entières ». *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, (3), p. 345–401. Fascicule IV.
- MILLOUX Henri, 1925, « Sur le théorème de Picard ». *Bulletin de la Société Mathématique de France*, (53), p. 181–207.
- MILLOUX Henri, 1928, « Les cercles de remplissage des fonctions méromorphes entières et le théorème de Picard-Borel ». *Acta mathematica*, (52), p. 189–255.
- MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, 1848, « Bulletin administratif ».
- MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, 1885-1959, *Catalogue des thèses et écrits académiques*. Hachette.

- MIRGUET Jean, 1934a, « Nouvelles recherches sur les notions infinitésimales directes du premier ordre ». *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, (51), p. 201–244. 3<sup>e</sup> série.
- MIRGUET Jean, 1934b, *Nouvelles recherches sur les notions infinitésimales directes du premier ordre*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- VON MISES Richard, 1919, « Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ». *Mathematische Zeitschrift*, vol. 5, p. 52–99.
- VON MISES Richard, 1928, *Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, und Wahrheit*. Wien : Springer. 2<sup>de</sup> édition en 1936 et 3<sup>ème</sup> en 1951.
- VON MISES Richard, 1932, « Théorie des probabilités. Fondements et applications ». *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, vol. 3 (2), p. 137–190.
- MONTEL Paul, 1910, *Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe*. Paris : Gauthier-Villars.
- MONTEL Paul, 1912, « Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine. » *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, vol. 3 (29), p. 487–535.
- MONTEL Paul, 1917, « Sur la représentation conforme ». *Journal des Mathématiques pures et appliquées*, (3), p. 1–54. 7<sup>e</sup> série.
- MONTEL Paul, 1918, « Sur les polynômes d'approximation ». *Bulletin de la Société mathématique de France*, (46), p. 151–192.
- MONTEL Paul, 1923, « Sur les modules des zéros des polynômes ». *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, (40), p. 1–34.
- MONTEL Paul, 1924, « Sur les familles quasi-normales de fonctions analytiques ». *Bulletin de la Société Mathématique de France*, (52), p. 85–114.
- MONTEL Paul, 1925, « Sur les suites de fonctions analytiques qui ont pour limite une constante ». *Bulletin de la Société Mathématique de France*, (53), p. 246–257.
- MONTEL Paul, 1927, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques*. Paris : Gauthier-Villars.
- MONTEL Paul, 1930, « Sur les zéros des dérivées des fonctions analytiques ». *Bulletin de la Société Mathématique de France*, (48), p. 105–126.
- MONTEL Paul, 1933a, *Leçons sur les fonctions univalentes et multivalentes*. Paris : Gauthier-Villars.

- MONTEL Paul, 1933b, *Notice sur les Travaux scientifiques*. Paris : Librairie Armand Colin.
- MONTEL Paul, 1938, « Cérémonie de la Remise de l'épée d'académicien français à Monsieur Paul Montel ». Bucarest.
- MONTEL Paul, 1947a, « Jubilé scientifique de Paul Montel ». Gauthier-Villars, Paris.
- MONTEL Paul, 1947b, *Selecta, cinquantienaire scientifique de Paul Montel, 1897-1947*. Paris : Gauthier-Villars.
- MOREL Marie-Auguste, 1919, *Contribution à l'étude ballistique des canons de gros calibre et à très longues portées*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Lyon.
- MOUNIER-KUHN Pierre, 1996, « Un programme technologique national : la Mécanique des fluides ». Dans ET M. GROSSETTI A. Grelon (ed.), *Programme Villes et institutions scientifiques, Rapport final*, CNRS PIR Villes.
- MOUNIER-KUHN Pierre, 1998, « L'enseignement supérieur, la recherche mathématique et la construction de calculateurs en France (1920-1970) ». Dans BIRCK F. et A.GRELON (eds), *Des ingénieurs pour la Lorraine - Enseignements industriels et formations technico-scientifiques supérieures, XIXe-XXe siècles*, Editions Serpenoise, p. 251–286. Actes du colloque de Metz (décembre 1995).
- MOUNIER-KUHN Pierre Éric, 1999, *L'informatique en France de la Seconde Guerre mondiale au Plan Calcul : Science, Industrie, Politique Gouvernementale*. Thèse de doctorat, CNAM, Paris.
- MOUSSA Pierre, 1987, « Dubourdieu (Jules) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 43–45.
- NABONNAND Philippe, 2003, « Les débats autour des applications des mathématiques dans les réformes de l'enseignement secondaire au début du XX<sup>e</sup> siècle ». Dans MATHÉMATIQUE L'Enseignement (ed.), *One Hundred Years of L'Enseignement mathématique, Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century*, monographie n°39, Genève, p. 229–249.
- NABONNAND Philippe, 2006, « La création du certificat de mathématiques générales à Nancy ». Dans BIRCK FRANÇOISE GRELON André (ed.), *Un siècle de formation des ingénieurs électriciens, Ancrage local et dynamique européenne, l'exemple de Nancy*, Maison des sciences de l'homme.
- NAGYLAKI Thomas, 1989, « Gustave Malécot and the transition from classical to modern population genetics ». *Genetics*, vol. 122, p. 253–268.

- NEVANLINNA Rolf, 1925, « Zur Theorie der meromorphen Funktionen ». *Acta Mathematica*, (46), p. 1–99.
- NEVANLINNA Rolf, 1929, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*. Paris : Gauthier-Villars.
- NICOLADZÉ Georges, 1928, *Sur les systèmes continus de figures géométriques*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- NICOLESCO Miron, 1928, *Fonctions complexes dans le plan et dans l'espace*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- NIMIER Jacques, 1989, *Entretiens avec des mathématiciens*. Villeurbanne : Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques. Académie de Lyon.
- NORDSTRÖM Kenneth, 1999, « The Live and Work of Gustav Elfving ». *Statistical Science*, vol. 2 (14), p. 174–196.
- NYE Mary Jo, 1986, *Science in the provinces : scientific communities and provincial leadership in France, 1860-1930*. Berkeley ; Los Angeles ; London : Univ. of California Press.
- OBSERVATOIRE DE LYON, 2002, « L'observatoire de Lyon, histoire instruments recherche astronomie ». CNRS, Editions des Traboules.
- OLIVIER-UTARD Françoise, 2005, « L'université de Strasbourg : un double défi, face à l'Allemagne et face à la France ». Dans CROWFORD E. et OLFF-NATHAN Josiane (eds), *La science sous influence : l'université de Strasbourg, enjeux des conflits franco-allemands, 1872-1945*, Strasbourg : La Nuée Bleue, p. 137–181.
- ONICESCU et MIHOC, 1935, « Sur les chaînes de variables statistiques ». *Bulletin des sciences mathématiques*, vol. 59, p. 174. 2<sup>ième</sup> série.
- OSTROWSKI A., 1937, « Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung ». *Prace Matematyczne Fizyczne*, (44), p. 371–471.
- PANTAZI Alexandre, 1927, « Sur l'applicabilité projective des hypersurfaces développables ». (185), p. 1178–1179.
- PANTAZI Alexandre, 1928, *Sur l'applicabilité projective des hypersurfaces développables*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- PASQUALINI Louis, 1938, *Sur les conditions de convexité d'une variété*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Poitiers.

- PAYAN Jean-Jacques, 1991, « Chabauty (Claude) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 346–347.
- PELLETIER Michèle, 2007, « d'Orgeval-Dubouchet (Bernard) ». *L'Archicube*. Numéro spécial - Notices.
- PERRIN Francis, 1928a, *Étude mathématique du mouvement brownien de rotation*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- PERRIN Francis, 1928b, « Étude mathématique du mouvement brownien de rotation ». *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, (45), p. 1–51. 3<sup>e</sup> série.
- PETIT Marc, 2005, *Sur l'équation de Kolmogorov*. Paris : Gallimard (Folio).
- PICARD Émile, 1879a, « Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier uniforme ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, (89), p. 745–747. Séance du 20 octobre 1879.
- PICARD Émile, 1879b, « Sur les fonctions entières ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, (89), p. 662–665. Séance du 20 octobre 1879.
- PICARD Émile, 1879c, « Sur une propriété des fonctions entières ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, (88), p. 1024–1027. Séance du 19 mai 1879.
- PICARD Émile, 1917, « La vie et l'oeuvre de Gaston Darboux ». *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, (34), p. 81–93. 3<sup>e</sup> série.
- PICARD Émile, 1978, *Oeuvres de Charles-Émile Picard*, vol. 1. Editions du Centre national de la recherche scientifique.
- PICARD Jean-François, 1990, *La République des savants, La recherche française et le C.N.R.S.* Flammarion.
- PICARD Jean-François, 1999, « La création du CNRS ». *La revue pour l'histoire du CNRS*, (1).
- PICARD Jean-François et PRADOURA Elisabeth, 1988, « La longue marche vers le CNRS (1901-1945) ». *Cahiers pour l'histoire du CNRS*, (1).
- PICINBONO Bernard, 2002, « La vie scientifique d'André Blanc-Lapierre ». <http://www.supelec.fr/actu/Blanc-Lapierre.PDF>.
- PIER Jean-Paul (ed.), 1994a, *Development of mathematics 1900-1950*. Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser Verlag.

- PIER Jean-Paul, 1994b, « Intégration et mesure 1900-1950 ». Dans PIER Jean-Paul (ed.), *Development of Mathematics 1900-1950*, Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, p. 517–564.
- PIERPONT J., 1900, « Mathematical Instruction in France ». *Bulletin of the American Mathematical Society*, (6), p. 225–249.
- PISOT Charles, 1938, *La répartition modulo un et les nombres algébriques*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- POINCARÉ Henri, 1887, « Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique ». *Journal de mathématiques*.
- POINCARÉ Henri, 1896, *Calcul des probabilités. Leçons professées pendant le deuxième semestre 1893-1894*. Paris : Georges Carré.
- POINCARÉ Henri, 1907, « Le Hasard ». *La Revue du Mois*, vol. 3, p. 257–276. Reproduit en introduction de POINCARÉ (1912).
- POINCARÉ Henri, 1912, *Calcul des probabilités*. Paris : Gauthier-Villars. 2<sup>ème</sup> édition, revue et augmentée par l'auteur.
- POINCARÉ Henri, 1915, « Rapport sur les travaux de M. Cartan ». *Acta Mathematica*, (38), p. 137–145.
- PÓLYA G. et SZEGÖ G., 1925, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, vol. II. Springer Verlag.
- PONCIN Henri, 1981, « Bouligand, Georges ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'Ecole normale supérieure*, p. 34–38.
- POPOVICIU Tibère, 1933, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- DE POSSEL René, 1932, *Quelques problèmes de représentation conforme*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- POTIER Robert, 1940, *Sur certaines questions de géométrie différentielle conforme*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- POURPRIX Marie-Thérèse, 2000 ?, « Les mathématiques à Lille de 1854 à 1970 ». [http://asa-2.univ-lille1.fr/ASA\\_histoire/mathematiques/mathematiques.htm](http://asa-2.univ-lille1.fr/ASA_histoire/mathematiques/mathematiques.htm).
- PRASAD Badri Nath, 1932, *Contribution à l'étude de la série conjuguée d'une série de Fourier*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.



- PROCHASSON Christophe et RASMUSSEN Anne, 1996, *Au nom de la patrie, les intellectuels et la première guerre mondiale (1910-1919)*. Paris : Éditions La Découverte.
- PROCHASSON Christophe et RASMUSSEN Anne, 2004, *Vrai et faux dans la Grande Guerre*. Paris : Éditions La Découverte.
- PROST Antoine, 1988, « Les origines de la politique de la recherche en France (1938-1958) ». *Cahiers pour l'histoire du CNRS*, (1).
- PRZYTICKI Józef H., 2002, « The interrelation of the Development of Mathematical Topology in Japan, Poland and USA : Notes to the early history of Knot Theory in Japan ». *Annals of the Institute for Comparative Studies of Culture*, (63), p. 61–86. [Http ://front.math.ucdavis.edu/math.HO/0108072](http://front.math.ucdavis.edu/math.HO/0108072).
- RAMBAUD, 1931, *Étude des points singuliers pour une équation linéaire du premier ordre*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Lyon.
- RAUCH A., 1931, « Généralisation de théorèmes de M. Valiron sur les fonctions méromorphes d'ordre positif. » *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, (186), p. 1189–1191.
- RAUCH A., 1933, *Extensions de théorèmes relatifs aux directions de Borel des fonctions méromorphes*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- REICH Karin, 1994, *Die Entwicklung des Tensorkalküls : Vom absoluten Differentialkalkül zur Relativitätstheorie*. Birkhäuser.
- REMMERT Reinhold, 1998, *Classical Topics in Complex Function Theory*. New-York, Berlin, Heidelberg : Springer.
- REVEL Jacques, 1996a, « Micro-analyse et construction du social ». Dans REVEL Jacques (ed.), *Jeux d'échelles. La micro-analyse à l'expérience*, Hautes études, Gallimard Le Seuil, p. 15–36.
- REVEL Jacques, 1996b, « Présentation ». Dans REVEL Jacques (ed.), *Jeux d'échelles. La micro-analyse à l'expérience*, Hautes études, Gallimard Le Seuil, p. 7–14.
- REY Georges, 1997, « Benneton (Georges) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 38–40.
- REY-DEBOVE Josette et REY ALain (eds), 1987, *Le Petit Robert. Dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*. Le Robert Dictionnaires.
- DE RHAM Georges, 1980, « Quelques souvenirs des années 1925-1950 ». *Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques*, (1), p. 19–36.

- RIESZ Frédéric, 1949, « L'évolution de la notion d'intégrale depuis Lebesgue ». *Annales de l'institut Fourier*, (1), p. 29–42.
- RITTER Jim, à paraître en 2009, « Henri Eyraud ». Dans GOLDSTEIN Catherine et MAZLIAK Laurent (eds), *Mathématiques et Mathématiciens en France autour de la Première Guerre Mondiale*, indéterminé.
- ROGER Frédéric, 1938, *Les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- ROLLET Laurent et NABONNAND Philippe, 2002, « Une bibliographie mathématique idéale ? » *Gazette des mathématiciens*, (92), p. 11–26.
- ROSCA Radu, 1939, *Transformations asymptotiques des courbes dans l'espace elliptique. Courbes de Bertrand*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- ROY René, 1961, « Georges Darmon, 1888-1960 ». *Econometrica*, vol. 29 (1), p. 80–83.
- RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, 1898 and 1908 and 1916, « Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques ».
- SAINT-GERMAIN Albert, 1911, *Rapport de la sous-commission française de la commission de l'enseignement mathématique sur l'enseignement supérieur en France*. Hachette.
- SAINT-MARTIN Arnaud, 2008, *L'office et le télescope. Une sociologie historique de l'astronomie française, 1900-1940*. Thèse de sociologie des sciences, Université de Paris IV-Sorbonne.
- SALEM Raphaël, 1940, *Essais sur les séries trigonométriques*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- SALEM Raphaël, 1967, *Œuvres mathématiques*. Paris : Hermann.
- SARTRE L., 1948, « Flamant (Paul) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 47–50.
- SCHATZMAN Evry, 1994, « Perrin (Francis) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 413–414.
- SCHWARTZ Laurent, 1943, « Étude des sommes d'exponentielles réelles ». Dans *Actualités scientifiques et industrielles*, 959, Paris : Hermann.
- SCHWARTZ Laurent, 1997, *Un mathématicien aux prises avec le siècle*. Paris : Éditions Odile Jacob.

- SEBAG Jules, 1928, *Sur l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles relative à l'aire d'une surface minima limitée à une courbe gauche et sur la recherche de ses solutions homogènes*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- SEGAL Sanford, 1981, *Nine Introductions to Complex Analysis*. New-York : North-Holland Publishing Company.
- SEGAL Sanford L., 2003, *Mathematicians Under the Nazis*. Princeton University Press.
- SENETA Eugene, HUNGER PARSHALL Karen et JOGMANS François, 2001, « Nineteenth-Century Developements in Geometric Probability : J.J Sylvester, M. W. Crofton, J.-E. Barbier, and J. Bertrand ». *Archive of History of Exact Sciences*, vol. 55, p. 501–524.
- SENETA Eugène, 1966, « Markov and the Birth of Chain Dependence Theory ». *International Statistical Review*, vol. 64 (3), p. 255–263.
- SHAFFER Glenn, 2009, « The Education of Jean André Ville ». *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*.
- SHAFFER Glenn et VOVK Vladimir, 2001, *Probability and Finance. It's Only a Game!* New-York : Wiley.
- SHAFFER Glenn et VOVK Vladimir, 2006, « The sources of Kolmogorov's Grundbegriffe ». *Statistical Science*, vol. 21, p. 70–98.
- SHEYNNIN O.B., 1989, « A.A. Markov's Work on Probability ». *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 39 (4), p. 337–377.
- SHIH-KY Wang, 1936, *Recherches sur la diffusion de la lumière dans la voie lactée*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Lyon.
- SIEGMUND-SCHULTZE Reinhard, 1993, *Mathematische Berichterstattung in Hitlerdeutschland : der Niedergang des "Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik"*. Göttingen : Vandenhoeck und Ruprecht.
- SIEGMUND-SCHULTZE Reinhard, 2001, *Rockefeller and the Internationalization of Mathematics between Two World Wars*. Basel : Birkhäuser.
- SIEGMUND-SCHULTZE Reinhard, 2006, « Probability in 1919/1920 : the von Mises-Pólya-Controversy ». *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 60, p. 431–515.
- SIEGMUND-SCHULTZE Rheinhard, 2005, « Maurice Fréchet à Strasbourg. Les mathématiques entre nationalisme et internationalisme, entre application et abstraction ».

- Dans CRAWFORD Elisabeth et OLFF-NATHAN Josiane (eds), *La science sous influence : l'université de Strasbourg, enjeu des conflits franco-allemands, 1872-1945*, Strasbourg : La Nuée Bleue, p. 185–196.
- SISOWATH Youtévong, 1941, *Essai de normalisation des courbes d'untrados de voûtes en berceau*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Montpellier.
- SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, 1921, « Vie de la Société ». *Bulletin de la Société Mathématique de France*, (49), p. 1–59.
- SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE (ed.), 1975, *Arnaud Denjoy, évocation de l'homme et de l'oeuvre*. astérisque 28-29, Paris : CNRS.
- SOULA Jacques, 1921, *Sur la recherche des points singuliers de certaines fonctions définies par leur développement de Taylor*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- STANTON R.J et WELLS Raymond O. (eds), 1978, *History of analysis*, 5, Houston TX : William Marsh Rice University.
- TAQQU Murad S., Taqqu, 2001, « Bachelier and his times : a conversation with Bernard Bru ». *Finance and Stochastics*, vol. 5 (1), p. 3–32.
- TATA INSTITUTE OF FUNDAMENTAL RESEARCH, 1966, *World directory of mathematicians*. Bombay, 3<sup>e</sup> édition.
- TAYLOR Angus E., 1985, « A study of Maurice Fréchet : II. Mainly about his work on general topology, 1909-1928 ». *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 34 (4), p. 279–380.
- TELKÈS Eva, 1990, « Présentation de la Faculté des sciences et de son personnel, à Paris (1901-1939) ». *Revue d'Histoire des sciences*, (43), p. 451–476.
- THEODORESCO Nicolas, 1931, *La dérivée aérolaire et ses applications à la physique mathématique*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- THYBAUT A., 1897, « Sur la déformation du paraboloïde et sur quelques problèmes qui s'y rattachent ». *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, (14), p. 45–98. 3<sup>e</sup> série.
- THYBAUT A., 1900, « Sur une classe de surfaces isothermiques ». *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, (17), p. 541–591. 3<sup>e</sup> série.
- TOBIES Renate et GISPERS Hélène, 1996, « A Comparative Study of the French and German Mathematical Societies before 1914 ». Dans GOLDSTEIN Catherine, GRAY Jeremy et RITTER Jim (eds), *L'Europe Mathématique*, Paris : Éditions de la Maison des sciences de l'Homme, p. 409–432.

- TRAYNARD C.-E., 1955, « Eger (Max) ». *Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, p. 48.
- TŘEŠŇÁK Zdeněk, ŠARMANOVÁ Petra et PŮŽA Bedřich, 1996, *Otakar Borůvka*. Brno : Universitas Masarykiana Edice Osobnosti.
- UNIVERSITY OF CALIFORNIA (SYSTEM) ACADEMIC SENATE, 1980, « Michel Loève, Mathematics ; Statistics : Berkeley ». Dans 1980, *University of California : In Memoriam*, Berkeley : University of California. Consultable sur le site <http://content.cdlib.org/xtf/view?docId=hb1j49n6pv&doc.view=frames&chunk.id=div00060&toc.depth=1&toc.id=>.
- VALIRON Georges, 1914, *Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- VALIRON Georges, 1921, « Recherches sur le théorème de M. Picard ». Dans *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, numéro 38 dans 3ème série, Paris : Gauthier-Villars, p. 389–429.
- VALIRON Georges, 1926, « Théorie générale des séries de Dirichlet ». Dans VILLAT Henri (ed.), *Mémorial des sciences mathématiques*, vol. XVII, Gauthier-Villars.
- VALIRON Georges, 1928, « Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes ». *Acta mathematica*, (52), p. 67–92.
- VALIRON Georges, 1930, « Sur le domaine riemannien couvert par les valeurs d'une fonction holomorphe ». *Acta Mathematica*, (4), p. 91–108.
- VALIRON Georges, 1937, *Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées*. Numéro 570 dans Actualités scientifiques et industrielles, Paris : Hermann.
- VALIRON Georges, 1949, « Des théorèmes de Bloch aux théories d'Ahlfors ». *Bulletin des sciences mathématiques*, p. 152–162.
- VALIRON Georges, 1952, *Notice sur les travaux scientifiques de M. Georges Valiron*. Paris : Gauthier-Villars.
- VAN VLECK E.B., 1925, « On limits to the absolute values of the roots of a polynomial ». *Bulletin de la S.M.F.*, (53), p. 105–125.
- VASILESCO Florin, 1925, *Essai sur les fonctions multiformes de variables réelles*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.

- VASSEUR Marcel, 1930, *Sur la conservation d'un réseau conjugué dans la déformation d'une surface*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- VAULOT A., 1923, *Congruences rectilignes qui sont en même temps W et de Ribaucourt*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- VILLE Jean, 1938, *Applications aux jeux de hasard*. Paris : Gauthier-Villars. Fascicule II du Tome IV «Applications diverses et conclusion» du *Traité du Calcul des probabilités et de ses applications* par Émile Borel.
- VILLE Jean, 1939a, *Étude critique de la notion de collectif*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- VILLE Jean, 1939b, *Étude critique de la notion de collectif*. Paris : Gauthier-Villars. Collection des Monographies des probabilités.
- VILLE Jean, 1944, « Sur la théorie invariante de l'estimation stochastique ». *Bulletin des sciences mathématiques*, vol. 68, p. 95–108. Série II.
- VILLE Jean, 1955, « Notice sur les travaux scientifiques de M. Jean Ville ». Archives Fréchet, Laboratoire de probabilités, Université de Paris VI. Reproduit en partie dans CRÉPEL 1984, p.44-48.
- VILLE Jean et SHAFER Glenn, 2005, « A Counterexample to Richard von Mises's Theory of Collectives ». <http://www.probabilityandfinance.com/misc/ville1939.pdf>. Translation and introduction by Glenn Shafer.
- VINCENSINI Paul, 1927, « Sur trois types de congruences rectilignes ». *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, (19), p. 93–166. 3<sup>e</sup> série.
- VOLKERT Klaus Thomas, 1988, *Geschichte der Analysis*. Mannheim : Wissenschaftsverlag.
- VON PLATO Jan, 1994, *Creating Modern Probability*. New-York : Cambridge University Press.
- WACHS Sylvain, 1936, *Essai sur la géométrie projective quaternionnienne*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- WAGNER-DÖBLER Roland et BERG Jan, 1996, « Nineteenth-Century Mathematics in the Mirror of Its Literature : A Quantitative Approach ». *Historia Mathematica*, (23), p. 288–318.
- WALD Abraham, 1937, « Die Widerspruchfreiheit des Kollektivbegriffes ». *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, vol. 8.

- WAVRE R., FRÉCHET M., HEISENBERG W. et PÓLYA G., 1938, « Première Partie. Conférences d'introduction ». Dans *Colloque consacré à la théorie des probabilités*, Paris : Hermann.
- WEIL André, 1928, *L'arithmétique sur les courbes algébriques*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris.
- WEIL André, 1991, *Souvenirs d'apprentissage*. Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser.
- WOLFF Julius, 1941, « Inégalités remplies par les fonctions univalentes ». *Proceeding de l'Académie d'Amsterdam*, vol. 8 (44).
- YANO Kentaro, 1945, « Sur la théorie des espaces à hyperconnexion euclidienne ». *Proceedings of the Japan Academy*, (21), p. 156–163.
- ZALLEN Doris T., 1989, « The Rockefeller Foundation and French Research ». *Cahiers pour l'histoire du CNRS*, (5).
- ZYGMUND Antoni, 1935, *Trigonometrical Series*. Warszawa - Lwow : Monografie Matematyczne.